小波十讲

Ten Lectures on Wavelets

[美] Ingrid Daubechies 著
李建平 杨万年 译

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

责任编辑 崔晓莉 封面设计 李晓烽

原著《小波十讲》因杰出贡献和优美风格
荣获 1994 年 Leroy P.Steele 奖。
该书印数超过 15000 册，风行全世界，
这在学术著作中是极为罕见的。

"该书原作者Daubechies是小波分析理论的主要创始人之一。书中用精辟的语言描述了小波分析的主要原理和方法，可作为小波课程的精读教材。该书读起来极为有趣，如同阅读一本优秀的俄罗斯长篇小说。Daubechies十分巧妙地组织素材，在许多地方给出说明和注释，有效化解难点。本书可满足个人阅读及大学生、研究生、大学教师、科研人员等多方面的需求，并将成为经典读物。"

F.Alberto Grünbaum, *Science*, August 7, 1992

"本书既是一本关于小波分析的导论性教材，又是一本全面总结和反映该领域最新研究成果的学术专著。书中给出了大量实践例题，描述了小波分析的许多应用，如信号处理、图像编码、数值分析等。"

Albert Cohen (Paris), *Mathematical Reviews*, Issue 93e

"这是一本由小波理论主要创始人撰写的优秀读物。书中内容是小波分析之物理原理、数学方法、工程分析的重要组成部分。该书文笔犀利，推理严谨，由浅入深，应用广泛，对数学家、物理学家、工程技术人员和一切对小波分析应用感兴趣的人员均具有重要的参考价值。"

Nicolae Popa, *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.16, Nos.1–2, 1996

Ingrid Daubechies 是普林斯顿大学（Princeton University）数学系和应用数学与计算数学研究中心教授。她曾在布鲁塞尔（Brussels）的佛雷大学（Free University）理论物理系工作，后任著名的AT & T贝尔实验室的技术员，是卢特格大学(Rutgers University)数学系的教授（Full Professor）。她曾获得1997年Ruth Lyttle Satter数学奖。她频繁应邀到世界各地作学术报告，发表了大量学术论文，出版了许多学术著作。

ISBN 7-118-03381-2

9 787118 033816 >

ISBN 7-118-03381-2/O·211
定价:35.00 元

中国人民解放军总装备部专项资金资助出版

小波十讲

(Ten Lectures on Wavelets)

[美]Ingrid Daubechies 著
李建平 杨万年 译

国防工业出版社
·北京·

著作权合同登记　图字：军－2003－017号

Ten Lectures on Wavelets by Ingrid Daubechies

Copyright 1992 by tbe Society for Industrial and Applied Mathematics

本书中文版由 Society for Industrial and Applied Mathematics 授予国防工业出版社独家出版发行。版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

小波十讲/（美）多布（Daubechies, I.）著；李建平，杨万年译.—北京：国防工业出版社，2004.5

书名原文：Ten Lectures on Wavelets

ISBN 7-118-03381-2

Ⅰ.小...　Ⅱ.①多...②李...③杨...　Ⅲ.小波分析—研究　Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 125504 号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码　100044）

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×960　1/16　印张 21½　403 千字

2004 年 5 月第 1 版　2004 年 5 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册　定价：35.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

- 国家高技术研究发展计划(863 计划)资助项目
- 国家自然科学基金资助项目
- 重庆市科技攻关重点资助项目
- 重庆市信息产业发展资金资助项目

原著前言

小波分析是在应用数学的基础上发展起来的一门新兴学科,近十年来得到了飞速的发展。众多的科学家(Morlet, Arens, Fourgeau,Giard 等)在小波分析这一领域取得了令人瞩目的成就。他们之所以取得成功有很多方面的原因,一方面,小波分析作为近二三十年从工程、物理及纯数学发展起来的综合学科,吸引着越来越多的来自不同行业的科技工作者;另一方面,小波分析是一种精确而简单的数学工具,在许多行业有着广泛的应用。信号小波分析、小波分析快速算法和积分变换已经取得了令人兴奋的成绩,其他更广泛的应用正在被研究。凭借其广泛的应用,小波分析引起了越来越多科学家的兴趣。

本书共有 10 章,包括了 1990 年 6 月,我以主讲人的身份,在美国洛维尔(Lowell)大学举行的 CMBS 会议上所做的 10 次报告。按照 CMBS 大会的惯例,其他报告人——G. Battle, G. Beylkin, C. Chui, A. Cohen, R. Coifman, K. Grochenig, J. Liandrat, S. Mallat, B. Torresani 和 A. Willsky 等,做了关于小波在他们工作中应用的报告。此外还组织了 3 个工作室,用来展示小波分析在应用物理和求逆问题、群论、调和分析、信号分析方面的理论成果。与会者包括活跃在小波分析和数学领域的科研工作者,和那些对小波了解甚少但想进一步了解的科学家和工程师们。在所有与会者中,后者占了很大的比例。为了给我们以后的工作打下坚实的基础,我把向与会者提供小波分析人门指南作为自己的一项任务。在我做的报告中,三分之二是小波基本理论,剩余三分之一提供了较新的和没有发表的成果。同样的分类也反映在这本书中。因此,我相信本书对小波分析的学习非常有帮助,它不仅可以作为人门读本,也可以作为研究生的教材。CMBS 大会的其他内容没有被收人,本书反映更多的是我自己所做的工作。为了更好的说明具体应用,在很多例子中我引用了参考文献。其他关于小波的书籍有:《Wavelets and Time Frequency Methods》——Combes, Grossmann 和 Tchamitchian 著,包含了 1987 年在法国举行的国际小波会议的论文集;《Ondelettes》——Y. Meyer 著,包含了对小波数学方面的描述,较少地涉及其他学科;《Les Ondelettes en 1989》——P. G. Lemaxie 著,对在巴黎大学做的演讲的整理;《An Introduction to Wavelets》——C. K. Chui 著,关于小波近似理论的介绍。1989 年举行的国际小波会议的论文集也即将出版。此外,很多向 CMBS 会议投稿但没有来参加会议的作者,都被邀请写了关子自己所做小

波工作的文章,由它们编成的《Wavelets and their Applications》可看成本书的姐妹篇。《Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications》——C. K. Chui 著,是另一本关于小波方面的书籍。我还了解到有几本有关小波的书籍和 M. Holschneider 的专论正在编撰之中,《IEEE Trans. Inform. Theory in March》1992.3,《Constructive Approximation Theory》和《IEEE Trans. Sign. Proc》1993 中都收录了小波方面的文章。近期出版的下列书中涉及到小波方面的章节,如:《Multirate Systems and Filter Banks》——P. P. Vaidyanathan 著;《Quantum Physics, Relativity and Complex Spacetime; Towards a New Synthesis》——G. Kaiser 著。读者可以在这些书籍和文章中进一步了解到关于小波方面的知识。从以上成果我们可以看出小波的发展是多么的迅速。

本书基本上反映了我在会议上所做报告的内容和顺序,每一章就是一次报告的内容。第 1 章对小波变换进行了概括性的描述,后续章节则进行了较详细的讲解。第 2 章介绍了连续小波变换,第 3 章介绍了离散小波变换:框架,第 4 章介绍了时频密度和正交基。在这几章中,我们论证了加窗傅里叶变换和小波变换的许多结论,并且两者是并行的,方便读者进行比较区分。第 5 章介绍了正交小波基和多分辨分析,第 6 章介绍了紧支正交小波以及子带编码,第 7 章介绍了紧支撑小波正则性,第 8 章介绍了紧支撑小波的对称性,第 9 章介绍了正交基是一种好的基,而且适用于许多傅里叶变换不适用的泛函空间。这一章的数学论证较多,并和其他章节的小波应用没有太多的关联,对小波原理没有兴趣的读者可以略过。我将它写出来有几个原因:关于它们的证明对调和分析、T(1)定理和数值分析是十分重要的。此外,对 Calderón - Zygmund 分解定理用不同的尺度技巧给出了详细的证明。这种技巧在小波出现以前早就在调和分析中使用了。第 10 章介绍了不同伸缩因子的正交小波基的构造方法:伸缩因子为 2 的多维小波的张量积多分辨分析或不可分算法;伸缩因子为整数或小数,但不是 2 的正交小波基;采用分段方法的频率分析;在一个区间上的小波基。本书中每章都用了一些上标数字对正文进行注释,这样读者既可以更好地理解每章内容,又保持了行文的连贯性。

本书是一本数学书,证明了很多定理。要求读者有一定的数学基础,熟悉傅里叶变换和傅里叶系数的基本性质。我们引用了一些基本的原理和定理。在一些章节熟悉 Hilbert 函数空间是十分有必要的。必要的概念和定理在本书的预备知识中已经做了阐述。

如果读者不熟悉那些预备知识也不必惊慌,本书中的大部分内容只要求有基础的傅里叶分析知识就足够了。此外,我将证明的步骤写得很详细,精通数学的读者可能认为写得过于繁琐。我希望书中的注释,不仅仅吸引数学工作者,而且对有机会读这本书的每一个人都有吸引力。所以我常常避开“定义——引理——命题——定理——推论”的顺序,凭直觉来组织文章,有可能使本书显得比较拖沓。我

只想与读者分享各学科间交叉发展带给我们的快乐。

我想利用这个机会，对主办本次大会的人们——CMBS 大会组委会、Lowell 大学数学系、特别是 G. Kaiser 教授和 M. B. Ruskai 教授表达我的感激之情。这次大会的成功举行和比往届有更多的与会者，是大会组委会高效率组织的结果。正如经验丰富的大会组织者 I. M. James 所说，“一次大会主要依靠几乎做了所有工作的人”；对于 1990 年的 CMBS 会议这个人是 Mary Beth Ruskai。作为大会的组织骨干，她将会议放在第一位，以高效的工作使我花了有限的时间宣讲了我大多数的论著成果。会议之前，我在 Michigan 大学数学系上研究生课程的时候就讲过本书中的内容，我的这次访问得到了美国国家自然科学基金和 Michigan 大学的大力支持，我在这里表示感谢。我还要感谢那些在课堂上配合我的同事和同学们，他们给我反馈了很多信息，提供了很多有用的建议。本书的录入工作是 Martina Sharp 完成的，感谢她的耐心、勤奋和出色的工作成绩。没有她，我是不可能完成本书的。感谢 Jeff Lagarias 编著了本书的注释。感谢帮助我做了很多论证工作的人，尤其是 Pascal Auscher，Gerry Kaiser，Ming－Jun Lai 和 Martin Vetterli。由于本人能力有限，本书可能还存在一些错误，请读者原谅。我还要感谢 Jim Driscoll 和 Sharon Murrel 帮助我整理作者索引。最后，我要感谢我的丈夫 Robert Calderbank，是他的理解和支持帮助我完成了本书！

Ingrid Daubechies
Rutgers University
and
AT&T Bell Laboratories

序言一

由于小波分析的“自适应性质”和“数学显微镜性质”，使其被广泛用于基础科学、应用科学尤其是信息科学、信号分析的方方面面，比如：图像处理与传输、信号处理、模式识别(人像识别、话音识别、天体识别等)、地震探测、音乐、雷达、CT成像、彩色复印、流体湍流、机器视觉、机械故障诊断与监控以及HDTV等等。由于小波分析在数字信号分析方面独特的诊断效果，来自不同学科、不同背景、不同兴趣爱好的科技工作者自觉投入到小波分析理论与应用研究中，涌现出一批高水平的论文和著作，在国内外形成一次又一次研究高潮，至今方兴未艾。小波技术是科学家、工程师和数学家们共同创造的，反映了大科学时代学科之间综合、渗透的优势。

世界学术名著《小波十讲》对小波分析的理论和应用研究产生了深刻的影响。该书的二位译者李建平教授、杨万年教授多年从事小波分析理论与应用研究，并取得了突出的研究成果，是目前国际上小波分析研究领域十分活跃的专家，他们的译著有较高的学术水平和学术质量，相信该书的出版会对小波分析与信号信息处理研究产生积极的推动作用。

中国科学院院士

中国人民解放军总参谋部第五十七研究所研究员

朱中梁

2003年4月29日

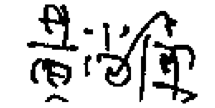
序言二

世界从本质上说是非线性的，线性是非线性的特殊情况，非线性才是世界的本质。以非线性为特征的非线性科学是一门跨学科的综合性、边缘性、交叉性科学，旨在揭示非线性系统的共同性质、基本特征和运动规律。作为非线性科学的前沿高技术之一的小波分析，它是傅里叶分析发展史上里程碑式的进展，是傅里叶分析理论发表180多年来最佳的继承、总结和发展，对分析工具起着承前启后、继往开来的重要作用，并取得了许多传统分析方法难以实现的显著应用效果。这种分析技术是一种高新技术，是高科技的重要内容，它已经把信息工业和信息技术推向了一个新时代，是当今国际学术研究和产业发展的热点内容之一。

该书的译者李建平、杨万年二位教授长期从事小波分析及其应用研究，李建平教授是博士生导师，杨万年教授是硕士生导师。他们在小波分析研究方面取得了很好的研究成绩，发表学术论文150余篇，出版小波分析学术著作12部，其中李建平教授主编的列入“全国高技术重点图书·信息获取与处理技术领域”的《小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现》一书，获得国家科技进步奖（科技著作）二等奖。

该书翻译出来后，经研究生多次试用，修订了许多错误。相信本书出版后会对我国的科技事业和教育事业产生良好的推动作用。

中国工程院院士
重庆大学教授



2003年5月6日

译 者 的 话

小波分析是近年出现的一种新的数学分析方法。它被数学家和工程师们独立地发现，是多元调和分析50年来发展的一个突破性进展，反映了大科学时代学科之间相互渗透、交叉、融合的趋势，是纯粹数学与应用数学及工程技术殊途同归的光辉典范。从1994年开始，小波分析曾多次引发了学术研究高潮，在小波分析国际学术会议上，参加者不仅有高等院校、科研机构的人员，而且还有公司企业代表、政府工作人员。“第三届小波分析及其应用国际学术大会”在重庆中国人民解放军后勤工程学院召开，吸引了40多位国际知名专家和200多位国内专家参加，大会由World Scientific Publishing Co.出版论文集5本(李建平主编，每本论文集500页，每篇论文均被国际四大检索机构之EI和ISTP同时收录)，这些足以显示小波分析的魅力和威力。事实上，小波分析对当前的理论科学、应用科学、尤其是信息科学产生了重要影响，对非线性科学、智能计算、网络与信息安全研究有很好的推动作用，被誉为学科发展的Windows平台，具有牵一而动全局的影响力，并形成国际研究热点，其发展方兴未艾。

目前，国内外有一些小波分析方面的书，但这些书或偏重理论研究或偏重某一专题分析或偏重某一应用范围，像Ingrid Daubechies《小波十讲》这样完美的著作目前很少见。我们在研究生教学中使用此书已达数年，深感它的重要价值与意义，因此汇集师生之力共同翻译了该书的全文。译文中尽可能反映Daubechies犀利的文风、严谨的推理和广泛的应用，以期传达小波分析优美的神韵。《小波十讲》与国内外同类书相比有如下特点：

1.《小波十讲》是一本经典名著，其学术影响力巨大；

2.《小波十讲》讲的是小波分析共性的关键问题，其中包含世界上第一个应用效果很好的Daubechies小波基，现已经形成JPENG2000国际标准的重要内容，是国际上公认的经典教材；

3.《小波十讲》是一本以推广普及小波分析为目的的学术著作；

4.《小波十讲》原作者Ingrid Daubechies是小波分析主要创始人之一。

后勤工程学院国际小波分析应用研究中心与重庆大学数理学院在小波分析研究方面进行了长期合作，并得到多项国家和重庆市科研基金资助。本书的翻译工作是在杨万年教授的组织下完成的。许多专家和研究生为本书的翻译作出了贡

献，其中，重庆大学研究生院部分博士研究生参与了本书翻译的前期工作，重庆大学数理学院黄薇博士翻译了第 9 章；重庆交通学院杨永琴副教授和后勤工程学院国际小波分析应用研究中心许多同志（如赵刚、潘伟、王森华、谢骏等）为本书的翻译校对、后期修订、联系出版等付出了辛勤劳动；中国科学院院士、中国人民解放军总参谋部第五十七研究所朱中梁研究员，中国工程院院士、重庆大学黄尚廉教授在百忙中为本书列入中国人民解放军总装备部专项资金资助项目撰写了推荐意见，并撰写序言；西安交通大学理学院博士生导师、《工程数学学报》总编程正兴教授审阅了本书译稿，并提出了许多宝贵意见；国内外许多专家为本书的翻译出版作出了贡献，对此译者一并向他们表示衷心感谢。特别感谢重庆大学、后勤工程学院领导和专家对本书翻译出版的鼎力支持。本书的翻译出版是国内外小波分析研究工作者集体智慧的结晶。

本书得到国家高技术研究发展计划（863 计划）项目资助（2003AA148040）、国家自然科学基金项目资助（69903012，60216263）、重庆市科技攻关重点项目资助（7220－B－13）、重庆市信息产业发展资金项目资助（200113012）。

李建平
中国人民解放军后勤工程学院
国际小波分析应用研究中心
中国 重庆 400016

杨万年
重庆大学数理学院
中国 重庆 400044
2003 年 7 月 28 日

目　　录

预备知识 …… 1

第 1 章　什么是小波 …… 9
　1.1　时—频定位(局部化) …… 9
　1.2　小波变换:小波变换与加窗傅里叶变换的相似与不同 …… 10
　1.3　不同类型的小波变换 …… 14

第 2 章　连续小波变换(CWT) …… 23
　2.1　带限函数的 Shannon 定理 …… 23
　2.2　带限函数是再生核 Hilbert 空间的特例 …… 26
　2.3　"时—频"限 …… 27
　2.4　连续小波变换(CWT－Continuous Wavelet Transform) …… 29
　2.5　连续小波变换的基础:再生核 Hilbert 空间(r.k.H.s) …… 35
　2.6　高维连续小波变换 …… 37
　2.7　连续窗口傅里叶变换 …… 38
　2.8　通过连续变换构造有用算子 …… 40
　2.9　连续小波变换作为数学变焦:局部正则性的表征 …… 49

第 3 章　离散小波变换:框架 …… 56
　3.1　小波变换的离散化 …… 56
　3.2　框架的性质 …… 58
　3.3　小波框架 …… 66
　3.4　窗口傅里叶变换的框架 …… 82
　3.5　时—频局部化 …… 88
　3.6　框架中的冗余:能得到些什么? …… 99
　3.7　一些结论性的注记 …… 101

第 4 章　时—频密度和正交基 …… 107

4.1 在小波变换及窗口傅里叶变换中时—频密度的作用 ……………… 107
4.2 标准正交基 …………………………………………………………… 114

第5章 正交小波基与多分辨分析 ……………………………………… 127
5.1 多分辨分析的基本思想 ……………………………………………… 127
5.2 举例 …………………………………………………………………… 135
5.3 放宽尺度函数的正交条件 …………………………………………… 137
5.4 更多的例子:Battle－Lemarie 小波族 ……………………………… 143
5.5 正交小波的正则性 …………………………………………………… 150
5.6 与子带滤波方法的联系 ……………………………………………… 153

第6章 紧支撑小波的标准正交基 ……………………………………… 163
6.1 m_0 的构造 ………………………………………………………… 163
6.2 与标准正交小波基一致 ……………………………………………… 169
6.3 标准正交的充分必要条件 …………………………………………… 177
6.4 生成正交小波基的紧支撑小波的例子 ……………………………… 188
6.5 级联算法:与重分或精细格式的联系 ……………………………… 197

第7章 紧支撑小波正则性的进一步讨论 ……………………………… 206
7.1 基于傅里叶的方法 …………………………………………………… 206
7.2 直接法 ………………………………………………………………… 221
7.3 具有更高正则性的紧支撑小波 ……………………………………… 231
7.4 正则性或消失矩 ……………………………………………………… 232

第8章 紧支撑正交小波的对称性 ……………………………………… 239
8.1 紧支撑正交小波基缺乏对称性 ……………………………………… 239
8.2 Coiflets ………………………………………………………………… 245
8.3 对称双正交小波基 …………………………………………………… 249

第9章 泛函空间的小波刻划 …………………………………………… 274
9.1 小波:空间 $L^p(\mathbb{R}), 1<p<\infty$ 的无条件基 ……………… 274
9.2 泛函空间特征的小波刻划 …………………………………………… 282
9.3 $L^1[(0,1)]$ 中的小波 ……………………………………………… 288
9.4 小波展开与傅里叶级数的比较 ……………………………………… 291

第 10 章　正交小波基通论及其技巧 …… 295
10.1　伸缩因子为 2 的多维小波基 …… 295
10.2　整数伸缩因子大于 2 的一维标准正交小波基 …… 300
10.3　具有矩阵伸缩因子的多维小波基 …… 302
10.4　具有非整数伸缩因子的一维标准正交小波基 …… 303
10.5　更好的频率分辨:“分裂”方法 …… 307
10.6　小波包基 …… 312
10.7　区间上的小波基 …… 313

参考文献 …… 319

预 备 知 识

本章主要介绍本书中常用的一些符号与规定，以及在以后各章中将用到的一些定理及 Hilbert 空间和 Banach 空间的入门知识。

下面，对一些记号给予说明。当 $x\in\mathbf{R}$ 时，用 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数，即

$$\lfloor x\rfloor = \max\{n\in\mathbf{Z}; n\leqslant x\}$$

例如，$\lfloor 3/2\rfloor=1$，$\lfloor -3/2\rfloor=-2$，$\lfloor -2\rfloor=-2$，类似把 $\lceil x\rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数。

如果 $a\to 0$（或 $a\to\infty$），用 $O(a)$ 表示除以 a 的常数倍后仍保持有界的量，$O(a)$ 则代表除以 a 的常数倍后趋于 0（或无穷）的量。

所有证明过程结束时都用■来标记，面注解和举例的结尾处则标以□的符号。

在许多证明中，常以 C 来表示一般常量，因此在整个过程中，C 可以取不同的值，例如 C, C', C'' 或 C_1, C_2, C_3 等。

设 $f\in L^2(\mathbf{R})$，f 的傅里叶变换为

$$(\mathscr{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{ix\xi}f(x) \tag{0.0.1}$$

它具有下列性质：

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

$$|\hat{f}(\xi)|\leqslant(2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1}$$

其中

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int\mathrm{d}x\,|f(x)|^p\right]^{1/p} \tag{0.0.2}$$

傅里叶逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{j\xi x}(\mathscr{F}f)(\xi) = (\mathscr{F}f)^{\vee}(x)$$

它满足

$$\check{g}(x) = \hat{g}(-x) \tag{0.0.3}$$

严格地说，式(0.0.1)和式(0.0.3)只有当 f 和 $\mathscr{F}f$ 为绝对可积函数时才能成立，而对于其他函数，例如 L^2 函数则需要通过一个极限过程来定义。对于其他一切情

形都应作这样的理解,即式(0.0.1)和式(0.0.3)都是通过极限过程定义的。

傅里叶变换有下列性质

$$\mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\right)f = (i\xi)^l(\mathscr{F}f)(\xi)$$

因此有

$$\int \mathrm{d}x\,|f^{(l)}(x)|^2 < \infty \leftrightarrow \int \mathrm{d}\xi\,|\xi|^{2l}|\hat{f}(\xi)|^2 < \infty$$

其中 $f^{(l)} = \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}f$。

如果函数 f 有紧支撑,即当 $x<a$ 或 $x>b$ 时,$f(x)=0$,其中 $-\infty<a<b<\infty$。则 f 的傅里叶变换 $\hat{f}(\xi)$ 对复变量 ξ 有定义,并且有

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\int_a^b \mathrm{d}x\mathrm{e}^{(\mathrm{Im}\xi)x}|f(x)|$$

$$\leqslant (2\pi)^{-1/2}\|f\|_{L^1}\begin{cases}\mathrm{e}^{b(\mathrm{Im}\xi)} & \text{当 } \mathrm{Im}\xi \geqslant 0\\ \mathrm{e}^{a(\mathrm{Im}\xi)} & \text{当 } \mathrm{Im}\xi \leqslant 0\end{cases}$$

如果 f 还是无限次可微函数,则对 $f^{(l)}$ 作相同的讨论,可以导出 $|\xi|^l|\hat{f}(\xi)|$ 的界,因此对于支集为 $[a,b]$ 的 C^∞ 函数 f 将存在一个常数 C_N 使得它的傅里叶变换的解析延拓满足关系

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}\begin{cases}\mathrm{e}^{b\mathrm{Im}\xi} & \text{当 } \mathrm{Im}\xi \geqslant 0\\ \mathrm{e}^{b\mathrm{Im}\xi} & \text{当 } \mathrm{Im}\xi \leqslant 0\end{cases} \tag{0.0.4}$$

反之,任何一个对所有的 $N\in\mathbb{N}$ 都有(见式 0.0.4)型界的整函数都将是某个有紧支集 $[a,b]$ 的 C^∞ 函数的傅里叶变换的解析延拓。这就是 Paley-Wiener 定理。

有时也会遇到分布的概念,分布是从 $S(\mathbb{R})$(它是由下降速度大于任何负幂函数 $(1+|x|)^{-N}$ 的 C^∞ 函数组成的集合)到复数域 $\mathbb{C}$ 的线性映射 T,并满足对所有的 $m,n\in\mathbb{N}$ 都存在 $C_{n,m}$,当 $f\in S(\mathbb{R})$ 时,有

$$|T(f)| \leqslant C_{n,m}\sup_{x\in\mathbb{R}}|(1+|x|)^n f^{(m)}(x)|$$

将分布的集合记为 $S'(\mathbb{R})$。任何一个有多项式界的函数函数 F,如果用 $F(f)=\int \mathrm{d}x\,\overline{F(x)}f(x)$ 定义其线性映射,则 F 为一个分布。分布的另一个例子是 Dirac 的 δ-函数,$\delta(f)=f(0)$。一个分布 T 称为支撑于 $[a,b]$,如果它对于任何一个支集与 $[a,b]$ 不相交的函数 f 都满足 $T(f)=0$。分布 T 的傅里叶变换 $\mathscr{F}T$ 或 $\hat{T}$ 定义为 $\hat{T}(f)=T(\hat{f})$,分布的 Paley-Wiener 定理可叙述:整函数 $\hat{T}(\xi)$ 是 $S'(\mathbb{R})$ 上的某一个支集为 $[a,b]$ 的分布 T 的傅里叶变换的解析延拓的充要条件是存在一个 $N\in\mathbb{N}$ 及 $C_N>0$,使得

$$|\hat{T}(\xi)| \leqslant C_N(1+|\xi|)^N \begin{cases} e^{b\operatorname{Im}\xi} & \operatorname{Im}\xi \geqslant 0 \\ e^{a\operatorname{Im}\xi} & \operatorname{Im}\xi \leqslant 0 \end{cases}$$

无论是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^n$,我们所用的惟一测度是 Lebesqure 测度。集合 S 的测度记为 $|S|$,特别是 $|[a,b]| = b-a$,$(b>a)$,下面列出将用到的有关测度与积分的一些著名定理。

Fatou 引理 设 $f_n \geqslant 0$, $f_n(x) \to f(x)$ 几乎处处成立(即除去一个零测度集外处处收敛)。则

$$\int dx f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int dx f_n(x)$$

特别地,当上述 limsup 取为有限值时,函数 f 可积。(序列 lim sup 的定义为

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} [\sup\{\alpha_k; k \geqslant n\}]$$

每一个序列,即使它没有极限(例如,$\alpha_n = (-1)^n$)也有 lim sup(可以是∞);一个收敛序列其极限与 lim sup 相同)。 ■

控制收敛定理 设 $f_n(x) \to f(x)$ 几乎处处成立,又对所有的 n 有 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $\int dx g(x) < \infty$,则 f 可积。并且有

$$\int dx f(x) = \lim_{n\to\infty} \int dx f_n(x) \qquad ■$$

Fubini 定理 设 $\int dx [\int dy\, |f(x,y)|] < \infty$,那么

$$\int dx \int dy f(x,y) = \int dx \left[\int dy f(x,y)\right] = \int dy \left[\int dx f(x,y)\right]$$

即积分的次序可以交换。 ■

上述三个定理中的积分区域可以是 $\mathbb{R}$(对 Fubini 定理是 $\mathbb{R}^2$)中的任意可测子集。

当用到 Hilbert 空间时,除特别说明外,常用符号 $\mathbb{H}$ 代表 Hilbert 空间,并遵从数学家的习惯使用对第一变量具有线形性质的标量积$\langle u, v\rangle$

$$\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v\rangle = \lambda_1 \langle u_1, v\rangle + \lambda_2 \langle u_2, v\rangle$$

它还满足性质

$$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$$

其中 $\bar{\alpha}$ 代表 α 的复共轭,同时对任意的 $u \in \mathbb{H}$, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$,因而可将 u 的范数 $\|u\|$ 定义为

$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle \tag{0.0.5}$$

在 Hilbert 空间中,$\|u\| = 0$ 蕴含 $u = 0$。并且在上面所定义的范数 $\|\ \|$ 意义下,一切 Cauchy 序列均在该空间有极限。(即若序列 $u_n \in \mathscr{H}$ 对任给的 $\varepsilon > 0$ 都有 n_0

(依赖于 ε)存在,当 $n,m \geqslant n_0$ 时,$\| u_n - u_m \| < \varepsilon$ 成立,则存在 $u \in \mathscr{H}$,使得 $\lim_{n \to \infty} \| u - u_n \| = 0$)

Hilbert 空间的一个典型例子是 $L^2(\mathbb{R})$空间。在 $L^2(\mathbb{R})$中函数 f 与 g 的标量积定义为

$$\langle f, g \rangle = \int dx f(x) \overline{g(x)}$$

此式的积范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$;为了简单起见,我们在积分通过整个实直线时常不写出积分限。

Hilbert 空间的另一个常见的例子是 $l^2(\mathbb{Z})$,它是由平方和的复数序列构成的集合。它的标量积定义为

$$\langle c, d \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n}$$

同样,当对所有整数求和时,我们也略去上下限。$L^2(\mathbb{R})$与 $l^2(\mathbb{Z})$均为无穷维 Hilber 空间。更简单一些的 Hilbert 空间是有限维 Hilbert 空间。其中 C^k 是最为典型的例子,它的标量积为

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{k} u_j \overline{v_j}$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_k), v = (v_1, \cdots, v_k) \in C^k$。

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 常有正交基,即在 $\mathscr{H}$ 中存在向量族 e_n,满足性质

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$$

而且对每一个元素 $u \in \mathscr{H}$,

$$\| u \|^2 = \sum_n | \langle u, e_n \rangle |^2$$

(在应用中,我们仅考虑可分的 Hilbert 空间,即有可数正交基的 Hilbert 空间。) Hilbert 空间的正交基的例子如 $L^2(\mathbb{R})$中的 Hilbert 函数;$l^2(\mathbb{Z})$空间中由$(e_n)_j = \delta_{n,j}, n, j \in \mathbb{Z}$ 所定义的序列 e_n;以及空间 C^k 中的向量$e_1, \cdots, e_k$,它们由$(e_l)_m = \delta_{l,m}, 1 \leqslant l, m \leqslant k$ 所规定。(其中 δ_{ij}为 Kronecker 符号,当 $i = j$, $\delta_{ij} = 1$;当 $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$)。

Hilbert 空间中的典型不等式为 Cauchy - Schwarz 不等式

$$| \langle v, w \rangle | \leqslant \| v \| \| w \| \tag{0.0.6}$$

对 u 和 w 进行适当的线性组合并运用式(0.0.5)即可证明上述结论。特别地,当 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$时,它表现为下述不等式

$$\left| \int dx f(x) \overline{g(x)} \right| \leqslant \left(\int dx \, | f(x) |^2 \right)^{1/2} \left(\int dx \, | g(x) |^2 \right)^{1/2}$$

当 $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}, d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$,式(0.0.6)即为

$$\sum_n c_n \overline{d_n} \leqslant \left(\sum_n |c_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_n |d_n|^2 \right)^{1/2}$$

式(0.0.6)的另一个推论是

$$\| u \| = \sup_{v, \|v\| \leqslant 1} |\langle u, v \rangle| = \sup_{v, \|v\| = 1} |\langle u, v \rangle| \qquad (0.0.7)$$

Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 的算子是从 $\mathscr{H}$ 到其他 Hilbert 空间的线性映射。显然,如果 A 是 $\mathscr{H}$ 中的算子,那么

$$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2$$

称一个算子 A 是连续的,如果当 $u - v$ 变小时,$Au - Av$ 可以任意小。或者说对任意的 $\varepsilon > 0$,有 $\delta > 0$ 存在,当 $\| u - v \| \leqslant \delta$ 时,恒有 $\| Au - Av \| \leqslant \varepsilon$ 成立。此时若取 $v = 0, \varepsilon = 1$,则可找到 $b > 0$,对任意满足 $\| u \| \leqslant b$ 的 u,均有 $\| Au \| \leqslant 1$。现在对任意的 $w \in \mathscr{H}$,定义 $w' = (b / \| w \|) w$,显然有 $\| w' \| \leqslant b$;从而 $\| Aw \| = (b / \| w \|) \| Aw' \| \leqslant b^{-1} \| w \|$。如果 $\| Aw \| / w$ $(w \neq 0)$ 是有界的,我们就说算子 A 是有界的。从前面的讨论已经看出任意的连续算子 A 都是有界算子,反之也成立。算子 A 的范数可由下式来定义

$$\| A \| = \sup_{u \in \mathscr{H}, u \neq 0} \| Au \| / \| u \| = \sup_{\| u \|} \| Au \| \qquad (0.0.8)$$

从而对于任意的 $u \in \mathscr{H}$,都有

$$\| Au \| \leqslant \| A \| \| u \|$$

从 $\mathscr{H}$ 到 $\mathbb{C}$ 的算子称为"线性泛函"。关于有界线性泛函有如下的 Riesz 表示定理。如果泛函 $l: \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ 是线性且有界的,即对于所有的 $u \in \mathscr{H}$, $|l(u)| \leqslant C \| u \|$,则存在惟一的 $v_l \in \mathscr{H}$,使得 $l\langle u \rangle = \langle u, v_l \rangle$。

从 $\mathscr{H}_1$ 到 $\mathscr{H}_2$ 的算子 U 称为是等距的,若对于任意的 $v, w \in \mathscr{H}_1$ 都有 $\langle Uv, Uw \rangle = \langle v, w \rangle$,如果进一步还成立 $U\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$,即对每一个 $v_2 \in \mathscr{H}_2$,都存在一个 $v_1 \in \mathscr{H}_1$,使 $v_2 = Uv_1$,则称算子 U 是单式的。若 U 是单式算子,e_n 是 $\mathscr{H}_1$ 的正交基,则 Ue_n 也为 $\mathscr{H}_2$ 的正交基。反之,任何一个将正交基映成正交基的算子也必是单式的。

一个集合 $D \subset \mathscr{H}$ 称为在 $\mathscr{H}$ 中稠密(dense),如果每一个 $u \in \mathscr{H}$ 都可以作为 D 中某序列的极限点。(此时也说 $\mathscr{H}$ 是 D 的闭包。一个集合 S 的闭包是 S 本身与所有含于 S 中的序列的极限点所构成的集合)。设若 Av 仅对 $v \in D$ 有定义,但它满足

$$\| Av \| \leqslant C \| v \|, \forall v \in D \qquad (0.0.9)$$

则可利用连续性将 A 的定义域延拓至整个 $\mathscr{H}$ 上。事实上,如果对 $u \in \mathscr{H}$ 存在 $u_n \in D$,使得 $\lim_{n \to \infty} u_n = u$,则 u_n 必是一个 Cauchy 序列,由式(0.0.9),Au_n 也必为 Cauchy 序列,因此它有极限,我们称它为 Au(它不依赖于序列 u_n 的特殊选择)。

此外还可研究无界算子。即算子 A 不存在有限值 C 使对所有的 $u\in\mathscr{H}$, $\|Au\|\leqslant C\|u\|$。无界算子通常仅能定义在一个稠密集 $D\subset\mathscr{H}$ 上,并且不可能用上述方法(因为它不连续)延拓至整个 $\mathscr{H}$。无界算子的一个例子是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$,此时可取 $D=C_0^\infty(\mathbb{R})$,它是由具紧支集的无穷次可微函数组成的集合。人们把定义算子的稠密集称为它的定义域。

从一个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 到另一个 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_2$ 的有界算子 A 的共轭(adjoint)算子 A^* 是从 $\mathscr{H}_2$ 到 $\mathscr{H}_1$ 的一个算子,定义为

$$\langle u_1, A^* u_2\rangle = \langle Au_1, u_2\rangle$$

其中 $u_1\in\mathscr{H}_1, u_2\in\mathscr{H}_2$,($A^*$ 的存在性可由 Riesz 表示定理得到保证:对给定的 u_2 我们可以定义 $\mathscr{H}_1$ 上的一个线性泛函 $l(u_1)=\langle Au_1, u_2\rangle$。显然它有界并且可以对应于一个满足 $\langle u_1, v\rangle=l(u_1)$ 的向量 v,易知对应关系 $u_2\rightarrow v$ 是性线的,它定义了算子 A^*)。共轭算子 A^* 有下列性质

$$\|A^*\| = \|A\|, \|A^*A\| = \|A\|^2$$

如果 $A^*=A$(仅当 A 映 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}$ 本身时才有可能),则称 A 是自共轭的;如果自共轭算子 A 满足对所有的 $u\in\mathscr{H}$, $\langle Au, u\rangle\geqslant 0$,则称其为正算子,记作 $A\geqslant 0$;如果 $A-B$ 是正算子,则写作 $A\geqslant B$。

迹类(trace-class)算子 A 是一种特殊算子,对于 $\mathscr{H}$ 中的正交基 e_n,它使和式 $\sum_n\langle Ae_n, e_n\rangle$ 取有限值,而且此有限值与正交基的特殊选择无关,我们称该和值为 A 的迹(trace)

$$\mathrm{tr}A = \sum_n\langle Ae_n, e_n\rangle$$

如果 A 是正算子,它是否还是迹算子的问题,只需检查 $\sum_n\langle Ae_n, e_n\rangle$ 对某一个正交基取有限值就可以了(这一结论对非正算子不成立)。

从 $\mathscr{H}$ 到其自身的一个算子 A 的谱 $\sigma(A)$ 是由使算子 $A-\lambda\mathrm{Id}$(Id 为恒等算子 $\mathrm{Id}u=u$)没有有界逆的 $\lambda\in\mathbb{C}$ 构成的集合。在有限维 Hilbert 空间中,$\sigma(A)$ 由 A 的特征值构成。而在无穷维空间中,$\sigma(A)$ 不仅包含有了所有特征值(组成 A 的点谱),而且也常常包含构成 A 的连续谱的那些 λ(例如:在 $L^2(\mathbb{R})$ 中,$f(x)$ 与 $\sin\pi x$ 的乘积没有点谱,其连续谱是 $[-1,1]$),自共轭算子的谱仅由实数构成。正算子的谱仅含非负数。谱半径 $\rho(A)$ 定义为

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda|; \lambda\in\sigma(A)\}$$

并且有如下特性

$$\rho(A)\leqslant\|A\| \text{ 且 } \rho(A) = \lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$$

自共轭算子可以对角化。假定它的谱只含有特征值,这件事是很好理解的(与有限维一样)。这时

$$\sigma(A) = \{\lambda_n, n \in N\}$$

它所对应的正交特征向量族为 e_n，满足

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

于是对于所有的 $u \in H$

$$Au = \sum_n \langle Au, e_n \rangle e_n = \sum_n \langle u, Ae_n \rangle e_n = \sum_{\lambda_n} \lambda_n \langle u, e_n \rangle e_n$$

这就是 A 的对角化表示，如果两个算子可交换，即对于所有的 $u \in \mathscr{H}$，$ABu = BAu$ 那么它们可以同时对角化，即存在着如下的正交基 e_n

$$Ae_n = \alpha_n e_n, Be_n = \beta_n e_n$$

有界算子的许多特性也适用于无界算子，例如，无界算子也同样有共轭算子、谱及对角化等性质，但在定义域方面应特别小心。例如对于可交换算子同时对角化的性质推广到无界算子时就应特别注意它的定义域：事实上，存在着这样的病态例子，其中算子 A 与 B 都定义于区域 D 上，AB 与 BA 也都在 D 上有定义且相等，但 A 与 B 却不可能同时对角化(因为 D 选得“太小”的缘故。例如看 Reed 和 Simon(1971)的例子)。无界自共轭算子可交换的较为合适的定义办法是使用与之相联系的有界算子：Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 称为是可交换的，如果与它们相联系的单式卷积(unileny, evoltion)算子可交换，与自共轭算子 $\mathscr{H}$ 相联系的单式卷积算子 U_t 定义如下：对任意 $v \in D$，设 D 为 $\mathscr{H}$ 的定义域(注意，自共轭算子的定义域不一定正好是使 $\mathscr{H}$ 有定义的稠密集)，$U_T v$ 是微分方程初值问题

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = Hv(t), v(0) = v$$

在 $t = T$ 的解。

Banach 空间不仅具有 Hilbert 空间的许多性质，而且还具有比它更为广泛的空间。Banach 空间是赋以范数(该范数不必而且一般也不是从某一内积导出的)并对于该范数完备(即所有的 Cauchy 序列都收敛)的线性空间。前面对 Hilbert 空间所描述过的一些性质，如有界算子、线性泛函、谱及谱半径等也存在于 Banach 空间之中。一个是 Banach 空间而不是 Hilbert 空间的例子是 $L^p(\mathbb{R})$，其中 $1 \leqslant p < \infty$，$p \neq 2$。它们是 $\mathbb{R}$ 上使 $\|f\|_{L^p}$(见式(0.0.2))取有限值的函数 f 的集合；另一个是 $L^\infty(\mathbb{R})$，它是由 $\mathbb{R}$ 上的有界函数组成并赋以范数 $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ 后形成的空间。Banach 空间 E 的对偶空间 E^* 是由 E 上的所有有界线性泛函组成的集合，它也是一个线性空间并有自然范数(定义见式(0.0.7))而且对于该范数完备，因此 E^* 本身也是一个 Banach 空间。在 $L^p(\mathbb{R})$，$1 \leqslant p < \infty$ 的情形，可以证明 $L^q(\mathbb{R})$(其中 p 与 q 满足关系 $p^{-1} + q^{-1} = 1$)中的函数即确定了 L^p 上的一个有界线性泛函，由 Hölder 不等式

$$\left|\int dx f(x)\overline{g(x)}\right| \leqslant \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$$

可以证明 L^P 的所有界线性泛函都属于这种类型,故$(L^P)^* = L^q$。再由 Riesz 表示定理,每个 Hilbert 空间都是自对偶空间,因此 $L^2(\mathbb{R})$也是自对偶的。通过上面的讨论可以看出:由 E_1 到 E_2 的算子 A 的共轭算子A^*应该是从 E_2^* 到 E_1^* 的一个算子,其定义是

$$(A^* l_2)(v_1) = l_2(Av_1)$$

在一个 Banach 空间中存在着各种不同类型的基(我们仍然只考虑可分空间,它的基是可数的)。称 e_n 为E 的一个 Schauder 基,如果对所有的 $v \in E$,存在惟一的 $\mu_n \in C$,使得 $v = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_n e_n$,对 μ_n 的惟一性要求将迫使e_n必须是线性独立的,这里的线性独立的意思是指没有任何一个 e_n 能够是其他元素线性展开的闭包,即不存在 γ_m,使得 $e_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{N} \gamma_m e_m$,在 Schauder 基中 e_n 的排列顺序可能是重要的。一个基称为是无条件基,如果它还满足下列两个等价性质之一

- 当 $\sum_n \mu_n e_n \in E$ 时,$\sum_n |\mu_n| e_n \in E$;
- 设 $\sum_n^n \mu_n e_n \in E$,又 $\epsilon_n = \pm 1$,对每个 n 随机选择,则$\sum_n \mu_n \epsilon_n e_n \in E$。

对于无条件基,基元所取之顺序是无关紧要的。但不是所有的 Banach 空间都有无条件基。例如 $L^1(\mathbb{R})$和 $L^\infty(\mathbb{R})$就没有。

在 Hilbert 空间中无条件基也称为 Riesz 基。Riesz 基也可叙述成为下面的等价形式,存在 $\alpha > 0, \beta < \infty$使得对所有的 $u \in \mathscr{H}$

$$\alpha \| u \|^2 \leqslant \sum_n |\langle u, e_n \rangle|^2 \leqslant \beta \| u \|^2 \qquad (0.0.10)$$

如果 A 是一个有有界逆的有界算子,则 A 将任何一个正交基映成 Riesz 基。不但如此,Hilbert 空间所有的 Riesz 基均可以由正交基通过这种映射而得到。在一定意义上说,Riesz 基是比正交基稍弱一些的最好的基。应当注意的是不等式(0.0.10)还不保证 e_n 构成 Riesz 基,为保证 e_n 构成 Riesz 基,除条件式(0.0.10)外还需要 e_n 是线性独立的。

第 1 章　什么是小波

小波变换是一种工具，它把数据、函数或算子分割成不同频率的成分，然后再用分解的方法去研究对应尺度下的成分。这项技术的早期工作是分别在各个不同的研究领域独立作出的：如纯数学中从事调和分析研究的 Caldenon(1964)的原子分解；物理学界从事量子力学研究的 AslaKsen 和 Klander(1968)所构造的($ax+b$)一群的相干态，还有研究氢原子汉密尔顿函数的 Paul(1985)；工程界如 Esteban 和 Galand 对 QMF 滤波器的设计(1977)，随后 Smith 和 Barnwell(1986) Vetterli (1986)在电机工程中又研究出了具有严格重构特性的 QMF 滤波器，J. Morlet (1983)在地震数据分析中正式提出了小波的概念。近五年来，人们将上述各领域所作的工作进行了综合，使其成为一种能够适用于各个领域的不失一般性的方法。

让我们暂且在信号分析范围内就小波方法进行讨论。信号在时域中的小波变换(例如，声音施加于耳膜上的压力的振幅)取决于两个参量：尺度(或频率)及时间；小波变换是一种时频局部化或称为时频定位的工具。本书第 1 章将讲述时频定位的意义及其引起人们极大兴趣的原因，其后将对不同模型的小波进行描述。

1.1　时—频定位(局部化)

在许多应用领域，对于给定信号 $f(t)$，人们感兴趣的是信号在特定时间的频率成分，就像在音乐演奏中，演奏者需要知道在什么时候演奏什么音调一样。标准傅里叶变换

$$(\mathscr{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}t \cdot e^{-i\omega t} f(t)$$

虽然也可以表示 f 的各频率成分，但有关时—频定位信息，如高频冲击发生的时刻却难以从 f 的傅里叶变换式中获得。将 f 窗口化进行傅里叶变换

$$(T^{\mathrm{win}}f)(\omega,t) = \int \mathrm{d}s f(s) g(s-t) \mathrm{e}^{-i\omega s} \tag{1.1.1}$$

可以获得时间局部化的信息，此式称为加窗傅里叶变换，它是进行时—频定位的一种标准方法。在对离散信号分析中，人们对它可能更加熟悉，设 $t = nt_0, \omega = m\omega_0$ 为寻分值，其中 m, n 属于 $\mathbf{Z}$，并且 $\omega_0, t > 0$，这样式(1.1.1)变为如下形式

$$T^{\mathrm{win}}_{m,n}(f) = \int \mathrm{d}s f(s) g(s-nt_0) \mathrm{e}^{-im\omega_0 s} \tag{1.1.2}$$

图 1.1 刻划了这一过程,设 n 为定值,$T^{\text{win}}_{m,n}(f)$即为 $f(\cdot)g(\cdot-nt_0)$的傅里叶变换系数。如果 g 是紧支撑的,适当地选择 ω_0,傅里叶变换系数 $T^{\text{win}}_{m,n}(f)$是可以充分表征 $f(\cdot)g(\cdot-nt_0)$的,并且如果需要还可以对 $f(\cdot)g(\cdot-nt_0)$进行重构。改变 n 的值,窗口以 t_0 为步长而移动,最终可由 $T^{\text{win}}_{m,n}(f)$获得全部 f,对此问题将在第 3 章中从数学的角度再来仔细讨论。在信号处理中,对于窗函数 g 人们提出了许多可行方案,最常用的是有紧支撑的适度光滑函数;在物理学中,式(1.1.1)与相干态表示相关,$g^{\omega,t}(s)=e^{i\omega s}g(s-t)$是与 Weyl - Heisenberg—群组相关的相干态(例如,可参看 Klauder 和 Skagerstam(1985))。从这个角度出发,窗函数 g 通常被选为高斯函数。在所有的应用领域,g 都应具有良好的时—频特性,如果 g 和 $\hat{g}$ 均集中在零点附近,那么$(T^{\text{win}}f)(\omega,t)$将很好地显示出 f 在 t 和 ω 附近成分,因此加窗傅里叶变换可以在整个时频平面上描述信号。

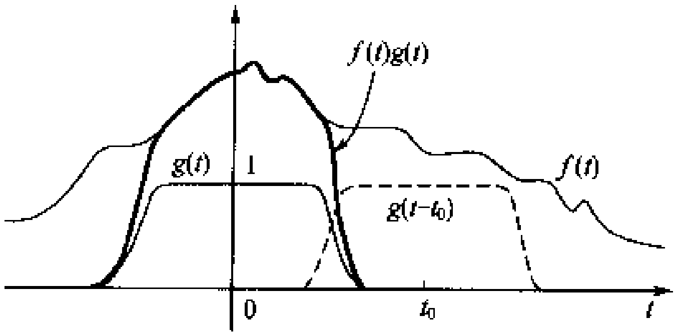


图 1.1 加窗傅里叶变换:函数 $f(t)$与窗函数 $g(t)$相乘,乘积的傅里叶变换系数已由计算得出,这一过程可以通过平移视窗反复进行,$g(t-t_0)$,$g(t-2t_0)$……

1.2 小波变换:小波变换与加窗傅里叶变换的相似与不同

小波变换是一种与加窗傅里叶变换相类似的时—频描述方法,但它与加窗傅里叶变换又有几点重要的不同之处。类似于式(1.1.1)和式(1.1.2)的小波变换表达式如下:

$$(T^{\text{wav}}f)(a,b)=|a|^{-1/2}\int dt f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{1.2.1}$$

$$T^{\text{wav}}_{m,n}(f)=a_0^{-m/2}\int dt f(t)\psi(a_0^{-m}t-nb_0) \tag{1.2.2}$$

在上述两式中均假设

$$\int dt\psi(t)=0 \tag{1.2.3}$$

表达式(1.2.2)是将式(1.2.1)中的 a,b 离散化后获得的,其中 $a=a_0^m$,$b=nb_0a_0^m$,$m,n\in\mathbb{Z}$ 并且 $a_0>1$,$b_0>0$。小波变换与加窗傅里叶变换的相似之处是

很显然的：表达式(1.1.1)和式(1.2.1)均使用了 f 与双指标函数族的内积表达式，这类双指标函数族在式(1.1.1)中的表达式是 $g^{\omega,t}(s)=e^{i\omega s}g(s-t)$，而在式(1.2.1)中，其表达式则是 $\psi^{a,b}(s)=|a|^{-1/2}\psi(\frac{s-b}{a})$。函数 $\psi^{a,b}$ 被称为小波，有时还把 ψ 称为母小波(注意：此处的 ψ 与 g 都隐含假设为实函数，如果情况并非如此，那么将要在式(1.1.1)和式(1.2.1)中引入共轭复函数)。小波函数中，最典型的例子是 $\psi(t)=(1-t^2)\exp(-t^2/2)$，其次为高斯函数，前者称为 Mexicanl(墨西哥)帽状函数，因为它的形状酷似墨西哥草帽，墨西哥帽状函数在时—频两域都具有良好的局部化特性，并满足式(1.2.3)所要求的条件。当 a 变化时，$\psi^{a,0}(s)=|a|^{-1/2}\psi(s/a)$ 将覆盖不同的频率范围(尺度参数 $|a|$ 的大值对应于低频或大尺度的 $\psi^{a,0}$；而 $|a|$ 的小值则对应于高频或小尺度的 $\psi^{a,0}$)，改变参数 b 相当于移动时窗中心，每一个 $\psi^{a,b}(s)$ 都被定位在 $s=b$ 附近，这种情况与式(1.1.1)和式(1.2.1)对 f 的时—频刻划方式相似。小波变换与加窗傅里叶变换的不同之处表现在 $g^{\omega,t}$ 与 $\psi^{a,b}$ 的形态之中，如图 1.2 所示。函数 $g^{\omega,t}$ 是由同一个包络函数 g 平移到某个时间

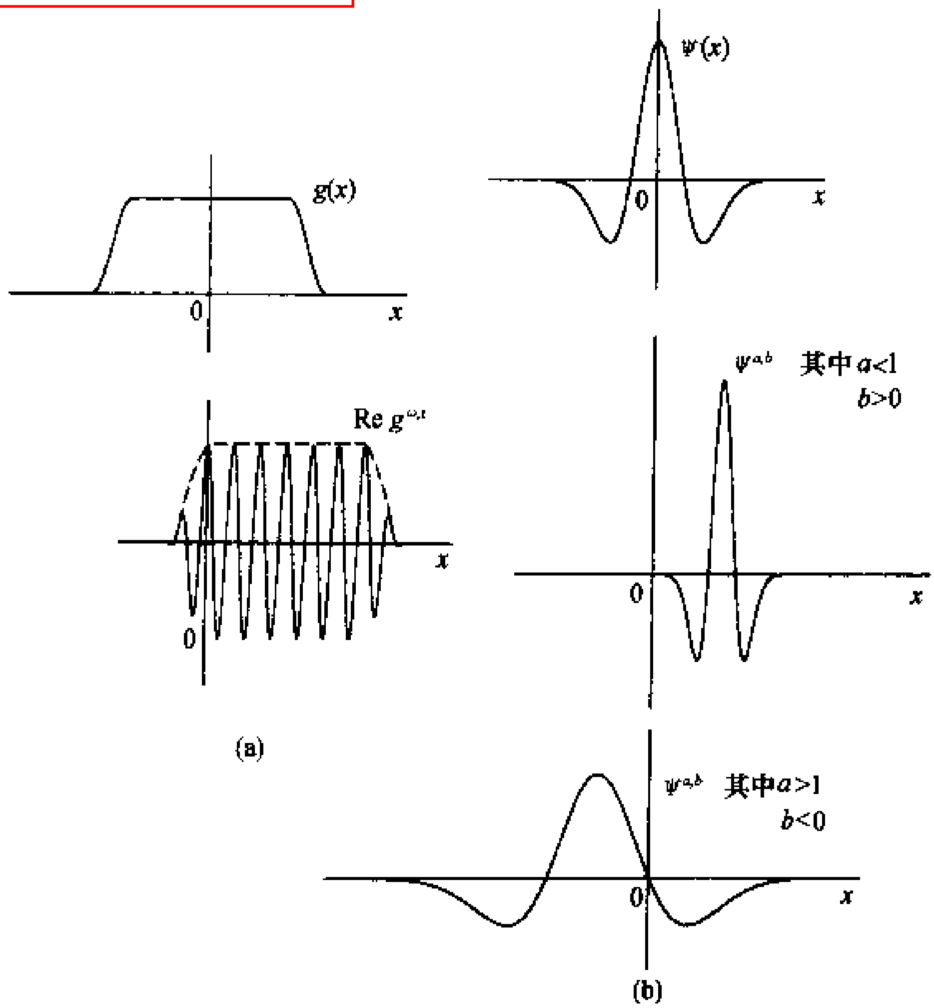


图 1.2 (a)窗口傅里叶变换函数 $g^{\omega,t}$；(b)小波 $\psi^{a,b}$，$g^{\omega,t}(x)=e^{-i\omega x}g(x-t)$，可视为包络在 g 中的高频信号的平移，$\psi^{a,b}(x)$ 为同一函数 ψ 伸缩及平移的结果

位置上并在时窗内填入高频的振荡信号的结果。整个 $g^{\omega,t}$ 无论 ω 的值如何变化均具有相同的窗宽。与此相对地，$\psi^{a,b}$ 则具有适应频率变化的可变窗宽，高频时 $\psi^{a,b}$ 的时窗宽较窄，低频时则时窗较宽，其结果是小波变换较之加窗傅里叶变换对短时高频现象如信号传输(或函数或积分核中的奇异性)有更好的"显微"效果。

图 1.3 展示了以上的讨论，它是函数

$$f(t) = \sin(2\pi v_1 t) + \sin(2\pi v_2 t) + \gamma[\delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)]$$

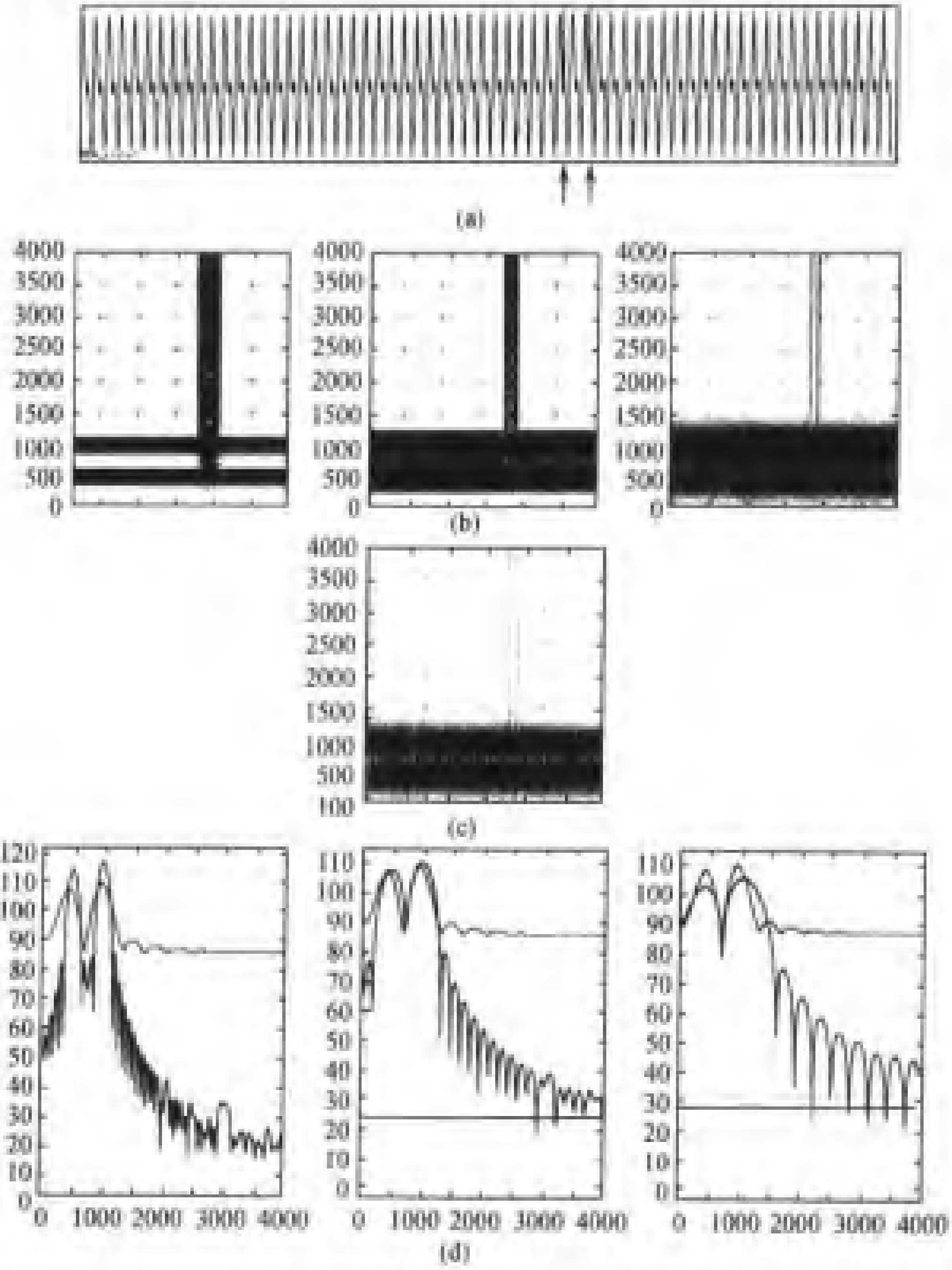


图 1.3 (a)信号 $f(t)$；(b)三种不同窗宽的加窗傅里叶变换，在所谓的频谱图中只画了 $|T^{win}(f)|$，在横坐标为 t，纵坐标为 ω 的平面上用灰度来表示频谱(黑色为最大值，白色为零值，中间色度与 $\lg|T^{win}(f)|$ 成正比)；(c) f 的小波变换，为了与(b)相比较，我们也同样用灰度的方法画出了 $|T^{win}(f)|$ 的频谱图，频率轴为线性坐标；(d)三种频谱图及小波变换的比较

的加窗傅里叶变换及小波变换。实际信号往往不是以连续形式给出的，而是经过采样获得的，相当于在采样点有一个冲击函数 δ，其样本值近似于原信号，因此从采样角度出发得到下式

$$f(n\tau) = \sin(2\pi v_1 n\tau) + \sin(2\pi v_2 n\tau) + \alpha\left[\delta_{n,n_1} + \delta_{n,n_2}\right]$$

在图 1.3(a)中，$v_1 = 500\text{Hz}$，$v_2 = 1\text{kHz}$，$\tau = 1/8000\text{s}$，$\alpha = 1.5$，$n_2 - n_1 = 32$。图1.3(b)中的三个频谱图均使用了标准的 Hamming 窗来表示加窗傅里叶变换的情形，窗宽分别为 12.8ms，6.4ms 和 3.2ms(图中横轴为时间，纵轴为频率；灰度表示了 $|T^{\text{win}}(f)|$ 的值，黑色为最大值)，当窗宽增加时，两个正弦波的分辨度较好，但两个脉冲却变得难以辨识。图 1.3(c)刻划了信号经过 Morlet 小波变换后的情形，它的 $\psi(t) = Ce^{-t^2\alpha^2}(e^{i\pi t} - e^{-\pi^2\alpha^2/4})$，$\alpha = 4$(为了易于与频谱图进行比较，图中的频率轴采用了线性坐标，对于一般的小波变换对数频率坐标用的更普遍)。从图中可以看出，两个脉冲的分辨度要比图 1.3(b)右图中使用 3.2ms Hamming 窗的情况好得多，同时两个正弦波的频率分辨率也与图 1.3(b)中 6.4ms Hamming 窗的结果相当。频率的分辨度在图 1.3(d)中刻划得更加清楚。它可以对谱图的任一断而进行比较(在 t 固定时对窗口傅里叶变换模 $|(T^{\text{win}}f)(\cdot,t)|$ 进行比较，在 b 固定时，对小波变换模 $|(T^{\text{wav}}f)(\cdot,b)|$ 进行比较)。小波变换的动态范围(在两峰之间的峰谷比)与 6.4ms 频谱图相当。

事实上，人耳在最初识别声音时已经使用了小波变换。振动波从耳鼓传到耳膜在整个耳蜗中延伸，其过程是以螺旋方式进入进入耳内的，设想如果不以这种螺旋方式而直接进入耳中，那么耳频就会胀起。我们引入坐标 y 来表示这个延伸过程，实验以及数字仿真表明压力波是正弦的：$f_\omega(t) = e^{i\omega t}$，激励在耳膜引起的响应在时域内是同频率的。但在 y 上是处于包络之中的：$F_\omega(t,y) = e^{i\omega t}\phi_\omega(y)$。在第一个近似中，假设频率 ω 在 500Hz 以上都很好，$\phi_\omega(y)$ 随 ω 的变化用平移量 $\lg\omega$ 表示，即存在着一个函数 ϕ，使得 $\phi_\omega(y)$ 与 $\phi(y - \lg\omega)$ 十分接近。对于常见的激励函数 $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}$，相应的响应为 $F(t,y)$，其表达式由基本响应函数相应的叠加表示为

$$\begin{aligned} F(t,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega \hat{f}(\omega)F_\omega(t,y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\phi(y - \lg\omega) \end{aligned}$$

如果我们引入一个可变参数，设

$$\hat{\psi}(e^{-x}) = (2\pi)^{-1/2}\cdot\phi(x),\quad G(a,t) = F(t,\lg a)$$

则

$$G(a,t)=\int \mathrm{d}t' f(t')\psi(a(t-t'))$$

经过归一化后就是一个严格的小波变换。在 ϕ_ω 中是以频率的对数平移量而变化的，因此也找到了膨胀参数。在生物声学过程中所发生的这种小波变换说明：在声学分析中小波基的方法比其他方法更可取，因为它的压缩形式没有被我们的耳朵察觉。

1.3 不同类型的小波变换

小波变换有很多种形式，所有形式都来源于基本公式(1.2.1)和式(1.2.2)，在此区分如下：

A. 连续小波变换(见式 1.2.1)；

B. 离散小波变换(见式 1.2.2)；

在离散小波变换中我们进一步作如下定义：

B_1. 有冗余的离散系统(框架)；

B_2. 正交小波基及其他小波基。

1.3.1 连续小波变换

此处的尺度参数 a 和平移参数 b 是在 $\mathbb{R}$ 中连续变化的(但限制 $a\neq 0$)，其小波变换表达式由式(1.2.1)给出。利用下述反变换公式，经过"单位分解"方法可以由小波变换对函数进行重构

$$f=C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}\langle f,\psi^{a,b}\rangle\psi^{a,b} \tag{1.3.1}$$

其中 $\psi^{a,b}(x)=|a|^{1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$，$\langle,\rangle$表示 L^2 中的内积，常量 C_ψ 的值取决于 ψ 并可由下式给出

$$C_\psi=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,|\hat{\psi}(\xi)|^2|\xi|^{-1} \tag{1.3.2}$$

假设 $C_\psi<\infty$，否则，式(1.3.1)无意义。如果 ψ 是 $L^1(\mathbb{R})$内的函数，那么 $\hat{\psi}$ 就是连续的，从而 C_ψ 取有限值只有在 $\hat{\psi}(0)=0$ 时才能成立，即 $\int \mathrm{d}x\psi)(x)=0$。有关式(1.3.1)的证明将在第 2 章中给出(这里隐含着假定 ψ 是实函数。如果 ψ 是复值的，则在式(1.2.1)中应当用 $\bar{\psi}$ 代替 ψ，在某些应用中，复值 ψ 是有用的)。

表达式(1.3.1)可以从两个角度去看：(1)当 f 的小波变换 $T^{\mathrm{wav}}f$ 已知时，可以视为重构 f 的一种方法；(2)也可看成是将 f 写成小波 $\psi^{a,b}$的叠加形式。上述两种观点均具有实用价值。

$f(x)\to(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)$的对应是一种通过双变量函数表示单变量函数的关

系，通过它可以建立起大量的关系式(见第2章)。并且这一表示中的冗余性也可以加以利用。其中一个成功的范例是由连续小波变换得到的信号的骨架(skeleton)概念，它被应用于非线性滤波器中。

1.3.2 离散但有冗余的小波变换框架

本节中的尺度因子 a 和平移因子均为离散值，对于某一确定的尺度因子 $a_0>1$ 我们选择它的整数次幂，即 $a=a_0^m$，在图1.2中已经说明，不同的 m 值对应于不同时窗宽度的小波，因此平移参数 b 的离散化也取决于参数 m，窄带(高频)小波变换对应于小步长，以便子可以覆盖整个时间范围，而宽带小波(低频)对应的长则较大，因为 $\psi(a_0^m x)$ 的宽度与 a_0^m 成正比，选择离散值 $b=nb_0a_0^m$，其中 b_0 为定值 $b_0>0, n\in\mathbb{Z}$，相应的离散小波变换如下

$$\begin{aligned}\psi_{m,n}(x) &= a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}(x-nb_0a_0^m)) \\ &= a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x-nb_0) \qquad (1.3.3)\end{aligned}$$

图1.4(a)给出了对应于 $\psi_{m,n}$ 的时—频定位中心的格点，对于给定函数 f，由式(1.2.2)定义的小波变换 $T_{m,n}^{\text{wav}}(f)$，由 $\langle f,\psi_{m,n}\rangle$ 的内积准确地给出。

图1.4(a)给出了对应于 $\psi_{m,n}$ 的时—频定位中心的格点，对于给定函数 f，由式(1.2.2)定义的小波变换 $T_{m,n}^{\text{wav}}(f)$，由 $\langle f,\psi_{m,n}\rangle$ 的内积准确地给出。

在离散情况下，不再有像连续变换式(1.3.1)类似的"恒等分解"性质。由 $T^{\text{mav}}(f)$ 对 f 进行重构必须采用其他方法，因此自然地产生了下列问题：

(1) 在已知 $T^{\text{wav}}(f)$ 的情况下，是否能够由它完全地表征函数 f?

(2) 是否可以由 $T^{\text{wav}}(f)$ 以稳定的散值方式重构 f?

这些涉及到从小波变换再现函数 f 的可能性问题，它可以表述为以下的对偶形式：

(1') 任意一个函数可否写成为 $\psi_{m,n}$ 的叠加?

(2') 是否存在数值稳定算法以计算出上述展开式之系数?

第3章将着重讨论这些问题。正如在连续情况一样，离散小波变换对于原函数通常是有冗余的。这种冗余是可以被利用(例如它可能用来近似地计算小波变换，而仍可以高精度地重建 f)，或者被消除，在这种离散形式下，小波变换最接近Frazier和Jawerth(1988)的"ϕ-变换"。

在连续小波变换或是在小波族的框架中，小波 ψ 的选择必须按式(1.3.2)严格要求 C_ψ 是有限的。从实际角度出发，ψ 的选择是为了使其在时域和频域都具有良好的局部化特性，尽管如此选择还是有很大自由度的。在下一部分我们将看看怎样放弃这种自由去建立正交小波。

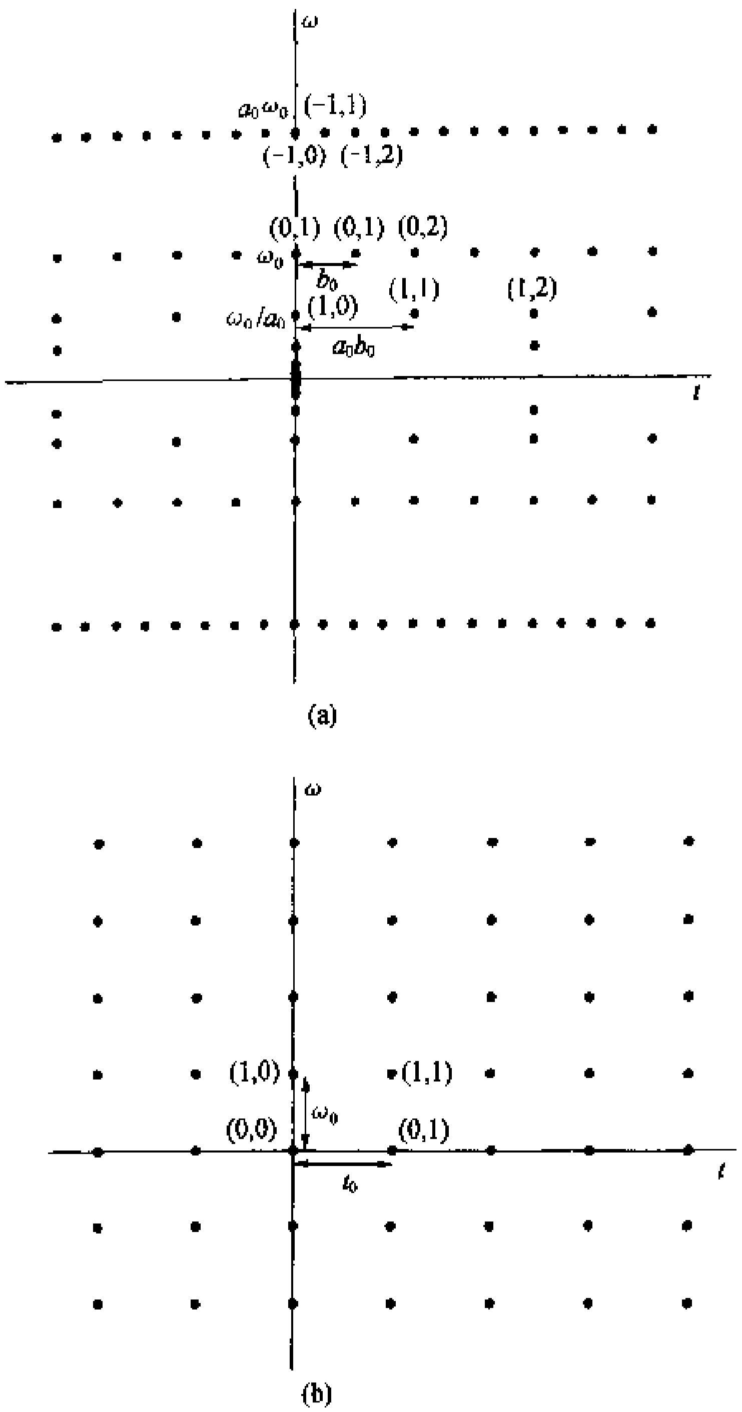


图 1.4　小波变换与窗口傅里叶变换的时—频中心格阵(a)
小波变换：$\psi_{m,n}$在时域以 $a_0^m nb_0$ 为中心而定位，
如果$|\hat{\psi}|$在频域内在 $at \pm \xi_0$ 取得双峰
(例如墨西哥帽状函数 $\psi(t)=(1-t^2)e^{-t^2/2}$)，则$|\hat{\psi}(\xi)|$
将在 $at \pm a_0^m \xi_0$ 产生双峰，$at \pm a_0^m \xi_0$ 即为 $\psi_{m,n}$在频域的两个定位中心；
(b)窗口傅里叶变换：$g_{m,n}$在时域围绕 nt_0 定位，在频域则以 $m\omega_0$ 为中心而定位

1.3.3 正交小波基:多分辨分析

对于小波函数 ψ 和 a_0, b_0 作某些特殊的选择,则 $\psi_{m,n}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中可以构成正交基。如果选择,$a_0=2, b_0=1$,① 那么就可以得到一个时频定位特性良好的 ψ,并使

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x - n) \tag{1.3.4}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中构成正交基(从现在开始直到第十章末均限于取 $a_0=2$)。最早的这种函数的例子是 Haar 函数

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

由 Haar 函数构成的函数系 $\psi_{m,n}(x)$ 将构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基 。Haar 基由 Haar (1910)的工作而著名。但 Haar 函数并不具备良好的时频局部化特性,它的傅里叶变换 $\hat{\psi}(\xi)$ 当 $\xi \to \infty$ 时仅具有 $|\xi|^{-1}$ 的衰减速度,在此我们只是用它来说明问题。接下来证明 Haar 小波确实构成正交基,证明的方法不同于传统的方法,而是以多分辨分析作为工具来进行。

要想证明 $\psi_{m,n}(x)$ 能构成正交基,以下两点必须成立:

(1) $\psi_{m,n}$ 是正交的。

(2) L^2 空间中的任一函数都可以由 $\psi_{m,n}$ 的有限线性组合逼近到任意精度。

正交性是很容易建立的。因为 $\text{support}(\psi_{m,n}) = [2^m n, 2^m(n+1)]$,同一尺度下的两个 Haar 小波是决不会重叠的,于是 $(\psi_{m,n}, \psi_{m,n}) = \delta_{n,n}$。但如果两个小波具有不同的尺度,支集是可能重叠的,正如在图 1.5 中所见到的那样。很容易验证,如果 $m < m'$,支集$(\psi_{m,n})$将整个处于 $\psi_{m',n'}$ 为常值的某一区域内,则 $\psi_{m,n}$ 与 $\psi_{m',n'}$ 的内积正比于 ψ 的积分,其值为零。

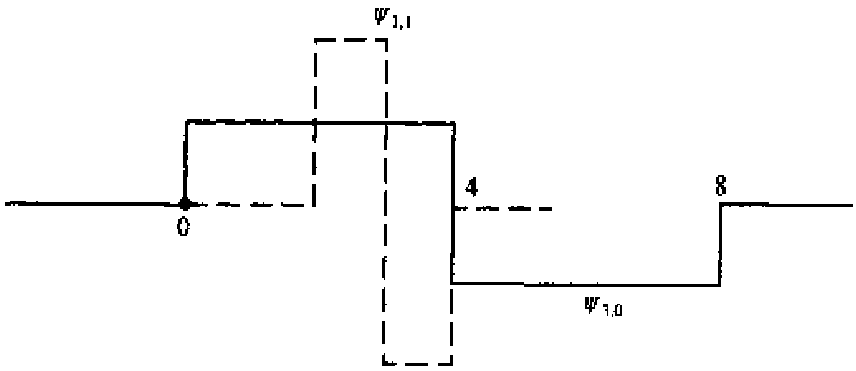


图 1.5 两个 Haar 小波:较窄的小波支集完全含于较宽的小波的一个区间中,在此区间上,较宽小波取常值

① 见本章末注 2。

现在集中来看一个任意函数 f 如何能用 Haar 小波的有限线性组合来逼近。任何一个函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 是可以用具有紧支集且在区间 $[l2^{-j},(l+1)2^{-j}]$ 上取常值的分段常值函数任意逼近的(仅需让支集与 j 足够大就可以了)。因此不妨假设 f 本身就是支集为 $[-2^{J_1},2^{J_1}]$，且在 $[l2^{-J_0},(l+1)2^{J_0}]$ 上取常值的分段常值函数，其中 J_1 与 J_0 可以任意大(见图 1.6)。我们记 $f^0 = f$ 在区间 $[l2^{-J_0},(l+1)2^{-J_0}]$ 上的常数值为 f_l^0。这样 f^0 就可用和式表示为 $f^0 = f^1 + \delta^1$，此处的 f^1 是 f^0 的一个逼近，它在原区间两倍大的区间上是分段常值的，即 $f^1|_{[k2^{-J_0+1},(k+1)2^{-J_0+1}]} \equiv$ 常值 $\equiv f_k^1$，f_k^1，是 f^0 的两个对应常数值的平均值，$f_k^1 = \frac{1}{2}(f_{2k}^0 + f_{2k+1}^0)$(见图 1.6)。

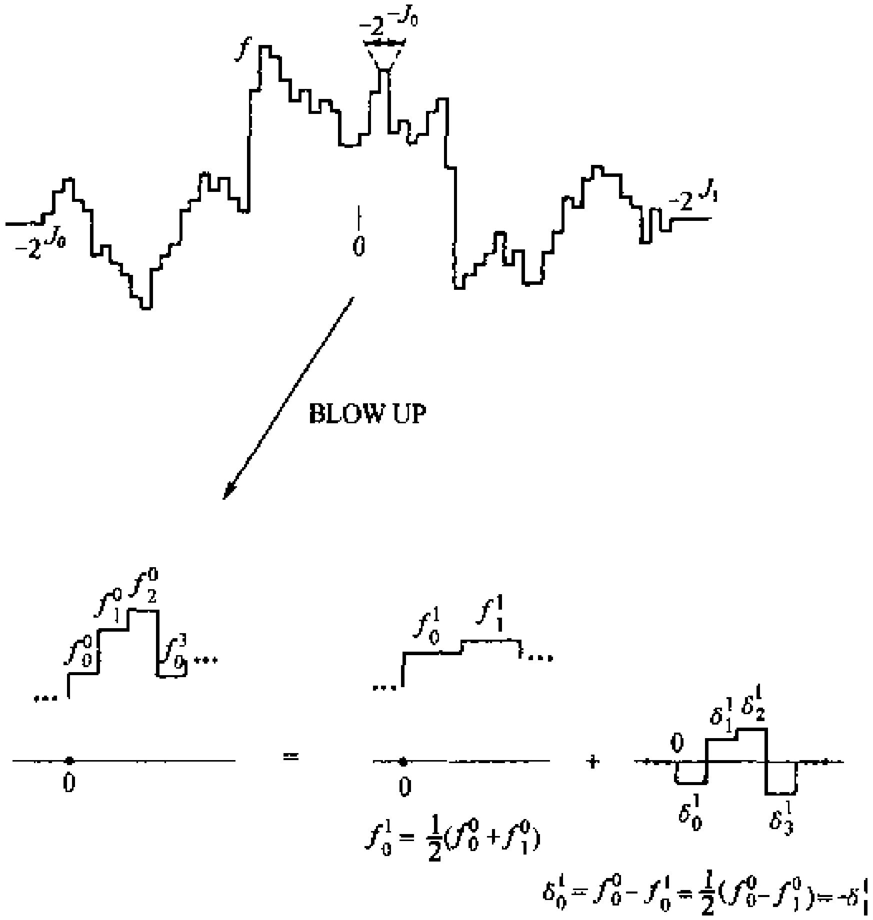


图 1.6 (a)支撑为 $|-2^{J_1},2^{J_1}|$，在 $|k2^{-J_0},(k+1)2^{-J_0}|$ 内为分段常值的函数 f；(b)经过部分放大后的 f。每对 f 值用其均值 f' 代替，f 与 f' 之差用 δ' 表示，成为 Haar 小波的线性组合。

函数 δ^1 也为分段常值，它与 f^0 等步长，因而有下式

$$\delta_{2l}^1 = f_{2l}^0 - f_l^1 = \frac{1}{2}(f_{2l}^0 - f_{2l+1}^0)$$

$$\delta_{2l+1}^1 = f_{2l+1}^0 - f_l^1 = \frac{1}{2}(f_{2l+1}^0 - f_{2l}^0) = \delta_{2l}^1$$

δ^1 便成为经过尺度划分和平移的 Haar 函数的线性组合

$$\delta^1 = \sum_{l=-2^{J_1+J_0-1}+1}^{2^{J_1+J_0+1}} \delta^1_{2l}\psi(2^{J_0-1}x - l)$$

因而可以把 f 写成

$$f = f^0 = f^1 + \sum_l c_{-J_0+1,l}\psi_{-J_0+1,l}$$

其中 f^1 与 f^0 同型，只是步长增大了两倍。运用同样的技巧可分解 f^1 如下

$$f^1 = f^2 + \sum_l c_{-J_0+1,l}\psi_{-J_0+1,l}$$

f^2 依然支撑在$[-2^{J_1},2^{J_1}]$上，但分段取常值的区间$[k2^{-J_0+2},(k+1)2^{-J_0+2}]$又加大了，如此一直这样做下去，直到有下式

$$f = f^{J_0+J_1} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1}\sum_l c_{m,l}\cdot\psi_{m,l}$$

此处的 $f^{J_0+J_1}$由两个常值片组成(见图 1.7)，$f^{J_0+J_1}|_{[0,2^{J_1}]}\equiv f_0^{J_0+J_1}$，它等于 f 在$[0,2^{J_1}]$上的平均值，$f^{J_0+J_1}|_{[-2^{J_1},0]}\equiv f_{-1}^{J_0+J_1}$，为 f 在$[-2^{J_1},0]$上的平均值。

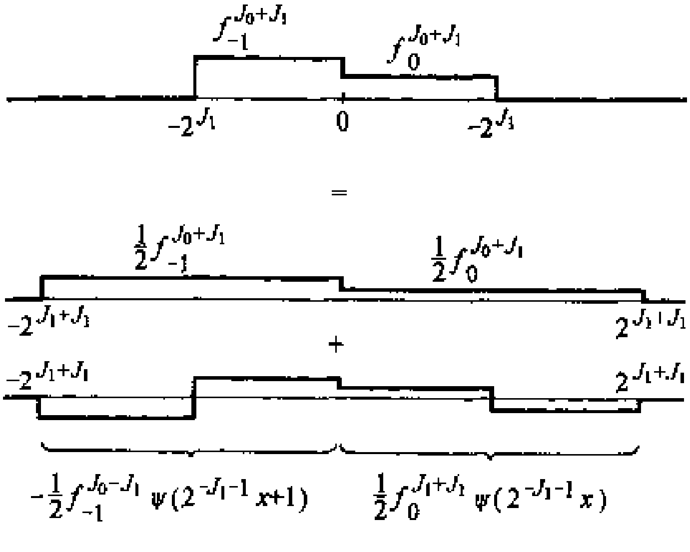


图 1.7　f 在$[0,2^{J^1}]$和$[-2^{J_1},0]$上的平均值，可以抹平在更大的区间$[0,2^{J_1+1}]$，$[-2^{J_1+1},0]$上，其差是很舒缓的 Haar 函数的线性组合

尽管我们已经填满 f 的整个支集，仍然可以再用上述方法，由 2^{J_1}到 2^{J_1+1}不断地扩充并写出 $f^{J_1+J_2} = f^{J_1+J_2+1} + \delta^{J_1+J_2+1}$，这里

$$f^{J_1+J_2+1}|_{[0,2^{J_1+1}]} \equiv \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2},\ f^{J_1+J_2+1}\Big|_{[-2^{J_1+1},0]} \equiv \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}$$

并且

$$\delta^{J_1+J_2} = \frac{1}{2}f_0^{J_1+J_2}\cdot\psi(2^{-J_1-1}x) - \frac{1}{2}f_{-1}^{J_1+J_2}\cdot\psi(2^{-J_1-1}x+1)$$

(见图 1.7),这一过程可以反复进行下去直到

$$f = f^{J_0+J_1+K} + \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l C_{m,l}\psi_{m,l}$$

此处的支集为 support$(f^{J_0+J_1+K}) = [-2^{J_1+K}, 2^{J_1+K}]$,并且

$$f^{J_0+J_1+K}|_{[0,2^{J_1-K}]} = 2^{-K} f_0^{J_0+J_1}, f^{J_0+J_1+K}|_{[-2^{J_1+K},0]} = 2^{-K} f_{-1}^{J_0+J_1}$$

其结果为

$$\left\| f - \sum_{m=-J_0+1}^{J_1+K} \sum_l C_{m,l}\psi_{m,l} \right\|_{L^2}^2 = \| f^{J_0+J_1+K} \|_{L^2}^2$$

$$= 2^{-K/2} 2^{J_1/2} [\,|f_0^{J_0+J_1}|^2 + |f_{-1}^{J_0+J_1}|^2\,]^{1/2}$$

该计算值在 K 充分大时,可变得任意小。总而言之,通过 Haar 小波有限线性组合以任意精度去逼近 f 是完全可能的。

我们刚才讨论过的,通过不断地近似去逼近 f(其中 f^j 为 f 在更大区间上的平均值),这种说法本身就隐含着多分辨分析的思想,每一步工作都把在 2^{j-1} 分辨度下的近似值与在 2^j 分辨度下的近似值之差记录下来,作为 $\psi_{j,k}$ 的线性组合部分。事实上已引入了一种反映顺序分辨度的阶梯空间$(V_j)_{j\in\mathbf{Z}}$。在本特例中,$V_j = \{f\in L^2(\mathbb{R}); f$ 是在 $[2^j k, 2^j(k+1)], k\in\mathbf{Z}$ 上分段取常值的函数$\}$。该空间具有如下特性:

(1) $\cdots\subset V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots$;

(2) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$;

(3) $f(\cdot)\in V_j \leftrightarrow f(2^j\cdot)\in V_0$;

(4) $f(\cdot)\in V_0 \rightarrow f(\cdot - n)\in V_0$ 所有 $n\in\mathbf{Z}$。

特性(3)说明所有的空间均为一个空间的尺度化。在 Haar 小波的例子中,发现存在函数 ψ,使得

$$\mathrm{Proj}_{V_{j-1}} f = \mathrm{Proj}_{V_j} f + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} \tag{1.3.5}$$

多分辨方法的妙处还在于一旦满足上述四个特性的与下述另一个特性:

(5) $\exists\,\phi\in v_0$ 使 $\phi_{0,n}(x) = \phi(x-n)$ 构成 v_0 上的正交基。

相联系存在 ϕ 使表达式(1.3.5)成立(例如上面的 Haar 小波,可取 $\phi(x)=1$,当 $0\leqslant x<1$,原则 $\phi(x)=0$)。$\psi_{j,k}$ 自动构成一个正交基,似乎对应于许多正交小波基的例子都存在这样一种多分辨分析阶梯。构造 ψ 的方法很清楚:因为 $\phi\in V_0\subset V_{-1}$,并且 $\phi_{-1,n}(x)=\sqrt{2}\phi(2x-n)$ 构成 V_{-1} 中的正交基,因而存在 $\alpha_n=\sqrt{2}(\phi,\phi_{-1,n})$ 使得 $\phi(x)=\sum_n \alpha_n\phi(2x-n)$,此时取 $\phi(x)=\sum_n(-1)^n\alpha_{-n+1}\phi(2x-n)$ 即可以了。函数 ϕ 称为多分辨分析的尺度函数,相应的多分辨分析小波正交基将在第 5 章中详细介绍,多分辨方法还与子带滤波有关,这部分内容将在 5.6 节中介绍。

图 1.8 列出了几种将在后续各章遇到的多分辨分析所对应的 ϕ 与 ψ 的例子。

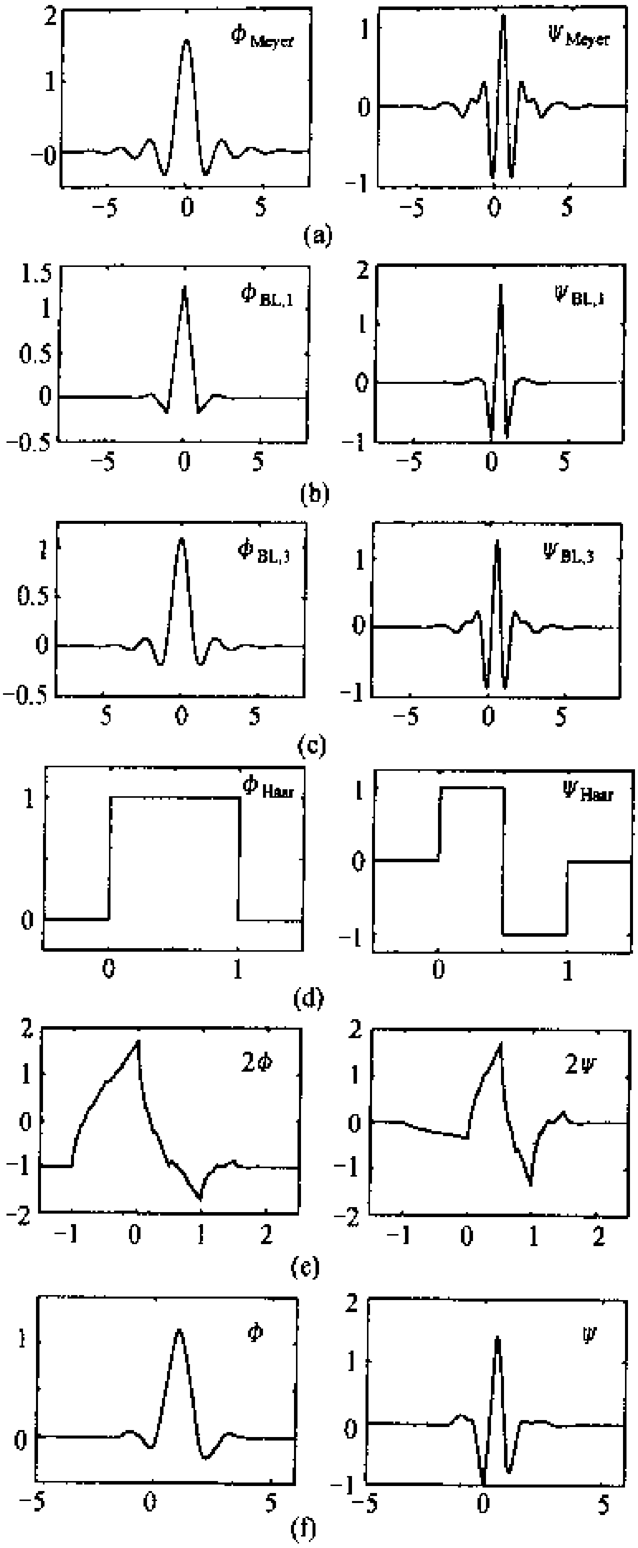


图 1.8 几个正交小波基例子。图中的每一个 ψ 其 $\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$，$j,k\in\mathbf{Z}$，均构成 $L^2(\mathbf{R})$ 中的正交基。这些 ϕ 和 ψ 将在后续各章节中遇到。(a)Meyer 小波；(b)和(c)Battle－Lemarie 小波；(d)Haar 小波；(e)紧支集小波 $_2\psi$；(f)其他的有最小不对称性的紧支集小波

Meyer 小波(见第 4 章,第 5 章)具有紧支集傅里叶变换特性,ϕ 与 ψ 本身都具有无限支集,如图 1.8(a)所示;Battle－Lemarie 小波为样柔函数(见图 1.8(b)),ϕ 的节点在 z 而 ψ 的节点在 $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$,尺度的小波函数均为无限支集,指数衰减,其衰减速度比 Meyer 小波的衰减更快;图 1.8(d)中的 Haar 小波人们在 1910 年就已经知道了,它被看作是最小阶的 Battle－Lemarie 小波($\psi_{Haar}=\psi_{BL,0}$),或者作为第 6 章中紧支集小波的第一组,即 $\psi_{Haar}={}_1\psi$;图 1.8(e)绘出了另一组紧支集小波 ${}_N\psi$,${}_2\phi$ 和 ${}_2\psi$ 的支集宽度均为 3 并且连续,在 ${}_2\psi$ 小波族中,正则性随支集宽度增大而呈线性增加;图 1.8(f)绘制了其他的一种紧支集小波,支集宽度为 11 而且具有最小不对称性。

注:

1. 除加窗傅里叶变换外,还有其他的时频定位方法。人们最熟悉的方法即为威格纳(Wigner)分布。(Boashash(1990)有一个对威格纳分布用于信号分析的很好的评述)。威格纳分布不像加窗傅里叶变换或小波变换那样,它勿需引人参考函数和对信号进行积分。其缺点是信号是以二次方式而不按线性方式进人威格纳分布的。这样势必引起许多干扰现象。这种方法在某些应用领域如短时信号处理中还是有用的,如是长信号,威格纳分布就失去吸引力了。1989 年 Flandrno 指出函数以适当的方式通过"平滑"威格纳分布可获得,但这一过程中相位信息丢失了而且重构也是不可能的。

2. 式(1.3.4)中要求 $b_0=1$ 不是十分重要的。若式(1.3.4)为正交基,则 $\tilde{\psi}_{m,n}(x)=2^{-m/2}\times\tilde{\psi}(2^{-m}x-nb_0)$也将是正交基,$\tilde{\psi}(x)=|b_0|^{1/2}\psi(b_0^{-1}x)$,其中常数 $b_0\neq0$ 可以取任意值。在尺度上选 $a_0=2$ 是不能变动的,事实上 a_0 是不可以任意选择的。Auscher(1989)曾经指出正交基的构造可以选择 $a_0>1$ 的有理数,但 $a_0=2$ 是最简单的。选择不同 a_0 的将产生不同的 ψ。虽然认为多分辨分析的正交小波基构造方法仅 a_0 当取有理数时才能进行。但也存在一个公开问题:是否存在一种正交小波基,它具有良好的时－频定位特性,而 a_0 是无理数。

第 2 章　连续小波变换(CWT)

L^2 函数在连续小波变换下的图像构成了 r. k. H. s. (reproducing kernel Hilbert space，即再生核 Hilbert 空间)。r.k.H.s.在以后的许多章节中出现且很有用。简单的例子之一就是 2.1 节和 2.2 节中讨论的带限函数空间。在 2.3 节中我们介绍"带限"和"时限"的概念，尽管，没有非零函数即是时限的(当 t 在$[-T,T]$之外时，$f(t)\equiv0$)又是带限的(当 $\xi\notin[-\Omega,\Omega]$时，$\hat{f}(\xi)\equiv0$)，仍然可以引入"时—频限"算子。这里先回顾一下 Landau、Pollak 和 Slepian 在这方面的精彩工作，接着再转向连续小波变换，2.4 节中的恒等分解(含式(1.3.1)的证明)，2.5 节是相应的 r.k.H.s.。在 2.6 节中，简单地展示前几节的内容如何推广到多维。节 2.7 给出连续窗口傅里叶变换作对比。2.8 节给出，如何从连续窗口傅里叶变换或连续小波变换建立不同的"时—频限"算子。最后，2.9 节中解释小波变换的"显微"特性。

2.1　带限函数的 Shannon 定理

一个 $L^2(\mathbb{R})$中的函数 f 的傅里叶变换$\hat{f}$是紧支的，即，当$|\xi|>\Omega$时$\hat{f}(\xi)\equiv0$，则称 f 是"(频)带(受)限"的。为简便起见，先假定 $\Omega=\pi$，于是$\hat{f}$可用其傅里叶级数表示

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\mathrm{e}^{-in\xi}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{in\xi}\hat{f}(\xi)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{in\xi}\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(n)$$

立即得出

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{ix\xi}\hat{f}(\xi)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{e}^{ix\xi}\sum_{n}c_n\mathrm{e}^{-in\xi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n c_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\xi \mathrm{e}^{i(x-n)\xi}$$

$$= \sum_n f(n) \frac{\sin\pi(x-n)}{\pi(x-n)} \tag{2.1.1}$$

在第三步,我们交换了积分与求和的顺序,这样做所需的前提是:$\sum |c_n| < \infty$(例如,仅有有限个 c_n 非零)。对于标准连续性自变量,上式对所有带限函数都成立(因为 $\sum_n |f(n)|^2 = 2\pi \sum_n |c_n|^2 < \infty$,故对一切 x,此级数都绝对可和)。公式(2.1.1)说明 f 可完全由“采样”值重构。如果去掉假设 $\Omega = \pi$ 而假定 support $\hat{f} \subset [\Omega, \Omega]$,$\Omega$ 任意,则式(2.1.1)变为

$$f(x) = \sum_n f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - n\pi)}{\Omega x - n\pi} \tag{2.1.2}$$

f 现在由其采样值 $f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right)$ 确定。相应的有“采样密度”$\Omega/\pi = \frac{|\text{support } \hat{f}|}{2\pi}$。(当 $A \subset \mathbb{R}$,我们用记号 $|A|$ 表示集合 A 的“宽度”,由 Lebesgue 测度来度量;此例中 $|\text{support } \hat{f}| = |[-\Omega, \Omega]| = 2\Omega$)。这个采样密度通常称 Nyquist 密度。式(2.1.2)称为 Shannon 定理。

式(2.1.2)中的“基本构件”$\frac{\sin\Omega x}{\Omega x}$ 衰减得非常慢(它甚至不是绝对可积的)。用“超采样”可使 f 成为稍快的下降函数的叠加。假定 f 仍带限于 $[-\Omega, \Omega]$(即 support $\hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$),但 f 的采样速率为 $(1+\lambda)$,$\lambda > 0$,大于 Nyquist 采样速率。则 f 可用下述方法,由 $f(n\pi[\Omega(1+\lambda)])$ 重建。按下式定义 g_λ

$$\hat{g}_\lambda(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leqslant \Omega \\ 1 - \frac{|\xi| - \Omega}{\lambda\Omega} & \Omega \leqslant |\xi| \leqslant (1+\lambda)\Omega \\ 0 & |\xi| \geqslant (1+\lambda)\Omega \end{cases}$$

(如图 2.1 所示),由于在 $\hat{f}$ 的支集上,$\hat{g}_\lambda \equiv 1$,故 $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}_\lambda(\xi)$。重复以前的

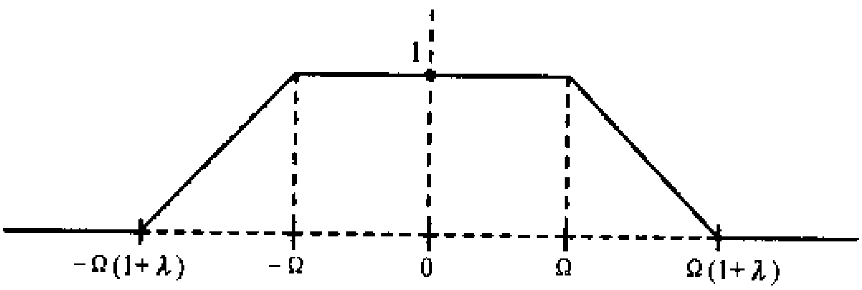


图 2.1 $\hat{g}_\lambda$ 的图像

构造过程

$$\hat{f}(\xi) = \sum_n c_n \mathrm{e}^{-in\xi\pi/[\Omega(1+\lambda)]}$$

其中

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega(1+\lambda)} f\left(\frac{n\pi}{\Omega(1+\lambda)}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega(1+\lambda)}^{\Omega(1+\lambda)} \mathrm{d}\xi \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{g}_\lambda(\xi) \sum_n c_n \mathrm{e}^{-in\xi\pi/[\Omega(1+\lambda)]} \\ &= \sum_n f\left(\frac{n\pi}{\Omega(1+\lambda)}\right) G_\lambda\left(x - \frac{n\pi}{\Omega(1+\lambda)}\right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G_\lambda(x) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega(1+\lambda)} g_\lambda(x) \\ &= \frac{2\sin[x\Omega(1+\lambda/2)]\sin(x\Omega\lambda/2)}{\lambda\Omega^2(1+\lambda)x^2} \end{aligned}$$

此 G_λ 比$\frac{\sin\Omega x}{\Omega x}$下降更快;注意,正如所期望的,如果 $\lambda \to 0$,则 $G_\lambda \to \frac{\sin\Omega x}{\Omega x}$。选择更光滑的 $\hat{g}_\lambda$ 可使G_λ 衰减更快,但不必花功夫使 $\hat{g}_\lambda$ 非常光滑:事实上,对于渐进增大的 x,G_λ 将迅速下滑,但对于 G_λ 的下降,λ 的大小施加了一些限制。换句话说,选择 $\hat{g}_\lambda$ 为C^∞将导致 G_λ 衰减快于任何多项式的倒数

$$|G_\lambda(x)| \leqslant C_N(\lambda)(1+|x|)^{-(N+1)}$$

但常数 $C_N(\lambda)$会非常大:它取决于 $\hat{g}_\lambda$ 在$[\Omega,\Omega(1+\lambda)]$上的 N 阶导数值的范围,可粗略认为 C_N 正比于λ^{-N}。

如果 f 被"欠采样"会怎么样? 即 support $\hat{f}=[-\Omega,\Omega]$,但仅仅 $f(n\pi/[\Omega(1-\lambda)])$已知,且 $\lambda>0$,这时,我们有

$$\begin{aligned} f\left(n\frac{\pi}{\Omega(1-\lambda)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} \mathrm{d}\xi \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{in\pi\xi/[\Omega(1-\lambda)]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega(1-\lambda)}^{\Omega(1-\lambda)} \mathrm{d}\xi \mathrm{e}^{in\pi\xi/[\Omega(1-\lambda)]} \\ &\quad \cdot [\hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi+2\Omega(1-\lambda)) + \hat{f}(\xi-2\Omega(1-\lambda))] \end{aligned}$$

这里,我们用了 $\mathrm{e}^{in\pi\xi/\alpha}$以 2α 为周期,且假定 $\lambda \leqslant \frac{2}{3}$(否则积分项的最后一个和式中会出现更多的项)。这意味着欠采样的 $f\left(n\frac{\pi}{\Omega(1-\lambda)}\right)$表现似乎是窄(频)带函数的 Nyquist 空间采样,其傅里叶变换由$\hat{f}$的折叠构成(见图 2.2)。当$\hat{f}$出现混

叠时，f 的某些高频部分出现在 f 的低频区；只有 $|\xi|\leqslant\Omega(1-2\lambda)$ 的区域不受影响。这种现象称为“频谱混叠”；例如，对于欠采样的音频信号，可清晰地听到金属的夹击声。

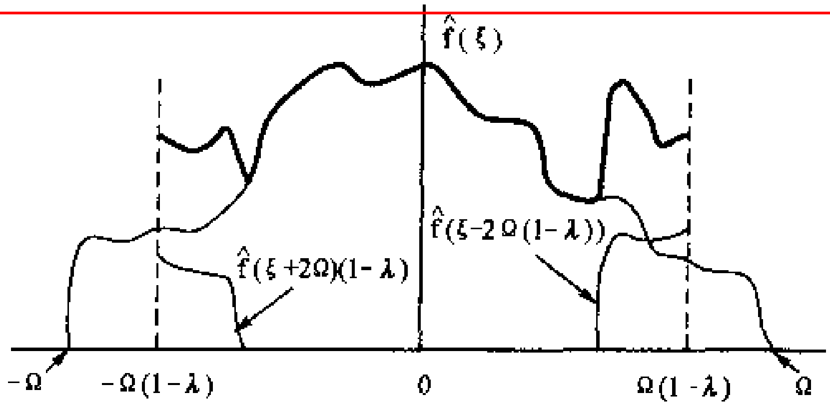


图 2.2 $|\xi|\leqslant\Omega(1-\lambda)$ 时的三项 $\hat{f}(\xi)$，$\hat{f}(\xi+2\Omega(1-\lambda))\hat{f}(\xi-2\Omega(1-\lambda))$，及其叠加(粗线)

2.2 带限函数是再生核 Hilbert 空间的特例

对于任意 $\alpha,\beta,-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant\infty$，函数集合

$$\{f\in L^2(\mathbb{R});\text{support}f\subset[\alpha,\beta]\}$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间，即：不但为子空间，而且由此空间的元素构成的 Cauchy 序列收敛于此空间的某一个元素。由 $L^2(\mathbb{R})$ 上傅里叶变换的酉性或单式性(unitanity)，可得出所有带限函数的集合

$$B_\Omega=\{f\in L^2(\mathbb{R});\text{support }\hat{f}\subset[-\Omega,\Omega]\}$$

是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个封闭子空间。根据 Paley－Wiener 定理(见预备知识)，B_Ω 中的任意函数 f 可解析展成 $\mathbb{C}$ 上的整函数，仍把它记为 f，它是指数型的。更精确地有

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_{L^1}e^{|\text{Im}z|\Omega}$$

其中 $\|\cdot\|$ 取 L^1 范数。事实上，B_Ω 恰好组成这些 L^2 函数，存在满足此类限制的整函数解析展式。考虑 B_Ω 为整函数的 Hilbert 空间，对于 B_Ω 中的 f，有

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}e^{ix\xi}\left(\int e^{-i\xi y}f(y)dy\right)d\xi$$

$$=\int f(y)\frac{\sin\Omega(x-y)}{\pi(x-y)}dy \tag{2.2.1}$$

(如果 $f\in L^1$，即 $\hat{f}$ 足够光滑，最后一步交换积分顺序是允许的。因为对于所有 x，$[\pi(x-\cdot)]^{-1}\sin\Omega(x-\cdot)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中，根据预备知识中的标准方法解释，结论可扩

展到 B_Ω 中所有的 f。)引入记号 $e_x(y)=\dfrac{\sin\Omega(x-y)}{\pi(x-y)}$,则式(2.2.1)可写成

$$f(x) = \langle f, e_x\rangle \tag{2.2.2}$$

注意 $e_x\subset B_\Omega$,因为当 $|\xi|<\Omega$ 时,$\hat{e}_x(\xi)=(2\pi)^{-1/2}e^{-ix\xi}$;$|\xi|>\Omega$ 时,$\hat{e}_x(\xi)=0$。

对于 r.k.H.s.(再生核 Hilbert 空间),公式(2.2.2)是典型的。在一个 r.k.H.s. 中,即函数的 $\mathscr{H}$(Hilbert 空间)中,函数 f 对应的映射:x 到 $f(x)$ 是连续映射(这一点,在大多数函数的 Hilbert 空间,尤其是在 $L^2(\mathbb{R})$ 中不成立)。所以必定存在 $e_S\in\mathscr{H}$,使得对任意 $f\in\mathscr{H}$, $f(x)=\langle f,e_x\rangle$(根据 Riesz 表示引理;见预备知识)。也可写成

$$f(x) = \int K(x,y)f(y)d(y)$$

这里 $K(x,y)=\overline{e_x(y)}$是再生核。在 B_Ω 的特殊情形下,甚至存在特定的 $x_n=\dfrac{n\pi}{\Omega}$,使得 e_{x_n} 构成B_Ω 的一个正交基,导出 Shannon 定理(2.1.2)。这个特定的 x_n 不需要存在一般的 r.k.H.s.。下面我们将要看到另外几个 r.k.H.s. 的例子。

2.3 “时—频”限

函数不能既带限又时限:如果 f 是带限的(为任意的有限带宽),则 f 是限制在 $\mathbb{R}$ 上的整解析函数;如果 f 同时又时限,即 support$f\subset[-T,T]$, $T<\infty$, 则 $f\equiv0$(非平凡解析函数仅能有孤立零点)。然而,许多实际场合需有时频限制:比如设想,信号(通过电话线)传输时,高于 Ω 的频率分量就丢失了(现实中的许多传输手段都有此类带宽限制);又设想,(类似于电话交谈的)信号持续有限的时间。说明,对于所有实际情况,传送的信号的时—频都被有效地限制。这是怎么回事?一个函数在时—频受限时的重构质量的好坏如何?许多学者致力于这个问题的研究,一直到这个问题被 H. Landau、H. Pollack 和 D. Slepian 的著作,Slepian 和 Pollaku(1961)加上 Landau 和 Pollack(1961, 1962)的系列论文优美地解决。Slepian 在 1976 年给出了比本书更详细的精彩评论。

上面提到的例子(信号持续有限的时间,通过带宽有限的信道)可按如下方式建模:令 Q_T、P_Ω、为 $L^2(\mathbb{R})$上的正交投影算子,分别定义为

当 $|x|<T$,$(Q_Tf)(x)=f(x)$; 当 $|x|>T$,$(Q_Tf)(x)=0$,

和

当 $|\xi|<\Omega$,$(P_\Omega f)\wedge(\xi)=f(\xi)$; 当 $|\xi|>\Omega$,$(P_\Omega f)\wedge(\xi)=0$。

则时限于$[-T,T]$的信号满足 $f=Q_Tf$,通过带宽为 Ω 的信道传输它,最终结果为 $P_\Omega f=P_\Omega Q_Tf$(假设没有其他畸变)。算子 $P_\Omega Q_T$ 代表总的时限和带限作用。

$P_\Omega Q_T f$ 逼近原始信号 f 的程度如何，由 $\| P_\Omega Q_T f \|^2 / \| f \|^2 = \langle Q_T P_\Omega Q_T, f, f\rangle / \| f \|^2$ 来衡量。

此比例的最大值等于对称算子 $Q_T P_\Omega Q_T$ 的最大特征值，此算子可明确地表示为

$$(Q_T P_\Omega Q_T f)(x) = \begin{cases} \int_{-T}^{T} \frac{\sin\Omega(x-y)}{\pi(x-y)} f(y)\mathrm{d}y & |x| < T \\ 0 & |x| > T \end{cases} \tag{2.3.1}$$

它的特征值和特征函数已经研究清楚，这是偶然的幸运 $Q_T P_\Omega Q_T$ 和下面的二阶微分算子 A 是可交换的

$$(Af)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(T^2 - x^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - \frac{\Omega^2}{\pi^2}x^2 f(x)$$

A 的特征函数，由于各种原因，早在它们和时—频限的联系被发现前，就已经有人在研究了，称为椭球波函数，现在已知它的许多性质。由于 A 和 $Q_T P_\Omega Q_T$ 可交换（而且 A 的特征值都很简单），椭球波函数也是 $Q_T P_\Omega Q_T$ 的特征函数（当然有不同的特征值）。特别地，我们记椭球波函数为 $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$，用以表明顺序，因为 A 的特征值 α_n 随 n 的增大而增大，则

$$\begin{aligned} Q_T P_\Omega Q_T \varphi_n &= \lambda_n \varphi_n \\ Q_T P_\Omega Q_T f = 0 &\Leftrightarrow \text{对于所有 } n, f \perp \varphi_n \\ &\Leftrightarrow \text{support} f = \{x;\ |x| \geqslant T\} \end{aligned}$$

随着 n 的增大，λ_n 减小，并且 $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

当然特征值 λ_n 取决于 T 和 Ω，简单地进行变量代换（在 $(Q_T P_\Omega Q_T f)(x)$ 的表达式中，以 Tx' 代替 x，Ty' 代替 y）表明 λ_n 只取决于积 $T\Omega$。固定 $T\Omega$，λ_n 随着 n 增大的变化情况，概略地绘于图 2.3 中。一般地，当 n 较小时 λ_n 接近于 1；当接近阈值 $2T\Omega/\pi$ 时向 0 下降；此后非常接近 0。进一步，对任意小的 $\varepsilon > 0$，必定存在 C_ε，使得

$$\begin{aligned} \# \ \{n; \lambda_n \geqslant 1 - \varepsilon\} &\leqslant \frac{2T\Omega}{\pi} - C_\varepsilon \lg(T\Omega), \\ \# \ \{n; 1 - \varepsilon \geqslant \lambda_n \geqslant \varepsilon\} &\leqslant 2C_\varepsilon \lg(T\Omega) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

这就意味着"下降区"的宽度正比于 $\lg(T\Omega)$。因为 $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\lg x = 0$，当相对于阈值 $2T\Omega/\pi$，$T, \Omega \to \infty$ 时，下陷区的宽度小得可以忽略。事实上，式(2.3.2)是时—频限区域 $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$ 对应的"自由度" $2T\Omega/\pi$ 的确切描述，也就是说，存在（取决于误差，与 $T\Omega$ 相比较小）仅依赖于 $2T\Omega/\pi$（与其他无关）的函数，本质上时限于 $[-T, T]$，且频限于 $[-\Omega, \Omega]$。注意到 $2T\Omega/\pi$ 恰好是 $[-T, T] \times [-\Omega, \Omega]$

的面积除以 2π。对于(频)带宽为 Ω 的函数，根据 Shannon 定理算出的在时间 $[-T,T]$ 内的采样次数，恰好和这个数值相等；这种有启发性的计算"独立自由度"的方式，是通信理论中的家常，早就被 Landau、Pollak 和 Slepian 认定。物理学家也独立地知道，相平面(= space - momentum，或本书讨论的时—频空间)中面积为 S 的区域，在准古典式极限中(即，当 S 远大于 h 时，表达式 $S/2\pi$ 对应的单位是 $h=1$)，对应的"独立状态数"是 $S/2\pi$。我们将从最初的采样情形扩展 Nyquist 密度的定义，使用它作为临界"时频密度"$(2\pi)^{-1}$出现在所有的例子中。

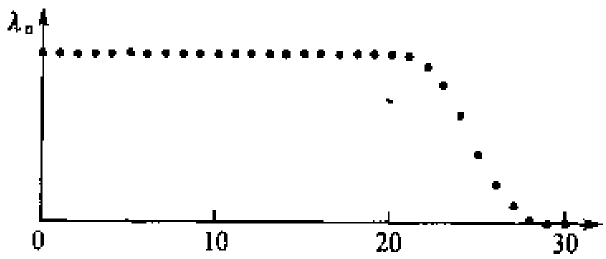


图 2.3 $2T\Omega/\pi=25$ 时，$Q_TP_\Omega Q_T$ 的特征值 λ_n

该回到小波变换了。在接下的几小节中，将阐述连续小波变换(CWT)和连续窗口傅里叶变换(STFT)。

2.4 连续小波变换(CWT - Continuous Wavelet Transform)

目前，暂时仅限于一维小波。我们总是假定 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$；此外，要分析的小波应该满足 1.3 节中的"容许条件"

$$C_\psi = 2\pi\int d\xi\,|\xi|^{-1}\,|\hat{\psi}(\xi)|^2 < \infty \tag{2.4.1}$$

以后不久就会清楚此条件的作用。如果 $\psi\in L^1(\mathbb{R})$，则 $\hat{\psi}$ 是连续的，并且，仅当 $\hat{\psi}(0)=0$ 或 $\int dx\psi(x)=0$ 时，式(2.4.1)方能被满足。反过来，如果 $\int dx\psi(x)=0$ 并加一个比 ψ 可积性更强的条件，即：对于某些，$\alpha>0$，$\int dx(1+|x|)^\alpha\,|\psi(x)|<\infty$，则 $|\hat{\psi}(\xi)|\leqslant C|\xi|^\beta$，其中，$\beta=\min(\alpha,1)$，且满足式(2.4.1)。其实，在所有实用场合，式(2.4.1)等价于条件 $\int dx\psi(x)=0$(实际应用中，我们给 ψ 附加了严格得多的下降条件)。

通过 ψ 的"伸缩"和"平移"，可生成双上标小波族

$$\psi^{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

其中，$a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$（$a$ 正负均可）。选取归一化因子，使对于所有 a,b 都有 $\|\psi^{a,b}\|=\|\psi\|$。我们假定 $\|\psi\|=1$。对这一小波族的连续小波变换为

$$(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)=\langle f,\psi^{a,b}\rangle=\int\mathrm{d}x f(x)\cdot|a|^{-1/2}\overline{\psi\frac{x-b}{a}}$$

注意，$|(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)|\leqslant\|f\|$。

下面，通过恒等分解技术，函数 f 可从其小波变换恢复。

性质 2.4.1 对于所有的 $f,g\in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\overline{(T^{\mathrm{wav}}g)(a,b)}=C_\psi\langle f,g\rangle \qquad (2.4.2)$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\overline{(T^{\mathrm{wav}}g)(a,b)}$$

$$=\iint\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}\left[\int\mathrm{d}\xi\hat{f}(\xi)|a|^{1/2}\mathrm{e}^{-ib\xi}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}\right]$$

$$\cdot\left[\int\mathrm{d}\xi'\overline{\hat{g}(\xi')}|a|^{1/2}\mathrm{e}^{ib\xi'}\hat{\psi}(a\xi')\right] \qquad (2.4.3)$$

第一对方括号间的表达式可看成 $F_a(\xi)=|a|^{1/2}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\xi)}$ 的傅里叶变换的 $(2\pi)^{1/2}$ 倍，同样地，第二对间的表达式可看成 $G_a(\xi)=|a|^{1/2}\hat{g}(\xi)\overline{\hat{\psi}(a\xi)}$ 的傅里叶变换的 $(2\pi)^{1/2}$ 倍的复共轭。紧接着，由傅里叶变换的单式性或酉性，得

$$式(2.4.3)=2\pi\int\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int\mathrm{d}\xi F_a(\xi)\overline{G_a(\xi)}$$

$$=2\pi\int\frac{\mathrm{d}a}{|a|}\int\mathrm{d}\xi\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}|\hat{\psi}(a\xi)|^2$$

$$=2\pi\int\mathrm{d}\xi\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\int\frac{\mathrm{d}a}{|a|}|\hat{\psi}(a\xi)|^2$$

（积分顺序的交换，是根据 Fubini 定理）

$$=C_\psi\langle f,g\rangle$$

（第二个积分作了变量代换：$\xi=a\xi$） ■

为什么需要条件式(2.4.1)，现在很清楚了：如果 C_ψ 为无限值；则式(2.4.2)的解就不成立。

公式(2.4.2)又可写成

$$f=C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b} \qquad (2.4.4)$$

上述积分在弱意义上收敛，即式(2.4.4)两边用 $g\in L^2(\mathbb{R})$ 作内积，并把右手边的内积与对 a,b 的积分互换，导得了正确的公式。这一收敛性在更强的意义上也成立

$$\lim_{\substack{A_1\to 0\\ A_2,B\to\infty}}\left\|f-C_\psi^{-1}\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}\right\|=0 \qquad (2.4.5)$$

这里,积分是对 $L^2(\mathbb{R})$的惟一元素作成的,它和 $g\in L^2(\mathbb{R})$的内积由下式给出:

$$\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}\langle\psi^{a,b},g\rangle$$

由于它的绝对值限为

$$\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\|f\|\ \|\psi^{a,b}\|\ \|g\| = 4B\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)\|f\|\ \|g\|$$

通过 Riesz 引理,式(2.4.5)的积分也就有了意义。式(2.4.5)的证明也变得简单了

$$\begin{aligned}
&\left\|f-C_\psi^{-1}\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\right\|\\
&=\sup_{\|g\|=1}\left|\left\langle f-C_\psi^{-1}\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2},g\right\rangle\right|\\
&\leqslant\sup_{\|g\|=1}\left[C_\psi^{-1}\iint_{\substack{|a|\geqslant A_2\\ \text{or}|a|\geqslant A_1\\ \text{or}|b|\geqslant B}}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)(T^{\mathrm{wav}}g)(a,b)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\right]\\
&\leqslant\sup_{\|g\|=1}\left[C_\psi^{-1}\iint_{\substack{|a|\geqslant A_2\\ \text{or}|a|\geqslant A_1\\ \text{or}|b|\geqslant B}}|(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\right]^{1/2}\\
&\quad\cdot\left[C_\psi^{-1}\iint|(T^{\mathrm{wav}}g)(a,b)|^2\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

通过性质 2.4.1,第二个方括号内的表达式为 $\|g\|^2=1$;当 $A_1\to 0, A_2, B\to\infty$时,第一个方括号内的表达式趋近于 0。由此得到式(2.4.5)。

公式(2.4.5)表明,用小波的叠加能以任意的精度逼近 $L^2(\mathbb{R})$,看似矛盾:毕竟,小波的积分为 0,f 的积分不为 0 的情况下,小波的叠加怎么能很好地逼近 f?解决这个矛盾不在于数学上的简单描述(解决矛盾经常是这样),我们可严格地把它描述出来:如果取 $f\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$,并且 ψ 本身在$L^1(\mathbb{R})$中, 则容易验证

$$C_\psi^{-1}\iint_{\substack{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2\\ |b|\leqslant B}}(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

确实在 $L^1(\mathbb{R})$ 中(其范数界限为:$2C_\psi^{-1}\|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}\|\psi\|_{L^1}B(A_1^{-1/2}-$

$A_2^{-1/2}$))且它的积分为0,当 $A_1 \to 0$, A_2, $B \to \infty$时,函数将逼近它 f,而 f 本身可能会有非零积分值。这样解释上面的明显矛盾:极限式(2.4.5)在 L^2 意义上成立,而不是在 L^1 意义上成立。当 $A_1 \to 0$, $A_2, B \to \infty$时,

$$f(x) - C_\psi^{-1} \iint_{\substack{A_1 \leq |a| \leq A_2 \\ |b| \leq B}} (T^{\mathrm{wav}} f)(a,b) \psi^{a,b} \frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

将变成非常平坦,伸得特别长的函数,此函数和 f 的积分值相等,但其 L^2 范数小得接近0(类似的情况还有:当 $|x| < n$ 时函数 $g_n(x)$ 为 $(2n)^{-1}$,其余为0,对所有 n, g 满足 $\int g_n \mathrm{d}x = 1$,即使对所有 x, $g_n(x) \to 0$,并且 $n \to \infty$时,$\| g_n \| L^2 = (2n)^{-\frac{1}{2}} \to 0$, g_n 在 $L^1(\mathbb{R})$中不收敛)。

如果我们限制 a 仅取正值(在式(2.2.4)中 a 可正可负),式(2.2.4)也可改写成其他几种形式。一种可能情况是,要求 ψ 满足比式(2.4.1)更直接的容许条件,为

$$C_\psi = 2\pi \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} \mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{-\infty}^0 |\hat{\psi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi |\xi|^{-1} < \infty \tag{2.4.6}$$

例如,如果 ψ 是实函,则 $\hat{\psi}(-\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)}$,积分号间的等号成立。分解上面的恒等式得

$$f = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \int_{-\infty}^\infty T^{\mathrm{wav}} f(a,b) \psi^{a,b} \mathrm{d}b \tag{2.4.7}$$

也可用同式(2.2.4)一样,从弱意义或稍强意义上来理解(式2.4.7的证明与式2.4.4完全类似)。

如果 f 为实函数,且 support$\psi \subset [0,\infty]$),还可改写。这种情况下,容易证明

$$f = 2C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{Re}[T^{\mathrm{wav}} f(a,b) \psi^{a,b}] \mathrm{d}b \tag{2.4.8}$$

其中 C_ψ 由式(2.4.1)定义(为证明式(2.4.8),用到 $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2\mathrm{Re} \int_0^\infty \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi$,因为 $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$)。公式(2.4.8)当然可写成 $\psi_1 = \mathrm{Re}\psi$, $\psi_2 = \mathrm{Im}\psi$,这两个小波互为 Hilbert 变换。即使是用来分析实函数,使用复小波,还可能带来优点。例如,Kronland-Martinet、Morlet 和 Grossmann(1987),用了 support$\hat{\psi} \subset [0,\infty)$的复小波 ψ,且小波变换 $T^{\mathrm{wav}} f$ 由幅值-相位图来表示。

如果 f 和 ψ 都是所谓的"解析信号",即,如果 support $\hat{f}$, support$\hat{\psi} \subset [0,\infty)$则当 $a<0$, $T^{\mathrm{wav}}(a,b) = 0$。因此,式(2.4.4)立刻满足

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \int_{-\infty}^\infty T^{\mathrm{wav}} f(a,b) \psi^{a,b} \mathrm{d}b \tag{2.4.9}$$

这里 C_ψ 还由式(2.4.1)定义。最后,我们把式(2.4.9)用于 support $\hat{\psi} \subset [0,\infty)$且

support $\hat{f}\not\subset[0,\infty)$。记 $f=f_++f_-$，support $\hat{f}_+\subset[0,\infty)$，support $\hat{f}_-\subset(-\infty,0]$，$\psi_+=\psi_-$，引入；$\hat{\psi}_-(\xi)=\hat{\psi}(-\xi)$；显然 support $\hat{\psi}_-\subset(-\infty,0]$。所以，对于 $a>0$，$\langle f_-,\psi_-^{a,b}\rangle=0$，$\langle f_-,\psi_+^{a,b}\rangle=0$ 直接用式(2.4.9)得

$$f=C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}[T_+^{wav}f(a,b)\psi_+^{a,b}+T_-^{wav}f(a,b)\psi_-^{a,b}]db \quad (2.4.10)$$

$T_+^{wav}f(a,b)=\langle f_+,\psi_+^{a,b}\rangle$，$T_-^{wav}f$ 类似地定义，C_ψ 见式(2.4.1)。

又一重要的改写(需引入另外的函数)用于重建而不是分解，更明确地，如果 ψ_1,ψ_2 满足

$$\int|\hat{\psi}_1(\xi)||\hat{\psi}_2(\xi)||\xi|^{-1}d\xi<\infty \quad (2.4.11)$$

由证明性质 2.4.1 时的类似讨论，有

$$\int\frac{da}{a^2}\int db\langle f,\psi_1^{a,b}\rangle\langle\psi_2^{a,b},g\rangle=C_{\psi_1,\psi_2}\langle f,g\rangle \quad (2.4.12)$$

其中 $C_{\psi_1,\psi_2}=2\pi\int\overline{\hat{\psi}_1(\xi)}\hat{\psi}_2(\xi)|\xi|^{-1}d\xi$，如果 $C_{\psi_1,\psi_2}\neq0$，可重写式(2.4.12)

$$f=C_{\psi_1,\psi_2}^{-1}\int\frac{da}{a^2}\int db\langle f,\psi_1^{a,b}\rangle\psi_2^{a,b} \quad (2.4.13)$$

注意，ψ_1,ψ_2 可能会具有非常不同的性质！一个可能不规则，而另一个平缓；两者都不必满足容许条件：对于 $\xi\to0$ 如果 $\hat{\psi}_1(\xi)=O(\xi)$，允许 $\hat{\psi}_2(0)\neq0$。我们将要利用这一额外的灵活性。Holschneider 和 Tchamitchian(1990)说，自由地选取 ψ_1,ψ_2 可以证明一些有趣的结果(见 2.9 节)。例如，可选紧支的 ψ_2，support$\psi_2\subset[-R,R]$，于是，对任意 x，只有在$\{(a,b);|b-x|\leqslant|a|R\}$内的$\langle f,\psi_1^{a,b}\rangle$才对重建公式 2.4.13 有贡献。$|b-x|\leqslant|a|R$ 称为 ψ_2 在 x 上的"影响锥"。Holschneider 和 Tchamitchian(1990)还证明，f 在适当条件下，式(2.4.3) 在 L^2 意义上逐点成立。

性质 2.4.2 假定 $\psi_1,\psi_2\in L^1(\mathbb{R})$，$\psi_2$ 可微，$\psi'_2\in L^2(\mathbb{R})$，$x\psi_2\in L^1(\mathbb{R})$，且 $\hat{\psi}_1(0)=0=\hat{\psi}_2(0)$。如果 $f\in L^2(\mathbb{R})$是带限的，则式(2.4.3)在每个 x 处逐点成立(f 在 x 连续)，即

$$f(x)=C_{\psi_1,\psi_2}^{-1}\lim_{\substack{A_1\to0\\A_2\to\infty}}\int_{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}db\langle f,\psi_1^{a,b}\rangle\psi_2^{a,b} \quad (2.4.14)$$

证明：

1. 可重写式(2.2.14)等号右边的式子如下

$$f_{A_1,A_2}(x)=C_{\psi_1,\psi_2}^{-1}\int_{A_1\leqslant|a|\leqslant A_2}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dbf(y)|a|^{-1}\overline{\psi_1\left(\frac{y-b}{a}\right)}\psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y M_{A_1,A_2}(x-y) f(y) \tag{2.4.15}$$

根据 Fubini 定理,上述过程中交换积分顺序是允许的(积分绝对收敛)。其中 $\hat{M}_{A_1,A_2}$定义如下

$$M_{A_1,A_2}(x) = C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \int_{A_1 \leqslant |a| A_2} \frac{\mathrm{d}a}{|a|^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}b\, \overline{\psi_1\left(-\frac{b}{a}\right)} \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

2. 容易计算 $\hat{M}_{A_1,A_2}$的傅里叶变换为

$$\hat{M}_{A_1,A_2}(\xi) = (2\pi)^{1/2} C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \int_{A_1 \leqslant |a| \leqslant A_2} \frac{\mathrm{d}a}{|a|} \hat{\psi}_2(a\xi)\, \overline{\hat{\psi}_1(a\xi)} \tag{2.4.16}$$

$$= \hat{M}(A_1 \xi) - \hat{M}(A_2 \xi) \tag{2.4.17}$$

其中 $\hat{M}(\xi) = 2(\pi)^{1/2} C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \int_{|a| \geqslant |\xi|} \frac{\mathrm{d}a}{|a|} \hat{\psi}_2(a)\, \overline{\hat{\psi}_1(a)}$,式(2.4.16)通过变量代换 $a \to a\xi$ 得到,既然 $a\hat{\psi}_2(a) \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\hat{\psi}_1(a)$ 是带限的,有

$$|\hat{M}(\xi)| \leqslant C\left(\int_{|a| \geqslant |\xi|} \frac{\mathrm{d}a}{|a|^4} |\hat{\psi}_1(a)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \mathrm{d}a\, |a|^2 |\hat{\psi}_2(a)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C' |\xi|^{-3/2}$$

根据式(2.4.11),$\hat{M}$ 也是带限的,因此

$$|\hat{M}(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-3/2} \tag{2.4.18}$$

隐含着 $\hat{M}$ 的傅里叶的反变换 M,被很好地定义,带宽受限,且是连续的。

3. M 的下降受 $\hat{M}$ 正则性的控制。对于 $\xi \neq 0$, 容易验证 $\hat{M}$ 对 ξ 可微,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{M}(\xi) = (2\pi)^{1/2} C_{\psi_1,\psi_2}^{-1} \frac{1}{|\xi|} [\hat{\psi}_2(\xi)\, \overline{\hat{\psi}_1(\xi)} + \hat{\psi}_2(\xi)\, \overline{\hat{\psi}_1(-\xi)}]$$

因为 $x\psi_2 \in L^1$,$\hat{\psi}_2$ 可微,所以对于 $\xi = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{M}\right|_{\xi=0} = (2\pi)^{1/2} C_{\psi_1,\psi_2}^{-1}\, \overline{2\hat{\psi}_1(0)}\, \hat{\psi}_2(0) = 0$$

即 $\hat{M}$ 可微。此外,既然 $x\psi_2 \in L^1$,有

$$|\hat{\psi}_2(\xi)| = |\hat{\psi}_2(\xi) - \hat{\psi}_2(0)| \leqslant C \int \mathrm{d}x\, |\mathrm{e}^{-i\xi x} - 1|$$

$$|\psi_2(x)| \leqslant C |\xi| \int \mathrm{d}x\, |x\psi_2(x)| \leqslant C' |\xi|$$

隐含着 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{M}(\xi)\right| \leqslant C''[|\hat{\psi}_1| + |\hat{\psi}_1(-\xi)|]$,所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{M} \in L^2$,紧接着由

$$\int \mathrm{d}x\, |M(x)| \leqslant \left[\int \mathrm{d}x (1 + x^2)^{-1}\right]^{1/2} \left[\int \mathrm{d}x (1 + x^2) |M(x)|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant C\left[\int \mathrm{d}\xi \left(|\hat{M}(\xi)|^2 + \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{M}(\xi)\right|^2\right)\right]^{1/2} < \infty$$

得出 $M\in L^1(\mathbb{R})$。此外

$$\hat{M}(0) = (2\pi)^{1/2}C_{\psi_1,\psi_2}^{-1}\int \frac{\mathrm{d}a}{|a|}\hat{\psi}_2(a)\,\overline{\hat{\psi}_1(a)} = (2\pi)^{-1/2} \text{或} \int \mathrm{d}x M(x) = 1$$

4. 使用式(2.4.17)重写式(2.4.15),为

$$f_{A_1,A_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{A_1}M\left(\frac{x-y}{A_1}\right)f(y) - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{A_2}M\left(\frac{x-y}{A_2}\right)f(y)$$

因为 M 连续可积,并且积分值为 1, 对于 $A_1\to 0$,如果 f 带限,则第一项趋于 $f(x)$,在 x 上连续(简单地使用控制收敛定理就可得出)。第二项的界为

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{A_2}M\left(\frac{x-y}{A_2}\right)f(y)\right|$$
$$\leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{1}{A_2^2}\left|M\left(\frac{x-y}{A_2}\right)\right|^2\right]^{1/2}\left[\int \mathrm{d}y\,|f(y)|^2\right]^{1/2}$$
$$\leqslant A_2^{-1/2}\|M\|_{L^2}\|f\|_{L^2}\leqslant CA_2^{-1/2}$$

因为根据式(2.4.18),$M\in L^2(\mathbb{R})$。当 $A_2\to\infty$时,这一项就趋于 0。 ■

注意:在 Holschneider 和 Tchamitchian 的论文(1990)中,f 和 ψ_1,ψ_2 在稍微一般的条件下,证明了这个定理。 ■

2.5 连续小波变换的基础:再生核 Hilbert 空间(r.k.H.s)

作为式(2.4.2)的特例,对于 $f\in L^2(\mathbb{R})$,有

$$C_\psi^{-1}\iint\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}|(T^{\text{wav}}f)(a,b)|^2 = \int dx\,|f(x)|^2$$

换句话说,T^{wav}把 $L^2(\mathbb{R})$等距地映射到 $L^2(\mathbb{R}^2;C_\psi^{-1}a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b)$,即 $\mathbb{R}^2$ 上的所有复值函数 F 的空间,且 $|\|F\||^2 = C_\psi^{-1}\iint\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}|F(a,b)|^2$ 收敛;当赋予范数 $|\|.\||$,这是一个 Hilbert 空间。$T^{\text{wav}}L^2(\mathbb{R})$的像仅构成一个闭于空间,不是整个空间 $L^2(\mathbb{R}^2;C_\psi^{-1}a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b)$;记这个于空间为 $\mathscr{R}$。

下面的论证说明 $\mathscr{H}$是一个 r.k.H.s。对任意 $F\in\mathscr{H}$,可以找到 $f\in L^2(\mathbb{R}),F=T^{\text{wav}}f$,从式(2.4.2)可得

$$F(a,b) = \langle f,\psi^{a,b}\rangle$$
$$= C_\psi^{-1}\iint\frac{\mathrm{d}a'\mathrm{d}b'}{a'^2}(T^{\text{wav}}f)(a',b')\,\overline{(T^{\text{wav}}\psi^{a,b})(a',b')}$$

$$= C_\psi^{-1}\iint \frac{\mathrm{d}a'\mathrm{d}b'}{a'^2}K(a,b;a',b')F(a',b') \qquad (2.5.1)$$

其中

$$K(a,b;a',b') = \overline{(T^{\mathrm{wav}}\psi^{a,b})(a',b')} = \langle \psi^{a',b'},\psi^{a,b}\rangle$$

式(2.5.1)说明$\mathscr{H}$确实为一个 r. k. H. s.,作为子空间嵌入 $L^2(\mathbb{R}^2;C_\psi^{-1}a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b)$(人们也可直接看出,因为这样的再生核公式不能在整个空间 $L^2(\mathbb{R}^2;C_\psi^{-1}a^2\mathrm{d}a\mathrm{d}b)$上成立,所以$\mathscr{H}$不是整个空间 $L^2(\mathbb{R}^2;C_\psi^{-1}a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b)$)。

在特殊情况下,$\mathscr{R}$成为解析函数的一个 Hilbert 空间。再次限制函数 f,使得 support $\hat{f}C[0,\infty)$,这些函数形成 $L^2(\mathbb{R})$的闭子空间,记为 H^2(它是 Hardy 空间的一个族)。对于选定的 ψ,例如:$\hat{\psi}(\xi)=2\xi e^{\xi}$,当 $\xi\geqslant0$;$\hat{\psi}(\xi)=0$,当 $\xi<0$(ψ 仍然在 H^2 中)。则 $T^{\mathrm{wav}}H^2$ 中的函数可以写为(仅考虑 $a\geqslant0$;参见式(2.4.9))

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \langle f,\psi^{a,b}\rangle \\ &= 2a^{1/2}\int_0^\infty \mathrm{d}\xi \hat{f}(\xi)a\xi e^{-i(b+ia)\xi} \\ &= (2\pi)a^{3/2}G(b+ia) \end{aligned}$$

其中,G 是上半平面上($\mathrm{Im}z>0$)的解析函数。此外,易验证

$$\int_0^\infty \mathrm{d}a\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}ba\,|G(b+ia)|^2 = \int \mathrm{d}x\,|f(x)|^2$$

所以 T^{wav}可以看成:上半平面的所有解析函数从 H^2 到 Bergman 空间的等距映射,所谓 Bergman 空间即为由上半平面的依测度 $\mathrm{Im}z\mathrm{d}(\mathrm{Im}z)\ \mathrm{d}(\mathrm{Re}\ z)$平方可积的解析函数所组成的空间。另一方面,可以证明 Bergman 空间的任意函数,可通过用特定的 ψ 的小波变换,与 H^2 相联系:是等距到上的,所以是一个单式映射或酉映射。当选另外的 ψ,例如 $\psi\in H^2$,当 $\psi\geqslant0$ 时,$\hat{\psi}(\xi)=N_\beta\xi^\beta e^{-\xi}$,$T^{\mathrm{wav}}H^2$ 的像可由另外的上半平面解析函数的 Bergman 空间来确定①。

既然 $T^{\mathrm{wav}}L^2$ 或 $T^{\mathrm{wav}}H^2$ 能由再生核 Hilbert 空间来确定,所以不必惊奇,存在离散的点列(a_a,b_a),f 可完全由$(T^{\mathrm{wav}}f)(a_a,b_a)$确定且重建。尤其是,如果 $T^{\mathrm{wav}}f$ 能由 Bergman 空间的函数确定,则显然,它在离散序列处的值完全确定了函数本身,因为它毕竟是一个解析函数。用数值稳定的方法重建是另外一件(麻烦)事:这种情形不像带限的那么简单,在那里,有一个点 x_n 的特殊序列,其对应的 e_{x_n} 构成 B_Ω 的正交基。在 $T^{\mathrm{wav}}L^2$ 或 $T^{\mathrm{wav}}H^2$ 中,没有那么方便的正交基 e_{a_n,b_n}。下一章,我们将看到这个问题如何解决。

最后,这一节之前,应注意式(2.4.4),或等价的 r. k. H. s. 公式,可看成平方可

① 见本章末注 1。

积群表示理论的结束。在这里,不想讲细节了①。$\psi^{a,b}$实际上是算子$U(a,b)$作用于ψ的结果,算子U由下式定义:

$$|U(a,b)f|(x)=|a|^{-1/2}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

算子$U(a,b)$在$L^2(\mathbb{R})$上是单式的并构成$ax+b$—群

$$U(a,b)U(a',b')=U(aa',b+ab')$$

的一个表示。这个群的表示是不可约(irreducible)的(即,对任意$f\neq 0$,不存在非平凡g与所有$U(a,b)f$都正交,也可等价地说$U(a,b)f$张成整个空间)。下面的结果正确:如果U是$\mathscr{H}$中有左不变测度$d\mu$的Lie—群G不可约的单式表示,且对$\mathscr{H}$中的某些f

$$\int_G d\mu(g)\,|\langle f,U(g)f\rangle|^2<\infty \tag{2.5.2}$$

那么,存在$\mathscr{H}$中的稠密集D,使得性质式(2.5.2)对D中任一个元素$\tilde{f}$都成立。此外,存在一个定义D上的(可能无界)的算子A,使得对所有$\tilde{f}\in D$,和所有$h_1,h_2\in\mathscr{H}$

$$\int_G d\mu(g)\langle h_1,U(g)\tilde{f}\rangle\overline{\langle h_2,U(g)\tilde{f}\rangle}=G_{\tilde{f}}\langle h_1,h_2\rangle \tag{2.5.3}$$

其中$G_{\tilde{f}}=\langle A\tilde{f},\tilde{f}\rangle$,在此小波情形,左不变测度为$a^{-2}da\,db$,$A$是算子

$$(Af)\wedge(\xi)=|\xi|^{-1}\hat{f}(\xi)$$

式(2.5.3)是一般的恒等分解!

接下来的章节,不再讨论这种群结构,主要是因为我们不久将用到带离散下标的小波族,这些与$ax+b$—群的子群无关。

在量子物理,已经研究过恒等分解式(2.5.3)并应用到不同的群G中。与之相联系的族$U(g)f$被称作相干态。这个名称首次用作联系Weyl-Heisenberg—群(下一节还有相关内容),后来扩展用于其他的群(甚至用于不由群生成的相联系的结构)。有关这个主题的很不错的评论和重要论文集可以在Klauder和Skagerstam(1985)的著作中找到。与$ax+b$—群有联系的相干态,这个群现在被称作小波,被Aslaksen和Klauder(1968,1969)首次构造。

2.6 高维连续小波变换

已有几种对式(2.4.4)到$L^2(\mathbb{R}^n)$,$n>1$的推广。一个可能是选择小波$\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$,使其球面对称,其傅里叶变换同样也是球面对称

$$\hat{\psi}(\xi)=\eta(|\xi|)$$

① 见本章末注2。

并且容许条件成为

$$C_{\psi}=(2\pi)^{n}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}\mid\eta(t)\mid^{2}<\infty$$

与证明性质 2.1 节相似,可证:对所有的 $f,g\in L^{2}(\mathbb{R}^{n})$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\overline{(T^{\mathrm{wav}}g)(a,b)}=C_{\psi}\langle f,g\rangle \tag{2.6.1}$$

与以前一样,其中$(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)=\langle f,\psi^{a,b}\rangle$,且 $\psi^{a,b}(x)=a^{-n/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$,$a\in\mathbb{R}_{+}$,$a\neq0$,且 $b\in\mathbb{R}^{n}$,公式(2.6.1)可重写为

$$f=C_{\psi}^{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^{n}}\mathrm{d}b(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b} \tag{2.6.2}$$

也有可能选择一个不是球对称的 ψ,在膨胀和平移的基础上再引入旋转。例如,在二维,我们定义

$$\psi^{a,b,\theta}=a^{-1}\psi\left(R_{\theta}^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$$

其中 $a>0$,$b\in\mathbb{R}^{2}$,R_{θ} 是矩阵

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\alpha\theta\end{pmatrix}$$

容许条件则变为

$$C_{\psi}=(2\pi)^{2}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mid\hat{\psi}(r\cos\theta,r\sin\theta)\mid^{2}<\infty$$

对应的恒等分解为

$$f=C_{\psi}^{-1}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a}{a^{3}}\int_{\mathrm{R}^{2}}\mathrm{d}b\int^{2\pi}\mathrm{d}\theta(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b,\theta)\psi^{a,b,\theta}$$

超过两维的构造类似。Murenzi(1989)研究过这些带旋转角的小波,并由 Argoul et al(1989)应用到 DLA(Diffusion - Limited Aggregates,受限扩散集合)及其他二维分形(two - dimensional fractals)的研究工作中。

2.7 连续窗口傅里叶变换

一个函数 f 的窗口傅里叶变换,给出如下

$$(T^{\mathrm{wav}}f)(\omega,t)=\langle f,g^{\omega,t}\rangle \tag{2.7.1}$$

其中,$g^{\omega,t}(x)=\mathrm{e}^{i\omega x}g(x-t)$。与证明性质 2.4.1 完全相似,对所有 $f_{1},f_{2}\in L^{2}(\mathbb{R})$,有

$$\iint\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t(T^{\mathrm{win}}f_{1})(\omega,t)\overline{(T^{\mathrm{win}}f_{2})(\omega,t)}=2\pi\|g\|^{2}\langle f_{1},f_{2}\rangle$$

它也可重写成

$$f = (2\pi \| g \|^2)^{-1} \iint d\omega dt (T^{win} f)(\omega, t) g^{\omega, t} \tag{2.7.2}$$

这种情况下没有容许条件：任何在 L^2 中的窗口函数都行。一种惯常的 g 的归一化的方法为 $\| g \|_{L^2} = 1$（不需要容许条件是因为 Weyl - Heisenberg—群的幺模性，可参见 Grossmann、Morlet 和 Paul(1985)）。

连续窗口傅里叶变换也可看成从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 r. k. H. s. 的映射；函数 $F \in T^{win} L^2(\mathbb{R})$，都在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中，而且满足

$$F(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \iint d\omega dt K(\omega, t; \omega', t') F(\omega', t')$$

其中 $K(\omega, t; \omega', t') = (g^{\omega', t'}, g^{\omega, t})$（这里假定 $\| g \| = 1$），再次地，选择特定的 g，可将该 r. k. H. s. 归结成解析函数的 Hilbert 空间：如对于 $g(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$，可发现

$$(T^{win} f)(\omega, t) = \exp\left[-\frac{1}{4}(\omega^2 + t^2) - \frac{i}{2}\omega t \right] \phi(\omega + it) \tag{2.7.3}$$

其中 ϕ 是整函数，通过这种方式得到的所有整函数 ϕ，构成 Bargman Hilbert 空间(Bargman(1961))。

从 $g(x) = g_0(x) = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$ 得到的 $g^{\omega, t}$ 经常被称为基相干态（参见 Klauder 和 Skagerstam(1985)）；与之相联系的连续窗口傅里叶变换是基相干态的表示。具有很多优良和有用的性质，我们将在下一节阐述其中之一。对 $g_0(x)$ 应用微分算子 $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1$，可导出

$$\left(-\frac{d}{dx^2} + x^2 - 1 \right) \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2) = 0$$

即，g_0 是 H 的特征值为 0 的特征函数。在量子力学中，H 称为谐振 Hamilton 算子，g_0 是基态（严格地说，H 是谐振 Hamilton 算子的两倍）。H 的另一个特征函数由高阶 Hermite 函数给出

$$\phi_n(x) = \pi^{-1/4} 2^{-n/2} (n!)^{-1/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n \exp(-x^2/2)$$

它满足

$$H\phi_n = 2n\phi_n \tag{2.7.4}$$

（推导式(2.7.4)的标准而简单的方法是写成 $H = A^* A$，其中 $A = x + \frac{d}{dx}$，A^* 是其伴随算子，$A^* = x - \frac{d}{dx}$ 且 $Ag_0 = 0$，$A(A^*)^n = (A^*)^n A + 2n(A^*)^{n-1}$ 则 $H\phi_n = \alpha_n A^* A (A^*)^n g_0 = \alpha_n A 2n (A^*)^{n-1} g_0 = 2n\phi_n$；归一化的 α_n 可以算出来）。众所周知 $\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ 形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基；他们因此构成了 H 的一个"特征函数的完

全集"①。

现在考虑单参数序列 $\psi_s=\exp(-iHs)\psi$,它们是方程

$$i\partial_s\psi_s = H\psi_s \tag{2.7.5}$$

带初始条件 $\psi_0=\psi$ 的解。在特殊的情况 $\psi_0(x)=g_0^{\omega,t}(x)=\pi^{-1/4}e^{i\omega t}\exp[-(x-t)^2/2]$,我们找到 $\psi_s=e^{i\alpha_s}g_0^{\omega_s,t_s}$,其中 $\omega_s=\omega\cos2s-t\sin2s$, $t_s=\omega\sin2s+t\cos2s$, $\alpha_s=\frac{1}{2}(\omega t-\omega_s t_s)$(直接计算容易验证这一点)。那是一个基相干态,当在式(2.7.5)下展开时,保留了基相干态(除去一个不甚重要的相位因子);新相干态(ω_s, t_s)可通过简单的"时—频"面的旋转从初始的(ω, t)得到。

2.8 通过连续变换构造有用算子

恒等分解式(2.4.4)、式(2.7.2)可以改写为:

$$C_\psi^1\iint \frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}\langle\cdot,\psi^{a,b}\rangle\psi^{a,b} = \mathrm{Id} \tag{2.8.1a}$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\langle\cdot,g^{\omega,t}\rangle g^{\omega,t} = \mathrm{Id} \tag{2.8.1b}$$

其中$\langle\cdot,\phi\rangle\phi$ 代表$L^2(\mathbb{R})$中的算子。它作用于 f,成为$\langle f,\phi\rangle\phi$;它是一个秩 1 射影算子(即它的平方和伴随算子都是其本身,且它的值域是一维的)。公式(2.8.1)说明,小波族(或窗口傅里叶函数族)对应的秩 1 射影算子,以相同的权"叠加",恰好是恒等算于(像以前一样,积分式(2.8.1)在弱意义上成立)。如果不同的秩 1 射影算子赋予不同的权,再作同样的叠加,会怎么样?如果权函数都是适当的,最终得到一个有定义的算子,它不同于恒等算子。如果权函数有界,则相应的算子也有界,但是在许多例子中,考虑无界权函数是有益的,相应地得到无界算子②。本节我们将再次看到一些有趣的例子(有界的或无界的)。

从窗口傅里叶入手。用量子力学常用的记号 p, q(动量,位置)(而不用"频率一时间"平面的 ω,t 记号)重写式(2.8.1(b)),并且插入权函数 $w(p, q)$

$$W=\frac{1}{2\pi}\iint \mathrm{d}p\mathrm{d}q\,w(p,q)\langle,g^{p,q}\rangle g^{p,q} \tag{2.8.2}$$

如果 $w\notin L^\infty(\mathbb{R}^2)$,则 W 可能无界,因而并非处处都有定义,W 的定义域可取为 $\left\{f;\iint\mathrm{d}p\mathrm{d}q\,|w(p,q)|^2|\langle f,g^{p,q}\rangle|^2<\infty\right\}$,它对于适当的 w 和 g 将是一个稠

① 见本章末注 3。

② 见本章末注 4。

密集①。在量子力学中,两个有用的例子是:(1) $w(p,q)=p^2$,得出 $W=\frac{d^2}{d^2x}+C_g\mathrm{Id}$,其中 $C_g=\int d\xi\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2$;(2) $w(p,q)=v(q)$ 对应的 W 是势乘算子(multiplicative potential operater):$(Wf)(x)=V_g(x)f(x)$,其中 $V_g(x)=\int dqv(q)|g(x-q)|^2$。熟悉量子力学基础知识的读者会注意到,在两个例子中,W 算子与"量子化形式"的相空间函数 $w(p,q)$(单位:$\hbar=1$)非常一致,但带了点扭曲:第一例中,额外的常数 C_g;第二例中,$v^*|g|^2$ 中关于势函数 v 的变量代换。事实上,Lieb(1981)曾用这两个公式证明 Thomas-Fermi 理论,关于原子、分子的准古典理论,是"渐进"正确的(对于 $Z\to\infty$,即非常重的原子);它给出了非常复杂的量子力学模型的主要阶次的项。Lieb 的证明用到上述两个例子的三维情形(而非一维);当然,他真正想考虑的算子是 $-\Delta=-\partial_{x_1}^2-\partial_{x_2}^2-\partial_{x_3}^2$ 和 $V(x)=[x_1^2+x_2^2+x_3^2]^{-1/2}$,所以他想选一个合适的 g,并处理好额外的常数 C_g,运用其他的方式去处理 v 和 $v*|g|^2$ 的差别。注意,选一个可积而奇异的 $v(q)$(例如三维 Coulomb 势),总得到非奇异的 V_g。式(2.8.2)型算子不能代表这种奇异性。

有许多式(2.8.2)型算子的应用。纯数学中,有时他们被称作 Toeplitz 算子,并且整本书都可能写这些东西。在量子光学,他们又称作"P 型算子",这个主题也有广泛的参考文献(见 Klauder 和 Skagerstam(1981))②。但是我们还是回到信号分析,并且看如何用式(2.8.2)建立时—频局部化算子。

令 S 为 $\mathbb{R}^2$ 的任一个可测子集。现在我们回到时—频记号并通过式(2.8.2)定义与 S 的指示函数 a(当 $(\omega,t)\in S$ 时,$a(\omega,t)=1$,当 $(\omega,t)\notin S$ 时,$a(\omega,t)=0$)相对应的算子 L_s 为

$$L_s=\frac{1}{2\pi}\iint_{(\omega,t)\in S}d\omega dt\langle\cdot,g^{\omega,t}\rangle g^{\omega,t}$$

它可以通过恒等分解技术由下式得到

$$\begin{aligned}\langle L_sf,f\rangle&=\frac{1}{2\pi}\iint d\omega dt\,|\langle f,g^{\omega,t}\rangle|^2\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\iint d\omega dt\,|\langle f,g^{\omega,t}\rangle|^2=\|f\|^2\end{aligned}$$

另一方面,显然 $\langle L_sf,f\rangle\geqslant0$,也就是

$$0\leqslant L_s\leqslant\mathrm{Id}$$

如果 S 是一个有界集,则 L_s 是一个迹类算子(参见预备知识),因为对于任意

---

① 见本章末注 5。

② 见本章末注 6。

$L^2(\mathbb{R})$中的正交基$(u_n)_{n\in N}$

$$\sum_n \langle L_s u_n, u_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\iint_{(\omega,t)\in S} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}t \sum_n |\langle u_n, g^{\omega,t}\rangle|^2$$

(据 Lebesgue 的控制收敛定理,积分和求和的次序可以交换)

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{(\omega,t)\in S} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}t \| g^{\omega,t}\|^2 = |S|$$

其中,$|S|$是 S 的测度，接着,存在 L_s 的特征向量的完全集合,其对应特征值递减至 0,即

$$L_s\phi_n = \lambda_n\phi_n$$

$$\lambda_n \geqslant \lambda_{n+1} \geqslant 0, \quad \lim\lambda_n = 0$$

$$\{\phi_n; n \in \mathbb{N}\} \text{ 是 } L^2(\mathbb{R}) \text{ 的正交基}$$

这个算子 L_s 有非常自然的解释。如果窗函数 g 是足够合理的局部化的，并且在时域及频域都以 0 为局域中心,则$\langle f, g^{\omega,t}\rangle g^{\omega,t}$可看成$f$ 的“基本构件”,在“时—频”平面的(ω, t)附近是局部化的。把这些构件全部加起来又得到f;而 $L_S f$ 仅仅是满足$(\omega,t)\in S$ 的构件的和。因此,$L_S f$ 的作用是:只从 f 的“时—频”平面上与 S 有关的区域中析取信息,并且,从一个函数的局部化信息中构造,此函数仅在 S(或非常靠近)有定义。这就是诸如 2.3 节中时—频局部化算子的实质！我们能进一步研究比矩形区域$[-\Omega,\Omega]\times[-T,T]$更一般的集合 S 对应的L_S(注意,即使$S=[-\Omega,\Omega]\times[-T,T]$,$L_s$ 也与 2.3 节中的 $Q_T P_\Omega Q_T$ 不同)。不幸的是,对多数 S 和g 的选择,L_S 的特征值和特征函数难于表征,这种构造方式作用有限。然面,有一种 g 的选择和一族S 集合的特定选择,使得这一切都显得非常自然面明显。取 $g(x)=g_0(x)=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$,和 $S_R=\{(\omega,t);\omega^2+t^2\leqslant R^2\}$。我们记相应的局部化算子为 L_R

$$L_R = \frac{1}{2\pi}\iint_{\omega^2, t^2<R^2} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\langle\cdot, g^{\omega,t}\rangle g^{\omega,t}$$

此算子 L_R 与 2.7 节中的谐振 Hamilton 算子 $H=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x}+x^2-1$ 可交换,这一点可从下面的论述中看出。既然 $\mathrm{e}^{-iH_s}g_0^{\omega,t}=\mathrm{e}^{i\alpha_s}g_0^{\omega_s,t_s}$,其中 $\alpha_s=(\omega t-\omega_s t_s)/2\in\mathbb{R}$,有

$$\langle \mathrm{e}^{-iH_s}f, g_0^{\omega,t}\rangle g_0^{\omega,t} = \langle f, \mathrm{e}^{iH_s}g_0^{\omega,t}\rangle g_0^{\omega,t} = \mathrm{e}^{-i\alpha_{-s}}\langle f, g^{\omega_{-s},t_{-s}}\rangle g_0^{\omega,t}$$

所以

$$L_R\mathrm{e}^{iH_s} = \frac{1}{2\pi}\iint_{\omega'^2+t'^2\leqslant R^2} \mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\langle\cdot, g^{\omega_{-s},t_{-s}}\rangle \mathrm{e}^{-i(\omega t-\omega_{-s}t_{-s})/2} g_e^t$$

如果作代换 $\omega'=\omega_{-s}, t'=t_{-s}$,则易得(参见 2.7 节结尾中关于 α_s,ω_s,t_s 的显式公

式) $g_0^{\omega,t} = g_0^{\omega'_s, t'_s} = \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega' t' - \omega t)\right] e^{-iH_s} g_0^{\omega', t'}$；另一方面，在 $(\omega, t) \to (\omega', t')$ 的变换中，积分域是不变的(因为这个变换只是在时—频空间简单地旋转)，所以

$$L_R e^{-iH_s} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega'^2 + t'^2 \leqslant R^2} d\omega' dt' \langle \cdot, g^{\omega', t'} \rangle e^{-iH_s} g_0^{\omega', t'} = e^{-iH_s} L_R$$

正如前述，L_R 与 H 可互换。接下来可得出，存在一个正交基，在这个基下，L_R 与 H 都是可对角化的(参见预备知识)。但是，因为 H 的特征值都是非退化的，只存在一个基能对角化 H，称作 Hermite 函数(见 2.7 节)。由此知，Hermite 函数 ϕ_n 必定是 L_R 的特征函数。特征值可由下式计算

$$\langle \phi_n, g_0^{\omega,t} \rangle = (n!2^n)^{-1/2}(-i)^n(\omega + it)^n \exp\left[-\frac{1}{4}(\omega^2 + t^2) - \frac{i}{2}\omega t\right]$$

(这个表达式有许多计算方法。一种办法是通过 Bargmann Hilbert 空间，将在本章末的注 3 中阐释)。于是得出

$$L_R \phi_n = \lambda_n(R) \phi_n$$

其中

$$\begin{aligned}
\lambda_n(R) &= \langle L_R \phi_n, \phi_n \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega^2 + t^2 \leqslant R^2} d\omega dt \, |\langle \phi_n, g_0^{\omega,t} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega^2 + t^2 \leqslant R^2} d\omega dt \, \frac{1}{n!2^n}(\omega^2 + t^2) \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega^2 + t^2)\right] \\
&= \int_0^R dr r \frac{1}{n!2^n} r^{2n} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{R^2/2} ds s^n e^{-s}
\end{aligned}$$

它被称作不完全"Γ－函数"。从这个显式的 $\lambda_n(R)$ 公式，可作为 n 和 R 的函数研究它。这里只概括地说一下结果(详细内容见 Daubechies(1988))；图 2.4 给出了 $\lambda_n(R)$ 对应于三个不同 R 值的图线。对于每个 R，$\lambda_n(R)$ 随着 n 的增大而单调递减；n 小的时候接近 1，n 大的时候接近 0，门槛值对应着急转点，例如定义为，$n_{\text{thr}} = \max\{n;\ \lambda_n \geqslant 1/2\}$，可得出 $n_{\text{thr}} = R^2/2$。注意，这个值等于 $\pi R^2/2\pi$，也就是说，时—频局部化区域 S_R 的面积乘以 Nyquist 密度，与 2.3 节的结论一样；然而

$$\#\{n;\ 1 - \varepsilon \geqslant \lambda_n \geqslant \varepsilon\} \leqslant C_\varepsilon R$$

(尽管可与式 2.3.2 中的对数宽度相比)，但与对应于大 R 的 n_{thr} 相比，仍然可忽略，另一与 2.3 节显著不同的是，这里的特征函数 ϕ_n 不依赖于 S_R 区域的大小(不

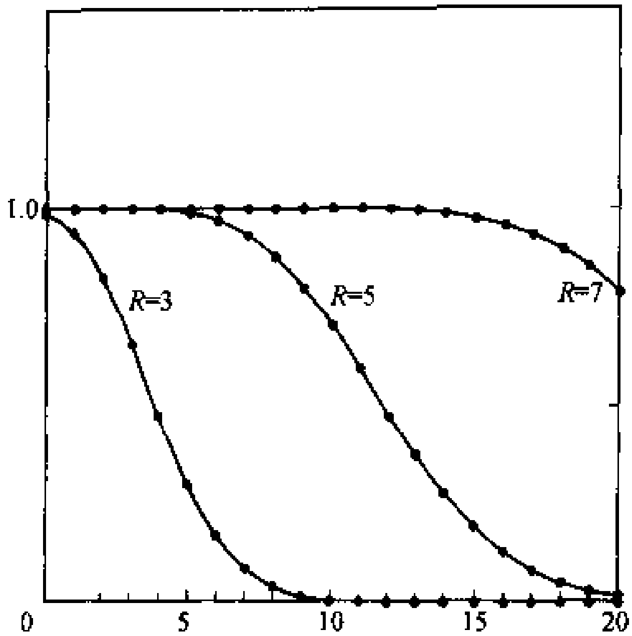


图 2.4 特征值 $\lambda_{n(R)}(R=3,5$ 和 $7)$

像椭球波函数):它“与 R 的依赖性”彻底集中于 $\lambda_n(\mathbf{R})$ 中。[①]

对于连续小波变换,存在与上面所讲类似的例子。我们又可在式(2.8.1a)的积分中插入非“常值”函数 $w(a,b)$,构造不同于恒等算子的算子 W。一个例子是三维中的 $w(a,b)\sim a^2$,且用球对称的 ψ(其中,恒等分解由式(2.6.2)给出),也就是说

$$(Wf)(x)=C_\psi^{-1}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}a}{a^4}\int_{R^3}\mathrm{d}b\,\frac{C_\psi}{\tilde{C}_\psi}a^2(T^{\mathrm{wav}}f)(a,b)\psi^{a,b}(x)\qquad(2.8.3)$$

其中

$$\hat{\psi}(\xi)=\phi(|\xi|)$$
$$\tilde{C}_\psi=(2\pi)^3\int_0^\infty\mathrm{d}ss\phi(s)$$

因为 $g(x)=|x|^{-2}$ 的三维傅里叶变换是 $\hat{g}(\xi)=\sqrt{2}\big/(\sqrt{\pi}|\xi|)$(在分布的意义下),容易验证,$Wf$ 也可写成

$$(Wf)(x)=\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{d}y\,\frac{1}{|x-y|}f(y)\qquad(2.8.4)$$

因此,$\langle Wf,g\rangle$ 代表两个电荷分布 f 和 g 之间的相互作用的 Coulomb 势能。例如,这个公式用于 Fefferman 和 de la Liave(1986)有关相对论的物质稳定性论文。注意,$\langle Wf,g\rangle$ 在式(2.8.3)的表示下是对角的(这刚好就是它在 Fefferman 和 de la Llave(1986)的论文中有用的原因)。还需注意,这个对角小波表示完全捕捉到式(2.8.4)中的核的奇异性:没有窗口傅里叶情形下对奇异性的“修剪”。这是由于如

① 见本章末注 7。

下原因:小波能放大奇异性(极短时高频特征的极端表现),而短时傅里叶函数作不到这一点(见1.2节和2.9节)①。

与窗口傅里叶情形一样,我们可以把式(2.8.1a)积分限于(a, b)—空间的子集S,并定义时—频局部化算子L_S.,对于可测集S,这一算子是很好定义的,且$0 \leqslant L_S \leqslant 1$。对于不包括任意使$a=0$的点的紧致$S$,$L_S$是一个迹类算子。对于一般的$S$,特征函数和特征值可能难于表征,但也有特定选择的$\psi$和$S$,使得$L_S$的特征函数和特征值可明确表示。对它们的分析与窗口傅里叶情形相似,但有点技巧。我们不再写有关结果,读者可在Paul(1985)或Daubechies和Paul(1988)上查询所有的细节。一个特殊的这样的ψ是,当$\xi \geqslant 0$时,$\hat{\psi}(\xi)=2\xi e^{-\xi}$,其余为0,此处讨论的出发点(见式(2.4.9))的恒等分解为

$$C_{\psi}^{-1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}b}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\left[\langle\cdot,\psi_+^{a,b}\rangle\psi_+^{a,b}+\langle\cdot,\psi_-^{a,b}\rangle\psi_-^{a,b}\right]=1$$

其中,$\psi_+=\psi$,$\hat{\psi}_-(\xi)=\hat{\psi}(-\xi)$。考虑的算子$L_C=L_{S_C}$按下式给出

$$L_C = C_{\psi}^{-1}\iint_{(a,b)\in S_C}\frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}\left[\langle\cdot,\psi_+^{a,b}\rangle\psi_+^{a,d}+\langle\cdot,\psi_-^{a,b}\rangle\psi_-^{a,b}\right]$$

其中$S_C=\{(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R};a^2+b^2+1\leqslant 2aC\}$,且$C\geqslant 1$,在$(a,b)$—空间上半复平面($z=b+ia$)的表示下,$S_C$为圆盘$|z-iC|^2\leqslant C^2-1$,谐振Hamilton算子的角色由$H$扮演,定义为

$$H(f)\wedge(\xi)=\left[-\xi\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+\xi+\frac{1}{\xi}\right]\hat{f}(\xi)$$

对于这个算子H,有

$$\exp(-iHt)\psi_+^{a,b}=e^{i\alpha_t(a,b)}\psi_+^{a(t),b(t)}$$

其中

$$b(t)+ia(t)=z(t)=\frac{z\cos t+\sin t}{\cos t-z\sin t}$$

其中$z=b+ia$容易验证,流量$z\rightarrow z(t)$在所有圆周$|z-iC|^2=C^2-1$上保持不变,如图2.5所示。因此H和L_C可交换,从而它们能同时对角化②。H的特征值都有退化度2;对于每个特征值$E_n=3+2n$,都可找到两个特征函数

$$(\psi_n^+)\wedge(\xi)=\begin{cases}2\sqrt{2}[(n+2)(n+1)]^{-1/2}\xi L_n^2(2\xi)e^{-\xi} & \xi\geqslant 0\\ 0 & \xi\leqslant 0\end{cases}$$

和$(\psi_n^-)\wedge(\xi)(\psi_n^+)\wedge(-\xi)$。此处,$L_n^2$是Laguerre多项式(2是上标,不是平方),由下面的一般公式给出

① 见本章末注8。

② 见本章末注9。

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(\alpha+m+1)}\frac{1}{m!}x^m$$

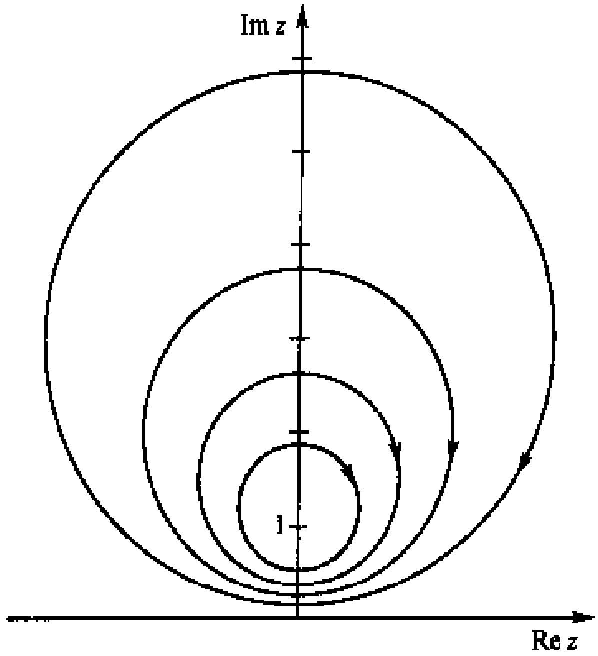


图 2.5　$z(t) = \frac{z\cos t + \sin t}{\cos t - z\sin t}$的通量线

因为算子 L_C 与奇偶算子(parity operation)$(\Pi f)\wedge(\xi) = \hat{f}(-\xi)$可交换,接着得出,$\psi_n^{+}$,同样是 L_C 的特征函数(由于 H 的退化,并不是 H 的每个特征函数都必是 L_C 的特征函数)。L_C 的对应的特征值是

$$\lambda_n^{+} = \lambda_n^{-} = (n+1)\left(1 - \frac{1}{C+1}\right)^{n+1}\left(\frac{2}{C+1} + \frac{1}{n+1}\right)$$

(这意味着 L_C 与 H 有同样的退化度,所以,这种情况下,H 的每个特征函数都是 L_C 的特征函数)。因此用 $\psi_n^e = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^{+} + \psi_n^{-})$和 $\psi_n^o = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_n^{+} - \psi_n^{-})$作为特征函数;这样作的优点是这些函数是实的。图 2.6 显示出前几个 ψ_n^e, ψ_n^o(e 表示偶数,o 表示奇数)的图。对于 C 的各种各样的值,$\lambda_n(C)$的图如图 2.7 所示。对于适当大的 C,$\lambda_n(C)$起到我们所期望的时一频局部化算子特征值的作用:当 n 小的时候,接近 1,且 $\lambda_o(C) = 1 - \frac{4}{(C+1)^2}$时,迅速靠近 0,$n$ 依赖于 C。更精确地,对于 $\gamma \in (0,1)$,$\lambda_n(C)$穿越 γ 时的 n 为 $n = \eta C + O(1)$(C 大),且 $\eta(2+\eta^{-1})(1-2C^{-1})^{\eta C} = \gamma$ 或 $2\eta - \ln(1+2\eta) = -\ln\gamma + O(C^{-1})$。这蕴含着

$$\#\{\text{特征函数};\lambda_n(C)\geqslant\gamma\}=2\#\{n;\ \lambda_n(C)\geqslant\gamma\}$$
$$=2CF^{-1}(-\ln\gamma)+O(1)$$

其中,$F(t)=2t-\ln(1+2t)$。特别地

$$\#\{\text{特征函数};\lambda_n(C)\geqslant 1/2\}=2CF^{-1}(\ln 2)+O(1)\qquad(2.8.5)$$

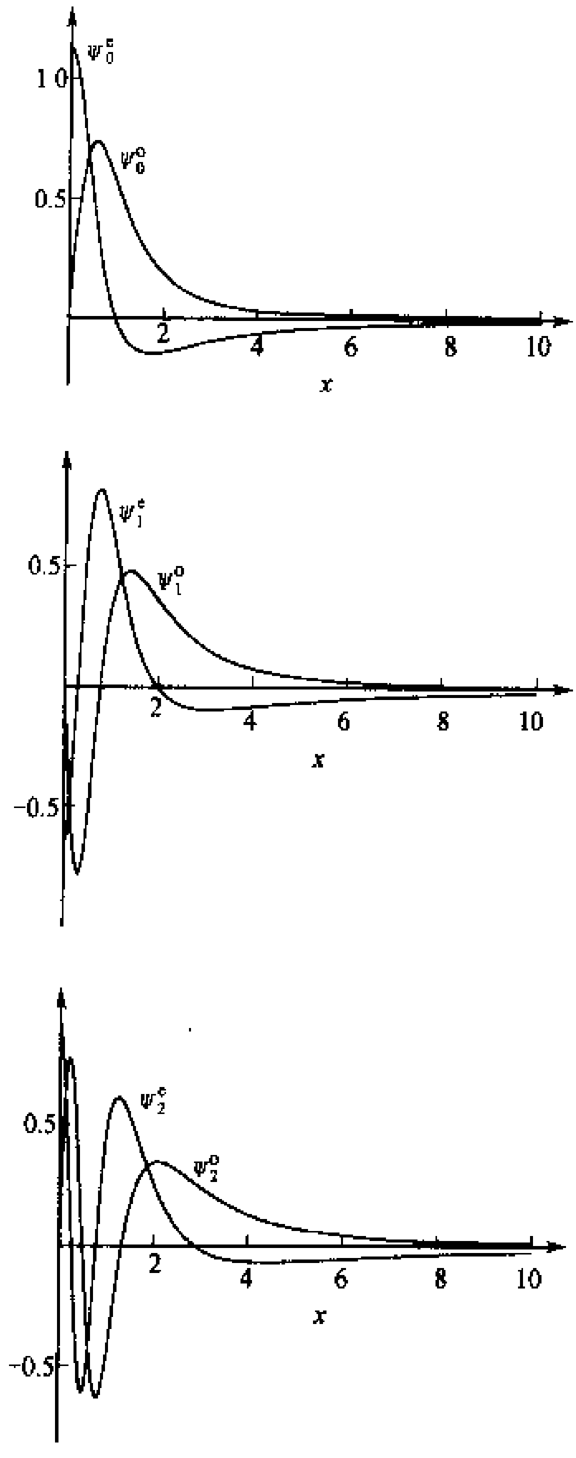


图 2.6　特征函数 ψ_n^e,ψ_n^o 的曲线($n=0,1$ 和 2)

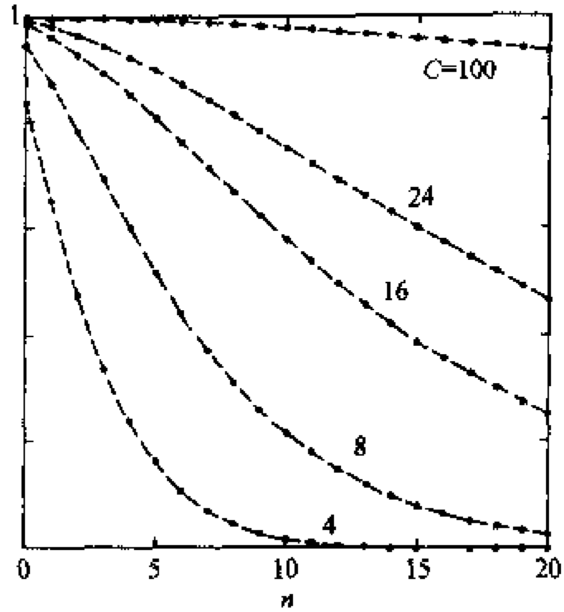


图 2.7　不同 C 时的特征值 $\lambda_n(C)$

为了将它与 Nyquist 密度作比较，首先在时—频空间找到 L_C 对应的区域的面积。为做到这点，我们首先回到 $\psi_{\pm}^{a,b}$，有

$$\int dx \mid \psi_{\pm}^{a,b}(x) \mid^2 = b\int d\xi \left| (\psi_{\pm}^{a,b}) \wedge (\xi) \right|^2 \xi = \pm \frac{3}{2a}$$

因此 $S_C = \{(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; a^2+b^2+1 \leqslant 2aC\}$ 对应于时—频集

$$\tilde{S}_C = \left\{(\omega,t) \in R^2; t^2 + \frac{9}{4\omega^2} + 1 \leqslant \frac{3C}{\mid \omega \mid}\right\}$$

它对应着低频，面切去高频；图 2.8 将时—频局部化集和窗口傅里叶的圆盘情形做了对比①。$\tilde{S}_C$ 的面积是 $|\tilde{S}_C| = 6\pi(C-1)$，结合此式和式(2.8.4)，得

$$\begin{aligned} &\frac{\#\{\text{特征函数}; \lambda_n(C) \geqslant 1/2\}}{\mid \tilde{S}_C \mid} \\ &= \frac{1}{3\pi} F^{-1}(\ln 2) + O(C^{-1}) \\ &\approx \frac{646}{2\pi} + O(C^{-1}) \end{aligned}$$

它不同于 Nyquist 密度！这个矛盾是显而易见的，乃由于 $\lambda_n(C)$ 下降区的宽度与 C 成正比，也与 $|\tilde{S}_C|$ 成正比。对于 $\epsilon > 0$，确实有

① 见本章末注 10。

$$\#\{\text{特征函数}; \varepsilon \leqslant \lambda \leqslant 1-\varepsilon\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}|\tilde{S}_C|\left\{\frac{2}{3}[F^{-1}(|\ln(1-\varepsilon)|)-F^{-1}(|\ln\varepsilon|)]+O(|\tilde{S}_C|^{-1})\right\}$$

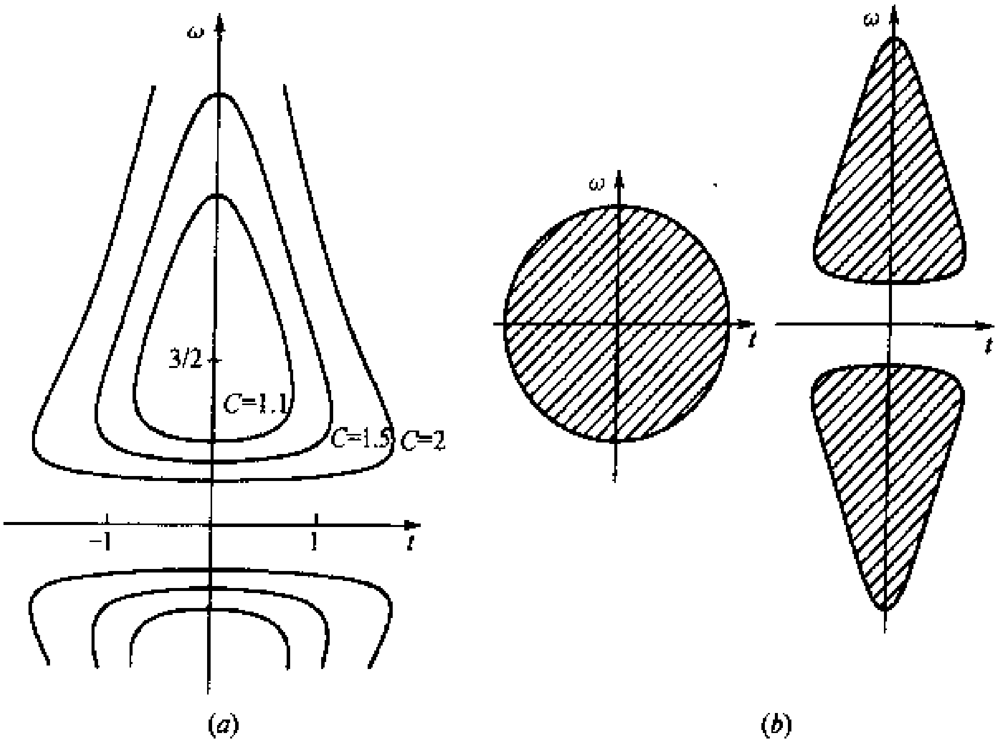


图 2.8 时—频局部化集和窗口傅里叶的圆盘情形对比

(a)不同的 C 对应的集合 $\tilde{S}_C=\left\{(t,\omega);\ t^2+\frac{g}{\omega^2}+1\leqslant\frac{3C}{|\omega|}\right\}$; (b)窗口傅里叶变换的时—频局部化集(左边,圆盘 $S_R=\{(t,\omega);\ t^2+\frac{g}{\omega^2}\leqslant R^2\}$ 和小波变换(右)的对比)

与椭球波情形相对比,当 $|S|\to\infty$,花括号内的表达式与 $|S^{-1}|\lg|S|$ 一样,趋于 0;在窗口傅里叶情形时,$|S|\to\infty$,它与 $|S|^{-1/2}$ 表现相似。当前的事实是,由 $\psi_{\pm}^{a;b}$ 的非一致时—频局部化算子造成下降区的宽度与 $|\tilde{S}_C|$ 同阶;它告诫我们,在处理小波时,对有关时—频密度的直觉要特别小心。在第 4 章还要讨论这个问题。

2.9 连续小波变换作为数学变焦:局部正则性的表征

本节内容全部来源于 Holschneider 和 Tchamitchian(1990),他们发展这项技术的部分原因是研究 Riemann 提出的不可微函数的局部正则性。

定理 2.9.1 假定 $\int dx(1+|x|)|\psi(x)|<\infty$,且 $\hat{\psi}(0)=0$。如果一个有界函数 f 有指数为 α,$0<\alpha\leqslant1$ 的 Hölder 连续,即

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^{\alpha}$$

则它的小波变换满足

$$| T^{\mathrm{wav}} f(a,b) | = | \langle f, \psi^{a,b} \rangle | \leqslant C' | a |^{\alpha+1/2}$$

证明:因为 $\int \mathrm{d}x \psi(x) = 0$,有

$$\langle \psi^{a,b}, f \rangle = \int \mathrm{d}x \, | a |^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \overline{[f(x) - f(b)]}$$

所以

$$| \langle \psi^{a,b}, f \rangle | \leqslant \int \mathrm{d}x \, | a |^{-1/2} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| C | x - b |^{2}$$

$$\leqslant C | a |^{\alpha+1/2} \int \mathrm{d}y \, | \psi(y) | | y |^{\alpha}$$

$$\leqslant C' | a |^{\alpha+1/2}$$

下面是逆定理。 ■

定理 2.9.2 假定 ψ 是紧支的,也假定 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 有界连续。如果对于某些 $\alpha \in [0,1]$,f 的小波变换满足

$$| \langle f, \psi^{a,b} \rangle | \leqslant C | a |^{\alpha+1/2} \tag{2.9.1}$$

则 f 是 Hölder 连续的,指数为 α。

证明:

1. 选紧支和连续可微的 ψ_2, $\int \mathrm{d}x \psi_2(x) = 0$。规范化 ψ_2 以使 $C_{\psi,\psi_2} = 1$。则据性质 2.4.2 得

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}b \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi_2^{a,b}(x)$$

根据 a 把积分拆成两部分,$|a| \leqslant 1$ 和 $|a| \geqslant 1$,且分别称两部分为 f_{SS}(小尺度)和 f_{LS}(大尺度)。

2. 首先 f_{LS} 对 x 一致有界:

$$|f_{\mathrm{LS}}(x)| \leqslant \int_{|a| \geqslant 1} \frac{\mathrm{d}b}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}b \, | \psi_2^{a,b}(x) | \, \| f \|_{L^2} \| \psi \|_{L^2}$$

$$\leqslant C \int_{|a| \geqslant 1} \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}b \, | a |^{-1/2} \left| \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|$$

$$\leqslant C \| \psi_2 \|_{L^2} \int_{|a| \geqslant 1} \mathrm{d}a \, | a |^{-3/2} = C < \infty \tag{2.9.2}$$

其次,着眼于当 $|h| \leqslant 1$ 时的 $|f_{\mathrm{LS}}(x+h) - f_{\mathrm{LS}}(x)|$

$$| f_{\mathrm{LS}}(x+h) - f_{\mathrm{LS}}(x) | \leqslant \int_{|a| \geqslant 1} \frac{\mathrm{d}a}{a^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}b \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, | f(y) | \left| \psi\left(\frac{y-b}{a}\right) \right| \left| \psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right) - \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right) \right| \tag{2.9.3}$$

因为 $|\psi_2(z+t) - \psi_2(z)| \leqslant C|t|$,且对于某些 $R < \infty$,ψ 和 ψ_2 的支集 $\subset [-R, R]$,可由下式估界

$$(2.9.3)\leqslant C'|h|\int_{|a|\geqslant 1}\mathrm{d}a a^{-4}\int_{\substack{x-b\leqslant|a|R+1\\|y-b|\leqslant|a|R}}\mathrm{d}b\int\mathrm{d}y|f(y)|$$

$$\leqslant C''|h|\int_{|a|\geqslant 1}\mathrm{d}a|a|^{-3}\int_{|y-x|\leqslant 2|a|R+1}\mathrm{d}y|f(y)|$$

$$\leqslant C''|h|\,\|f\|_{L^2}\int_{|a|\geqslant 1}\mathrm{d}a|a|^{-3}(4|a|R+2)^{1/2}\leqslant C'''|h|$$

上式对所有$|h|\leqslant 1$成立;再加上式(2.9.2)的界,可得出结论:对所有h,$|f_{ss}(x+h)-f_{LS}(x)|\leqslant C|h|$,对$x$一致成立。注意,这里的估计未用到式(2.9.1):f_{LS}总是正则的。

3.小尺度部分f_{SS}也是一致有界的

$$|f_{ss}(x)|\leqslant C\int_{|a|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b|a|^{\alpha+d/2}|a|^{-1/2}\left|\psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|$$

$$\leqslant C'\|\psi_2\|L^1\int_{|a|\leqslant 1}\mathrm{d}a|a|^{-1+\alpha}=C''<\infty$$

4.因此我们只需检查对小h,如$|h|\leqslant 1$,$|f_{ss}(x+h)-f_{ss}(x)|$的估计。再次使用$|\psi_2(z+t)-\psi_2(z)|\leqslant C|t|$,有

$$|f_{ss}(x+h)-f_{ss}(x)|$$

$$\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b|a|^{\alpha}\left(\left|\psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|+\left|\psi_2\left(\frac{x+h-b}{a}\right)\right|\right)$$

$$+\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{|x-b|\leqslant|a|R+|h|}\mathrm{d}b|a|^{\alpha}C\left|\frac{h}{a}\right|$$

$$\leqslant C'\Big[\|\psi_2\|L^2\int_{|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a|a|^{-1+\alpha}+|h|$$

$$\cdot\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant 1}\mathrm{d}a|a|^{-3+\alpha}(|a|R+|h|)\Big]$$

$$=C''|h|^{\alpha}$$

即f是Hölder连续,指数为α。 ■

定理2.9.1和定理2.9.2合起来说明,一个函数的Hölder连续性,可由它的小波变换的绝对值的下降性来表征($d=1$除外,没有完全的等价)。注意,我们没有假定ψ本身的任何正则性。除了ψ的衰减条件,仅能利用$\int\mathrm{d}x\psi(x)=0$(尽管这个条件没有在定理2.9.2中明显地提出要求,ψ无论如何都满足它,否则,定理(2.9.1)的界不成立)。如果ψ有更多的矩为0,f的高阶可微性和它的最高阶导数的Hölder连续性同样能由小波系数的衰减性来表征:为了能表征$f\in C^n$和$f^{(n)}$指数为α的Hölder连续性,我们将需要小波ψ,满足条件对$m=0,1,\cdots,n$,$\int\mathrm{d}x x^m\psi(x)=0$,当$\alpha\in[0,1]$,对于这种小波,有$f\in C^n$,所有的$f^{(m)}$,$m=0,1,$

$\cdots,n$,都是有界和平方可积的,且 $f^{(n)}$ 的 Hölder 连续指数为 $\alpha \Leftrightarrow$

$$|\langle f,\psi^{a,b}\rangle| \leqslant C|a|^{n+1/2+\alpha}$$

在 a 上一致成立。

重申,我们不要求 ψ 的非正则性。

在这些特征中,最引人注目的要算是它们仅仅包含了小波变换的绝对值这一点了。值得注意,只要窗函数 g 选的足够光滑,人们也能从窗口傅里叶变换 $T^{\text{win}}f(\omega,t)$ 的绝对值关于 ω 的下降性来导出函数 f 的正则性。但是,在大多数情形,从 $|T^{\text{win}}f(\omega,t)|$ 计算出的 Hölder 指数值都不是最优的。为了得到更真实的表征,$T^{\text{win}}f(\omega,t)$ 的相位也应在考虑之列,例如 Littlewood - Paley 型估计(请参看 Frazier,Jawerth 和 Wiess(1991))。

小波变换也可用来表征局部正则性,其中一些结果由窗口傅里叶变换是不能得到的,即使将相位考虑进去也是如此。下面的两个定理可再次从 Holschneider 和 Tchamitchian(1990)引来。

定理 2.9.3 设 $\int dx(1+|x|)|\psi(x)|<\infty$ 和 $\int dx\psi(x)=0$,如果有界函数 f 在 x_0 处 Hölder 连续,其指数为 $\alpha\in[0,1]$,亦即

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqslant C|h|^{\alpha}$$

则

$$|\langle f,\psi^{a,x_0+b}\rangle| \leqslant C|a|^{1/2}(|a|^{\alpha}+|b|^{\alpha})$$

证明: 由平移,我们可以假定 $x_0=0$。再由 $\int dx\psi(x)=0$,有

$$\begin{aligned}|\langle \psi^{a,b},f\rangle| &= \int dx\,|f(x)-f(0)|\,|a|^{-1/2}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \\ &\leqslant C\int dx\,|x|^{\alpha}\,|a|^{-1/2}\left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| \\ &\leqslant C|a|^{\alpha+1/2}\int dy\left|y+\frac{b}{a}\right|^{\alpha}|\psi(y)| \\ &\leqslant C'|a|^{1/2}(|a|^{\alpha}+|b|^{\alpha}) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

定理2.9.4 设 ψ 有是紧支撑,又 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 有界并连续。如果对某个 $r>0$,且 $\alpha\in[0,1]$

$$|\langle f,\psi^{a,b}\rangle| \leqslant C|a|^{\alpha+1/2}$$

对 b 一致成立,且

$$|\langle f,\psi^{a,b+x_0}\rangle| \leqslant C|a|^{1/2}\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\lg|b||}\right)$$

则 f 在 x_0 点处具有指数为 α 的 Hölder 连续性。

证明:

1.证明的开始与定理 2.9.2 的证明一样,其中的前三点不加以改变地引用过来,仅第三点中 α 的角色现在用 γ 代替。

2. 因此仅需检查对小 $h|f_{ss}(x_0+h)-f_{ss}(x_0)|$ 的估计。利用平移,不妨设 $x_0=0$,得

$$
\begin{aligned}
&|f_{ss}(h)-f_{ss}(0)|\\
\leqslant&\int_{|a|\leqslant|h|^{\alpha/\gamma}}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\,|a|^{\gamma}\left|\psi_2\left(\frac{h-b}{a}\right)\right|\\
&+\int_{|h|^{\alpha/\gamma}\leqslant|a|\leqslant|h|}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\lg|b||}\right)\left|\psi_2\left(\frac{h-b}{a}\right)\right|\\
&+\int_{|a|\leqslant|h|}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\lg|b||}\right)\left|\psi_2\left(-\frac{b}{a}\right)\right|\\
&+\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant1}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}b\left(|a|^{\alpha}+\frac{|b|^{\alpha}}{|\lg|b||}\right)\left|\psi_2\left(\frac{h-b}{a}\right)-\psi_2\left(-\frac{b}{a}\right)\right|
\end{aligned}
\tag{2.9.4}
$$

其中已假定了 $\alpha>\gamma$(如果 $\alpha\leqslant\gamma$,则变得更简单)。分别用 T_1、T_2、T_3 和 T_4 表示式(2.9.4)右端的四项。

3. $T_1\leqslant\int_{|a|\leqslant|h|^{\alpha/\gamma}}\mathrm{d}a\,|a|^{-1+\gamma}\,\|\psi_2\|_{L^1}\leqslant C|h|^{\alpha}$

4. 在第二项,由 $\text{support}\,\psi_2\subset[-R,R]$ 得

$$
\begin{aligned}
T_2\leqslant&\int_{|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a\,|a|^{-1+\alpha}\,\|\psi_2\|_{L^1}\\
&+\int_{|h|^{\alpha/\gamma}\leqslant|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a\,|a|^{-1}\,\|\psi_2\|_{L^1}\frac{(|a|R+|h|)^{\alpha}}{|\lg(|a|R+|h|)|}\\
\leqslant&C|h|^{\alpha}\left[1+\frac{1}{|\lg|h||}\int_{|h|^{\alpha/\gamma}\leqslant|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a\,|a|^{-1}\right]\\
\leqslant&C'|h|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

5. 类似地,对充分小的 $|h|$

$$
\begin{aligned}
T_3\leqslant&\int_{|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a\,|a|^{-1+\alpha}\,\|\psi_2\|_{L^1}\\
&+\int_{|a|\leqslant|h|}\mathrm{d}a\,|a|^{-1}\,\|\psi_2\|_{L^2}\frac{(|a|R)^{\alpha}}{|\lg|a|R|}\\
\leqslant&C|h|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

6. 最后

$$
\begin{aligned}
T_4\leqslant&C|h|\int_{|h|\leqslant|a|\leqslant1}\mathrm{d}a\,|a|^{-3}\\
&\left[|a|^{\alpha}+\frac{(|a|R+|h|)^{\alpha}}{|\lg(|a|R+|h|)|}\right](|a|R+|h|)\\
\leqslant&C'|h|\left[1+|h|^{-1+\alpha}+|h|(1+|h|^{-2+\alpha})\right]\\
\leqslant&C''|h|^{\alpha}\qquad\blacksquare
\end{aligned}
$$

对高阶局部正则性的定理也能证明。这些定理证实了人们赋加于小波变换的美誉"数学显微镜"的正确性。在 Holschneider 和 Tchamitchian(1990)的工作中,这些及其他一些结果被用来探究傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\sin(n^2\pi x)$ 定义的函数的可微性,这一级数为 Riemann 首先研究。

注:

1. 所有这些 Bergman 空间都可经由(一个标准的)共形映照变换成在单位圆盘上的解析函数的 Hilbert 空间。

2. 这一段主要参考了 Grossmann, Morlet 和 Paul(1985, 1986)的论文。他们的结果事实上是可以推广到可约表示的,只要他们找到循环向量(A. Grossmann 和 T. Paul,私人通信)。这对较高维情形是有用的,在那里 $ax+b$—群的表示是可约而循环的。

3. 利用单式映射 T^{win} 以传输 H 到 Bargmann Hilbert 空间所得到的算子 H_B 是特别简单的

$$T^{\mathrm{win}}H(T^{\mathrm{wav}})^{-1}\left[\exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^2+t^2)-\frac{i}{2}\omega t\right)\phi(\omega+it)\right]$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^2+t^2)-\frac{i}{2}\omega t\right)[2(\omega+it)\phi'(\omega+it)]$$

或 $(H_B\phi)(z)=2z\phi'(z)$,显然,H_B 的特征函数是单项式 $u_n(z)=(2^n n!)^{-1/2}z^n$,下面的讨论将指出,它们实际上是在 Bargmann 空间中对应于 Hermite 函数的函数,易于计算

$$T^{\mathrm{win}}A^*(T^{\mathrm{win}})^{-1}\left[\exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^2+t^2)-\frac{i}{2}\omega t\right)\phi(\omega+it)\right]$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^2+t^2)-\frac{i}{2}\omega t\right)(-i)(\omega+it)\phi(\omega+it)$$

所以 $\phi_n=(2^n n!)^{-1/2}(A^*)^n g$ 对应 Bargmann 空间的 $(2^n n!)^{-1/2}(-i)^n z^n=(-i)^n u_n(z)$(规范化 $\|\phi\|^2_{\mathrm{Bargm}}=\frac{1}{2\pi}\int dx\int dy\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,|\phi(x+iy)|^2$,故 g_0 本身对应于 Bargmann 空间的常值函数 1)。这意味着

$$\langle\phi_n,g^{\omega,t}\rangle=\exp\left(-\frac{1}{4}(\omega^2+t^2)-\frac{i}{2}\omega t\right)(-i)^n(2^n n!)^{-1/2}(\omega+it)^n$$

4. 不是每一个无界函数都引出无界算子;某些有界算子需用无界权函数才能实现。事实上,Klauder(1966)证明了:甚至某些迹类算子也要求有一个非调和(non-empered)分布作为权函数!

5. 对于实函数 w,要求 W 应在这个区域上是本质自伴的(essentially self-adjoint)。

6. 在量子力学中的另一个应用可以在 Daubechies 和 Klauder(1985)中找到,它指出了倘若 H 有式(2.8.2)的形式,并具有权函数 $\omega(p,q)$,且这一权函数在 $p,q\to\infty$ 时是太剧烈增大的情形下,如何将对 $\exp(-itH)$ 的路径积分(数学的而不是完全定义的)写成真正的 Wiener 积分(作为基础扩散过程趋于∞时的扩散常数)的极限。

7. 同样的论证对所有式(2.8.2)型算子 W 都成立,只要其中的 $w(\omega,t)$ 是旋转对称的,即使它不是一个指示函数可以。一个例子是 $w(\omega,t)=\exp[-\alpha(\omega^2+t^2)]$,对于它 Gori 和 Guttari(1985)首先指出了 Hermite 函数是特征函数(不计及 α,但其特征值将与 α 有关)。

8. 这与 Fefferman 和 de la Llace 对算子式(2.8.4)使用的一种式(2.8.3)型表示是不一致的：毕竟，Calderon 公式((2.4.4)与它是本质上等价的)是(在小波分析以前的长时间)有关奇异积分算子研究的工具箱中的一部分，因此它特别适合于讨论式(2.8.4)中的奇异核。在这个特例中，式(2.8.4)甚至对非容许函数 ψ(此时，C_ψ 被去掉)也有意义；在 Fefferman 和 de la Llave(1986)的工作中，ψ 被取作单位球的指示函数(它是非容许的，因为它的积分不为零)。

9. 如果我们作一个附加变换，将上半平面$\{b+ia;a\geqslant 0\}$(在共形映照意义下)映成单位圆盘，则许多事情将更加明显：流量 $z\rightarrow z(t)$对应于绕圆盘中心的简单旋转，H 也类似其特征函数，可以简单地表示出来。请见 Paul(1985)或 Seip(1991)。

10. 存在对 ψ 的许多其他选择，对每一个选择，对应于(a, b)一空间集合 S_C 的时一频空间集合 $\tilde{S}_C$ 将取不同的形状。这些不同形状的计算及图形讨论可以在 Daubechies 和 Paul(1988)中找到。

第 3 章　离散小波变换:框架

在本章,即全书最长的一章里,将讨论非正交的离散小波分解的各个方面及窗口富氏变换中的类似性质。本章标题中的"框架"是由不独立的向量组成的一些集合,它们可以直接面显式地表达空间中的每个向量的分解。我们将同时讨论小波框架和窗口富氏变换的框架。后者可以看成是相对于时一频空间中 Nyquist 密度的超密采样方法。

本章的许多材料取自于 Daubechies(—1990),并经更新。关于框架(以及连续小波变换)更详细的讨论和更多的基本定理,可参见 Heil 和 Walnut (1989) 。

3.1　小波变换的离散化

在连续小波变换中,我们考虑

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

这里 $b\in\mathbf{R}, a\in\mathbf{R}, a\neq 0$, ψ 满足容许条件,为方便起见,仅考虑 a 为正数的情况,这样容许条件就变为

$$C_\psi = \int_0^\infty \mathrm{d}\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2 = \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\xi|\xi|^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2 < \infty$$

(见 2.4 节)。我们同时只考虑 a,b 为离散值的情形。伸缩参数的离散化是很自然的:选 $a=a_0^m, m\in\mathbf{Z}$ 及 $a_0\neq 1$ 均是确定的。为方便起见假定 $a_0>1$(这是可以的,因为 m 可取正亦可取负)。对 $m=0$,可自然地离散化 b 为某个确定的b_0 的整数倍(b_0 是任意确定的正数),b_0 经适当选取以使 $\psi(x-nb_0)$覆盖整条直线。对不同的 m, $a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x)$的宽度是 $\psi(x)$宽度的 a_0^m 倍(比如以宽度$(f)=[\int \mathrm{d}xx^2|f(x)|^2]^{1/2}$来度量,这里假定$\int \mathrm{d}xx|f(x)|^2=0$),因此 $b=nb_0a_0^m$ 的选择确保了离散小波在 m 水平上与$\psi(x-nb_0)$同样地覆盖了整条直线。于是我们取 $a=a_0^m, b=nb_0a_0^m$,其中 m,n 取遍 $\mathbf{Z}$, $a_0>1, b_0>0$ 是确定的;当然 a_0,b_0 的选取依赖于 ψ。于是

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2}\psi\left(\frac{x - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0) \quad (3.1.1)$$

现在提两个问题：

(1) 离散小波系数$\langle f, \psi_{m,n}\rangle$能否完全刻画 f? 或者更严格地，能否由$\langle f, \psi_{m,n}\rangle$通过一个数值上稳定的方法重构 f

(2) 函数 f 能否写成"构造元素"$\psi_{m,n}$的叠加？能否写出一个简单的算法寻求叠加的系数？

事实上，上述两个问题只是一个问题的两个对偶的方面。由下面我们将会看到，对适当的 f 及适当的a_0, b_0，存在 $\psi_{m,n}$使重构问题的解简化为

$$f = \sum_{m,n}\langle f, \psi_{m,n}\rangle \tilde{\psi}_{m,n}$$

因此，$\forall (R) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle} = \left(\sum_{m,n}\langle f, \psi_{m,n}\rangle \quad \langle \tilde{\psi}_{m,n}, g\rangle\right)^*$$

$$= \sum_{m,n}^{m,n}\langle g, \tilde{\psi}_{m,n}\rangle \quad (\psi_{m,n}, f)$$

或 $g = \sum_{m,n}\langle g, \tilde{\psi}_{m,n}\rangle\psi_{m,n}$，至少在弱收敛的意义下成立。这是一个当 $\psi_{m,n}$叠加为 g 时计算其叠加系数的有效方法。我们将主要集中讨论前一组问题。关于(1)与(2)的对偶性的详细讨论参见 Grochenig(1991)。

对于连续小波变换的情形，只要 ψ 满足容许条件，两个问题都可以通过恒等分解立即得到解决。在当前的离散情形，没有类似的恒等分解，因此可用其他方法解决这个问题。不妨问："是否存在所谓的离散容许条件？如果存在，是什么？"首先给出问题(1)的一些数学含义。尽管离散小波与连续小波一样，可以用于其他空间，仍限定 $f \in L^2(\mathbb{R})$如果

$$\langle f_1, \psi_{m,n}\rangle = \langle f_2, \psi_{m,n}\rangle, \forall\, m, n \in \mathbf{Z}, \Rightarrow f_1 \equiv f_2$$

或等价地

$$\langle f, \psi_{m,n}\rangle = 0, \forall\, m, n \in \mathbf{Z}, \Rightarrow f = 0$$

则函数可通过其小波系数$\langle f, \psi_{m,n}\rangle$来刻划。但我们不仅满足于刻划，还要能由$\langle f, \psi_{m,n}\rangle$通过整个数值稳定的方法重构 f。为了这一算法的存在性，必须使当$(\langle f_1, \psi_{m,n}\rangle)_{m,n\in\mathbf{Z}}$与$(\langle f_2, \psi_{m,n}\rangle)_{m,n\in\mathbf{Z}}$相差很小时，$f_1$ 与 f_2 也相差很小。为了能精确地描述，需要建立函数空间和序列空间的拓扑。在函数空间，已有 Hilbert 空间拓扑。在序列空间，选择类似于 l^2—拓扑的拓扑，使 $C^1 = (C_{m,n}^{-1})_{m,n\in\mathbf{Z}}$和 $C^2 = (C_{m,n}^2)_{m,n\in\mathbf{Z}}$的距离由

$$\| C^1 - C^2 \|^2 = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} | C^1_{m,n} - C^2_{m,n} |^2$$

来定义,这里隐含假定

$$(\langle f, \psi_{m,n}\rangle)_{m,n\mathbf{Z}} \in l^2(\mathbf{Z}^2)$$

及

$$\sum_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2 < \infty, (\forall f \in L^2(\mathbf{R}))$$

在实际中,这是肯定的,下面将会看到,对适当的小波(即 ψ 具有时频衰减性且 $\int \mathrm{d}x\psi(x)=0$)即任意的 $a_0>1, b_0>0$,总有

$$\sum_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2 \leqslant B \| f \|^2 \tag{3.1.2}$$

假定式(3.1.2)满足(以后会看到,无需对 $\psi_{m,n}$ 加以限制),由 $l^2(\mathbf{Z}^2)$ 中"接近"的意义,稳定性要求意味着如果 $\sum\limits_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2$ 很小,则 $\| f \|^2$ 也应很小。特别地,$\exists\,\alpha<\infty$,使得由 $\sum\limits_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2<1$,可得出 $\| f \|^2 \leqslant \alpha$,任取 $f\in L^2(\mathbf{R})$,令 $\tilde{f}=[\sum |\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2]^{-1/2} f$,很显然 $\sum\limits_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2 \leqslant 1$,因此 $\| \tilde{f} \| \leqslant \alpha$,但这意味着

$$[\sum_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2]^{-1} \| f \|^2 \leqslant \alpha$$

或

$$A \| f \|^2 \leqslant \sum_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2, A = \alpha^{-1} > 0 \tag{3.1.3}$$

另一方面,如果对所有 f,式(3.1.3)被满足,则只要 $\sum\limits_{m,n} | \langle f_1, \psi_{m,n}\rangle - \langle f_2, \psi_{m,n}\rangle |^2$ 比较小,距离 $\| f_1 - f_2 \|$ 就不可能任意大,从面式(3.1.3)等价于稳定性条件,联合式(3.1.3)与式(3.1.2),则 $\exists\, A>0, B<\infty$,使得

$$A \| f \|^2 \leqslant \sum_{m,n} | \langle f, \psi_{m,n}\rangle |^2 \leqslant B \| f \|^2 \quad \forall f \in L^2(\mathbf{R}) \tag{3.1.4}$$

换句话说,$\{\psi_{m,n}; m, n\in\mathbf{Z}\}$ 构成一个框架(将于下节讨论)。框架与由离散小波进行数字稳定重构的关系首先由 Grossmann(1985,个人通信)提出。

3.2 框架的性质

框架是由 Duffin 和 Schaeffer(1952)在非调和富氏级数(即函数在 $L^2([0,1])$

中按复指数幂 $\exp(i\lambda_n x)$，$\lambda_n \neq 2\pi n$ 展开）中首先引入的。Young(1980)也对框架作过评述。这里仅讨论其定义及一些性质。

定义：设$(\varphi_i)_{i\in J}\in$ Hilbert 空间 $\mathscr{H}$，如果存在 $A>0, B<\infty$，使得 $\forall f\in\mathscr{H}$，都有

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} |\langle f, \psi_j\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

称$(\varphi_i)_{i\in J}$为一个框架，A, B 为框架界。

如果两个框架界相等：$A = B$，则称该框架为紧框架，在一个紧框架中，有

$$\sum_{j\in J} |\langle f, \psi_j\rangle|^2 = A\|f\|^2 \quad \forall f\in\mathscr{H}$$

由极化恒等式可知至少在弱的意义下，上式蕴含着

$$A\langle f, g\rangle = \sum_j |\langle f, \psi_j\rangle\langle\psi_j, g\rangle$$

或

$$f = A^{-1}\sum_j \langle f, \psi_j\rangle \varphi_j \tag{3.2.2}$$

公式(3.2.2)易使人联想到 f 在一组标准正交基上的展开，但是使得一提的是，框架甚至紧框架都不一定是标准正交基，如下面有限维中的例子所示。

例：令 $\mathscr{H}=\mathbb{C}^2$，$e_1=(0,1)$，$e_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$e_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，$\forall v=(v_1, v_2)\in\mathscr{H}$(见图 3.1)，有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}|\langle v, e_j\rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2\right|^2 \\ &= \frac{3}{2}[|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2}\|v\|^2\end{aligned}$$

因此$\{e_1, e_2, e_3\}$是一紧框架，但不是标准正交基，因为 e_1, e_2, e_3 是线性相关的。

注意到本例中框架界 $A=\frac{3}{2}$，给出了一个“冗余度”(二维空间的三个向量)。如果以 A 来量度的冗余度为 1，则此时的紧框架为标准正交基。

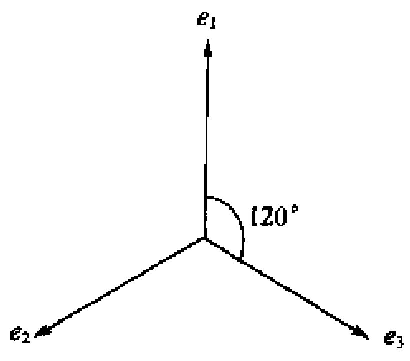


图 3.1　C^2 中三个向量构成一紧框架

定理3.2.1 设$(\varphi_j)_{j\in J}$是一个框架,框架界 $A=1$,且$\|\varphi_j\|=1,\forall j\in J$,则$\varphi_j$构成一标准正交基。

证明:由$\langle f,\varphi_j\rangle=0$时所有$j\in J$成立蕴含$f=0$,故$\varphi_j$张成整个$\mathscr{H}$,于是只需证明$\varphi_j$标准正交。因为

$$\|\varphi_j\|^2=\sum_{j\in J}|\langle\varphi_j,\varphi_{j'}\rangle|^2=\|\varphi_j\|^4+\sum_{\substack{j'\neq j\\ j'\in J}}|\langle\varphi_j,\varphi_{j'}\rangle|^2$$

而$\|\varphi_j\|=1$,所以$\langle\varphi_j,\varphi_{j'}\rangle=0\quad\forall j'\neq j$。 ∎

公式(3.2.2)给出了一个在框架为紧框架时由$\langle f,\varphi_j\rangle$恢复$f$的基本方法。我们回到一般框架上来,看看情形又将如何。首先引入框架算子。

定义:设$(\varphi_i)_{i\in J}$是$\mathscr{H}$的一个框架,则框架算子F

$$(Ff)_j=\langle f,\varphi_j\rangle$$

是$\mathscr{H}$到$l^2(J)=\{c=(c_j)_{j\in J};\|c\|^2=\sum_{j\in J}|c_j|^2<\infty\}$的线性算子。

由式(3.2.1)知$\|Ff\|^2\leqslant B\|f\|^2$,即$F$有界。$F$的伴随算子$F^*$很容易计算出

$$\langle F^*c,f\rangle=\langle c,Ef\rangle=\sum_{j\in J}c_j\overline{\langle f,\varphi_j\rangle}=\sum c_j\langle\varphi_j,f\rangle$$

因此

$$F^*c=\sum_{j\in J}c_j\varphi_j \tag{3.2.3}$$

(至少在弱意义下成立,事实上式(3.2.3)依范数收敛)。因$\|F^*\|=\|F\|$,故$\|F^*c\|\leqslant B^{1/2}\|c\|$。由$F$的定义有

$$\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2=\|Ff\|^2=\langle F^*Ff,f\rangle$$

则框架条件式(3.2.1)可改写为

$$A\,\mathrm{Id}\leqslant F^*F\leqslant B\,\mathrm{Id} \tag{3.2.4}$$

于是由下面的基本引理知F^*F可逆。

引理3.2.2 如果$\mathscr{H}$上的一个有正界的线性算子S有严格的常数下界α,则S可逆且逆有上界α^{-1}。

证明:

1. 记$\mathrm{Ran}(s)=\{f\in\mathscr{H}|\ \exists g\in\mathscr{H},使\ f=Sg\}$,$\mathrm{Ran}(s)$是闭的。这等价于$\mathrm{Ran}(s)$中的Cauchy列有极限且其极限在$\mathrm{Ran}(s)$内。设

$$f_n\in\mathrm{Ran}(s),\ \|f_n-f_m\|\to 0$$

当 $m,n\to\infty$,则有 $f_n=Sg_n$,且

$$\|g_n-g_n\|^2\leqslant\alpha^{-1}\langle S(g_n-g_m),g_n-g_m\rangle\leqslant\alpha^{-1}\|S(g_n-g_m)\|\ \|g_n-g_m\|$$

在第一个不等式中用到 $\alpha\langle h,h\rangle\leqslant\langle sh,h\rangle$,这意味着 $\|g_n-g_m\|\leqslant\alpha^{-1}\|f_n-f_m\|$,因此 g_n 构成 $\mathscr{H}$ 的一 Cauchy 列,它必有极限 $g\in\mathscr{H}$。又因 S 连续,因此有 $\lim\limits_{n\to\infty}Sg_n=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$所以$\lim\limits_{n\to\infty}f_n\in\mathrm{Ran}(s)$。

2. $\mathrm{Ran}(s)$的正交补为$\{0\}$。事实上,如果$\langle f,Sg\rangle=0$, 对于任意 $g\in\mathscr{H}$成立,则特别地对 f 有$\langle f,Sf\rangle=0$。由 $\alpha\|f\|^2\leqslant\langle Sf,f\rangle$知 $\|f\|=0$,从而 $f=0$。联系 1 和 2 可知 $\mathrm{Ran}(s)=\mathscr{H}$,从而 S 可逆:即 $\forall f\in\mathscr{H}\exists g\in\mathscr{H}$,使得 $f=Sg$。记 $S^{-1}f=g$,此外

$$\alpha\|S^{-1}f\|^2\leqslant\langle SS^{-1}f,S^{-1}f\rangle=\langle f,S^{-1}f\rangle\leqslant\|f\|\ \|S^{-1}f\|$$

由此,正如前述,$\|S^{-1}f\|\leqslant\alpha^{-1}\|f\|$。 ■

因此 $\|(F^*F)^{-1}\|\leqslant A^{-1}$。事实上,读者容易验证

$$B^{-1}\mathrm{Id}\leqslant(F^*F)^{-1}\leqslant A^{-1}\mathrm{Id}\tag{3.2.5}$$

将$(F^*F)^{-1}$作用于 φ_i 可得到一组有趣的新向量族,记为$\widetilde{\varphi}_j$

$$\widetilde{\varphi}_j=(F^*F)^{-1}\varphi_j$$

则$(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in J}$也是一个框架。

定理 3.2.3 $(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in J}$是以$B^{-1}$、$A^{-1}$为框架界的框架。

$$B^{-1}\|f\|^2=\sum_{j\in J}|\langle f,\widetilde{\varphi}_j\rangle|^2\leqslant A^{-1}\|f\|^2\tag{3.2.6}$$

相伴的框架算子 $\widetilde{F}:\mathscr{H}\to l^2(J)$,$(\widetilde{F}f)_j=\langle f,\widetilde{\varphi}_j\rangle$满足 $\widetilde{F}=F(F^*F)^{-1}$,$\widetilde{F}^*\widetilde{F}=(F^*F)^{-1}$,$\widetilde{F}^*F=\mathrm{Id}=F^*\widetilde{F}$ 且 $\widetilde{F}F^*=F\widetilde{F}^*$是正交投影算子(从 $l^2(J)$到 $\mathrm{Ran}(F)=\mathrm{Ran}(\widetilde{F})$)。

证明:

1. 作为练习,读者可以验证,若有界算于 S 有有界逆 S^{-1}且 $S^*=S$,则 $(S^{-1})^*=S^{-1}$。从此可得出

$$\langle f,\widetilde{\varphi}_j\rangle=\langle f,(F^*F)^{-1}\varphi_j\rangle=\langle(F^*F)^{-1}f,\varphi_j\rangle$$

因此

$$\sum_{j\in J}|\langle f,\widetilde{\varphi}_j\rangle|^2$$

$$= \sum_{j\in J} |\langle (F^*, F)^{-1} f, \varphi_j\rangle|^2 = \| F(F^* F)^{-1} f \|^2$$
$$= \langle (F^* F)^{-1} f, F^* F(F^* F)^{-1} f\rangle = \langle (F^* F)^{-1} f, f\rangle \tag{3.2.7}$$

利用式(3.2.5),上式即蕴含了式(3.2.6);$\widetilde{\varphi}_i$ 构成一个框架。此外式(3.2.7)还说明 $\widetilde{F}$ 满足 $\widetilde{F}^* \widetilde{F} = (F^* F)^{-1}$

2. $(F(F^* F)^{-1} f)_j = \langle (F^* F)^{-1} f, \varphi_j\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}_j\rangle = (\widetilde{F} f)_j$

$$\widetilde{F}^* F = [F(F^* F)^{-1}]^* F = (F^* F)^{-1} F^* F = \mathrm{Id}$$
$$F^* \widetilde{F} = F^* F(F^* F)^{-1} = \mathrm{Id}$$

3. 由 $\widetilde{F} = F(F^* F)^{-1}$,得 $\mathrm{Ran}(\widetilde{F}) \subset \mathrm{Ran}(F)$;而 $F = \widetilde{F}(F^* F)$,因此 $\mathrm{Ran}(F) \subset \mathrm{Ran}(\widetilde{F})$,从而 $\mathrm{Ran}(F) = \mathrm{Ran}(\widetilde{F})$。令 P 为到 $\mathrm{Ran}(F)$ 的正交投影算子,则需要证明 $\widetilde{F}F^* = P$,它等价于 $\widetilde{F}F^*(Ff) = Ff$(即 $\widetilde{F}F^*$ 保持 $\mathrm{Ran}(F)$ 的元素不变),及对所有正交于 $\mathrm{Ran}(F)$ 的 c 有 $\widetilde{F}F^* c = 0$,易证

$$\widetilde{F}F^* Ff = F(F^* F)^{-1} F^* Ff = Ff$$

且

$$c \perp \mathrm{Ran}(F) \Rightarrow \langle c, Ff\rangle = 0, \forall f \in \mathscr{H}$$
$$\Rightarrow F^* c = 0 \Rightarrow \widetilde{F}F^* c = 0 \quad ■$$

我们称 $(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in J}$ 为 $(\varphi_j)_{j\in J}$ 的对偶框架。易证 $(\widetilde{\varphi}_j)_{j\in J}$ 的对偶框架又是 $(\varphi_j)_{j\in J}$。把定理 3.2.3 的结论写具体些,$\widetilde{F}^* F = \mathrm{Id} = F^* \widetilde{F}$,意即

$$\sum_{j\in J} \langle f, \varphi_j\rangle \widetilde{\varphi}_j = f = \sum_{j\in J} \langle f, \widetilde{\varphi}_j\rangle \varphi_j \tag{3.2.8}$$

这说明我们得到了一个由 $\langle f, \varphi_j\rangle$ 重构 f 的公式!同时也得到了写 f 为 φ_j 的叠加的方法,这决定了 3.1 节中的两组问题是对偶的。当给定框架 $(\varphi_i)_{j\in J}$ 时,为了使用公式(3.2.8),仅需计算 $\widetilde{\varphi}_j = (F^* F)^{-1} \varphi_j$。现暂时搁下这一问题,稍后再作讨论。在此,首先提出一个常常遇到的问题:前面曾强调过框架甚至紧框架一般都不是正交基,因为它们甚至不是线性独立的。这样对于一个给定的函数 f,将存在 φ_j 的不同叠加,使它们的和均为 f。那么是什么使我们对式(3.2.8)的第二部分感兴趣呢?下面会从一个简单的例子得到启发。

例:在图 3.1 的例中,已经得到

$$v = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{3} \langle v, e_j\rangle e_j, v \in \mathbb{C}^2 \tag{3.2.9}$$

因为在此例中，$\sum_{j=1}^{3} e_j = 0$，故下列公式也成立

$$v = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}[\langle v, e_j\rangle + \alpha]e_j \tag{3.2.10}$$

这里 α 是 $\mathbb{C}$ 中的任意数(在这一特殊情形，容易证明式(3.2.10)给出了对任意 v 都成立的所有可能的叠加公式)。当 $\alpha\neq 0$ 时，式(3.2.9)似乎比式(3.2.10)更简洁。这一结论可精确描述为

$$\sum_{j=1}^{3} |\langle v, e_j\rangle|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2$$

但

$$\sum_{j=1}^{3} |\langle v, e_j\rangle + \alpha|^2 = \frac{3}{2}\|v\|^2 + 3|\alpha|^2 > \frac{3}{2}\|v\|^2 (\text{如果 } \alpha\neq 0) \qquad \blacksquare$$

同理，$\langle f, \tilde{\varphi}_j\rangle$也将是 f 到φ_j 分解的最简洁的系数。

定理 3.2.4 如果 $f = \sum_{j\in J} c_j\varphi_j$，其中 $c = (c_j)_{j\in J}\in l^2(J)$且 c_j 不全为$\langle f, \tilde{\varphi}_j\rangle$，则

$$\sum_{j\in J} |c_j|^2 > \sum_{j\in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j\rangle|^2$$

证明：

1. $f = \sum_{j\in J} c_j\varphi_j$ 等价于 $f = F^* c$。

2. 记 $c = a + b$，这里 $a\in \mathrm{Ran}(F) = \mathrm{Ran}(\tilde{F})$，$b\perp \mathrm{Ran}(F)$，特别地，$a\perp b$，则

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

3. 由于 $a\in \mathrm{Ran}(\tilde{F})$，存在 $g\in\mathscr{H}$，使得 $a = \tilde{F}g$，或 $c = \tilde{F}g + b$，因此

$$f = F^* c = F^*\tilde{F}g + F^* b$$

但 $b\perp\mathrm{Ran}(F)$，因此 $F^* b = 0$，且 $F^*\tilde{F} = Id$，从而 $f = g$，因此 $c = \tilde{F}f + b$，且

$$\sum_{j\in J} |c_j|^2 = \|c\|^2 = \|\tilde{F}f\|^2 + \|b\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, \tilde{\varphi}_j\rangle|^2 + \|b\|^2$$

除非 $b = 0$ 且 $c = \tilde{F}f$，否则它是严格大于 $\sum_{j\in J} |\langle f, \varphi_j\rangle|^2$ $\blacksquare$

通过这个定理可以看出$\tilde{\varphi}_j$ 是如何在式(3.2.8)前半部起着特殊作用的。这里同样没有惟一性：可能存在许多别的$(u_j)_{j\in J}$满足 $f = \sum_{j\in J}\langle f, \varphi_j\rangle u_j$，在前面二维的例子中如含 $u_j = \frac{2}{3}e_j + a$，其中 a 是 $\mathbb{C}^2$ 中的任意向量。由 $\sum_{j=1}^{3} e_j = 0$，显然有

$$\sum_{j=1}^{3}\langle v,e_j\rangle u_j = \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}\langle v,e_j\rangle e_j + \Big[\sum_{j=1}^{3}\langle v,e_j\rangle\Big]a = v$$

但是,同样地,u_j 没有$\tilde{e}_j$ 简洁:事实上,对$\langle v,a\rangle\neq 0$ 的所有 v,有

$$\sum_{j=1}^{3}|\langle v,u_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{3}|\langle v,\tilde{e}_j\rangle|^2 + |3\langle v,a\rangle|^2$$

$$= \frac{2}{3}\|v\|^2 + 3|\langle v,a\rangle|^2 > \frac{2}{3}\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{3}|\langle v,\tilde{e}_j\rangle|^2$$

对每个框架都有个类似的不等式:如果 $f=\sum_{j\in J}\langle f,\varphi_j\rangle u_j$,则根据定理 3.2.4 对所有的 $g\in\mathscr{H}$, $\sum_{j\in J}|\langle u_j,g\rangle|^2\geqslant\sum_{j\in J}|\langle\tilde{\varphi}_j,g\rangle|^2$。

回到重构问题上来,如果已知$\tilde{\varphi}_j=(F^*F)^{-1}\varphi_j$,则由式(3.2.8),可由$\langle f,\varphi_j\rangle$重构 f,我们只需计算$\tilde{\varphi}_j$,这只要求出 F^*F 的逆即可。如果 B 与 A 很接近,即 $r=B/A-1<<1$,则式(3.2.4)说明 F^*F 与$\frac{A+B}{2}\mathrm{Id}$ 很接近,因此$(F^*F)^{-1}$与$\frac{2}{A+B}\mathrm{Id}$ 很接近,故$\tilde{\varphi}_j$ 与$\frac{2}{A+B}\varphi_j$ 也很接近。确切地

$$f=\frac{2}{A+B}\sum_{j\in J}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j + Rf \tag{3.2.11}$$

这里 $R=\mathrm{Id}-\frac{2}{A+B}F^*F$,因此$-\frac{B-A}{B+A}\mathrm{Id}\leqslant R\leqslant\frac{B-A}{B+A}\mathrm{Id}$,于是[5] $\|R\|\leqslant\frac{B-A}{B+A}=\frac{r}{2+r}$,如果 r 很小,去掉式(3.2.11)中的余项 Rf 就得到f 的一个近似重构公式,其在 L^2 空间中精确到$\frac{r}{2+r}\|f\|$。即使 r 不是很小,也可以写出具有指数收敛的 f 的重构公式。对于同样定义的 R,有

$$F^*F=\frac{A+B}{2}(\mathrm{Id}-R)$$

因此,$(F^*F)^{-1}=\frac{2}{A+B}(\mathrm{Id}-R)^{-1}$。由于$\|R\|\leqslant\frac{B-A}{B+A}<1$, $\sum_{k=0}^{\infty}R^k$ 依范数收敛到$(\mathrm{Id}-R)^{-1}$。所以

$$\tilde{\varphi}_j=(F^*F)^{-1}\varphi_j=\frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{\infty}R^k\varphi_j$$

只取其零阶项即为式(3.2.11)去掉余项的表达式。截掉其 N 项以后可以得到更好的近似

$$\tilde{\varphi}_j^N=\frac{2}{A+B}\sum_{k=0}^{\infty}R^k\varphi_j=\varphi_j-\frac{2}{A+B}\cdot\sum_{k=N+1}^{N}R^k\varphi_j$$

$$= | \mathrm{Id} - R^{N+1} | \tilde{\varphi}_j \tag{3.2.12}$$

这里

$$\| f - \sum_{j\in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N \|$$

$$= \sup_{\|g\|=1} | \langle f - \sum_{j\in J} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle |$$

$$= \sup_{\|g\|=1} | \langle \sum_{j\in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \tilde{\varphi}_j - \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle |$$

$$= \sup_{\|g\|=1} | \sum_{j\in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle R^{N+1} \tilde{\varphi}_j^N, g \rangle |$$

$$= \sup_{\|g\|=1} | \langle f, R^{N+1} g \rangle | \leqslant \| R \|^{N+1} \| f \| \leqslant (\frac{r}{2+r})^{N+1} \| f \|$$

由于$\frac{r}{2+r}<1$,随着 N 的增加该范数呈指数性地减小。特别地,$\tilde{\varphi}_j^N$ 可以用迭代算法计算

$$\tilde{\varphi}_j^N = \frac{2}{A+B} \varphi_j + R \tilde{\varphi}_j^{N-1}$$

或

$$\tilde{\varphi}_j^N = \sum_{l\in J} \alpha_{jl}^N \varphi_l$$

这里

$$\alpha_{jl}^N = \frac{2}{A+B} \delta_{lj} + \alpha_{jl}^{N-1} - \frac{2}{A+B} \sum_{m\in J} \alpha_{jm}^{N-1} \langle \varphi_m, \varphi_l \rangle$$

这个式子看起来很复杂,但是对实际感兴趣的例子而言,很多$\langle \varphi_m, \varphi_l \rangle$小得可以忽略,就不那么复杂了。同样的迭代计算技术可直接用于 f

$$f = (F^* F)^{-1} (F^* F) f = \lim_{N\to\infty} f_N$$

这里

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{2}{A+B} \sum_{k=0}^{N} R^k (F^* F) f \\ &= \frac{2}{A+B} (F^* F) f + R f_{N-1} \\ &= f_{N-1} + \frac{2}{A+B} \sum_{j\in J} [\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f_{N-1}, \varphi_j \rangle] \varphi_j \end{aligned}$$

详细讨论了抽象的框架之后,我们又回到离散小波上来。

3.3 小波框架

从 3.1 节看出，要获得从$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$构造 f 的数值稳定的重构算法，要求 $\psi_{m,n}$ 能构成框架。在 3.2 节中我们找到了在 $\psi_{m,n}$构成框架的条件下由$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$重构 f 的算法，这一算法中框架界的比例是很重要的，本节后面部分将回到寻找这一比例的至少一个界的方法上来。但是，首先指出 $\psi_{m,n}$构成框架的要求隐含了 ψ 满足容许条件。

3.3.1 一个必要条件：母小波的容许性

定理 3.3.1 如果 $\psi_{m,n}(x)=a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x-nb_0),m,n\in\mathbb{Z}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$的一个框架，A、B 为其框架界，则

$$\frac{b_0\ln a_0}{2\pi}A\leqslant\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\xi^{-1}\mid\hat{\psi}(\xi)\mid^2\leqslant\frac{b_0\ln a_0}{2\pi}B \tag{3.3.1}$$

$$\frac{b_0\ln a_0}{2\pi}A\leqslant\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\xi\xi^{-1}\mid\hat{\psi}(\xi)\mid^2\leqslant\frac{b_0\ln a_0}{2\pi}B \tag{3.3.2}$$

证明：

1. $\forall f\in L^2(\mathbb{R})$，有

$$A\parallel f\parallel\leqslant\sum_{m,n=\mathbb{Z}}\mid\langle f,\psi_{m,n}\rangle\mid^2\leqslant B\parallel f\parallel^2 \tag{3.3.3}$$

如果在式(3.3.3)中，令 $f=u_l$ 并用满足 $\sum_l c_l\parallel u_l\parallel^2<\infty$ 的系数 $c_l\geqslant 0$ 作权，把所有的不等式加起来就得到

$$A\sum_l c_l\parallel u_l\parallel^2\leqslant\sum_l c_l\sum_{m,n}\mid\langle u_l,\psi_{m,n}\rangle\mid^2\leqslant B\sum_l c_l\parallel u_l\parallel^2 \tag{3.3.4}$$

特别地，当 C 为正的迹类算子(参见预备知识)时，则

$$C=\sum_{l\in\mathbb{N}}c_l\langle\cdot,u_l\rangle u_l,$$

其中 u_l 正交，$c_l\geqslant 0$ 且 $\sum_{l\in\mathbb{N}}c_l=\mathrm{Tr}C>0$，对于任何这样的算子，由式(3.3.4)得

$$\mathrm{ATr}C\leqslant\sum_{m,n}\langle C\psi_{m,n},\psi_{m,n}\rangle\leqslant B\mathrm{Tr}C \tag{3.3.5}$$

2. 现在将式(3.3.5)应用于一个由不同的母小波经连续小波变换而构造的特殊算子 C 上。设 h 是L^2 中的某个函数，满足支集 $\hat{h}\subset[0,\infty)$，$\int_0^\infty\mathrm{d}\xi\xi^{-1}|\hat{h}(\xi)|^2$

$<\infty$,并且与第 2 章同样地定义 $h^{a,b}=a^{-1/2}h(\frac{x-b}{a}),a,b\in\mathbb{R},a>0$,如果 $c(a,b)$为有界的正函数,则

$$C=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^0\mathrm{d}b\langle\cdot,h^{a,b}\rangle h^{a,b}c(a,b)\qquad(3.3.6)$$

亦是有界的正算子(见 2.8 节)。此外,如果 $c(a,b)$关于 $a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ 可积,则 C 是迹类且 $\mathrm{Tr}C=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}bc(a,b)\|h\|^2$。①特别选

$$c(a,b)=\begin{cases}w(|b|/a) & 1\leqslant a\leqslant a_0\\ 0 & a<1,a>a_0\end{cases}$$

这里 w 为正且可积,则

$$C=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^0\mathrm{d}b\langle\cdot,h^{a,b}\rangle h^{a,b}w\left(\frac{|b|}{a}\right)$$

且

$$\mathrm{Tr}C=\int_1^{a_0}\frac{\mathrm{d}a}{a}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}sw(|s|)\|h\|^2=2\ln a_0\left[\int_0^\infty\mathrm{d}sw(s)\right]\|h\|^2$$

3. 对这个 C,式(3.3.5)的中间项变为

$$\sum_{m,n}\langle C\psi_{m,n},\psi_{m,n}\rangle=\sum_{m,n}\int^{a_0}\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}bw\left(\frac{|b|}{a}\right)|\langle\psi_{m,n},h^{a,b}\rangle|^2$$

但

$$\begin{aligned}\langle\psi_{m,n},h^{a,b}\rangle&=a_0^{-m/2}a^{-1/2}\int\mathrm{d}x\psi(a_0^{-m}x-nb_0)\overline{h(\frac{x-b}{a})}\\&=a_0^{m/2}a^{-1/2}\int\mathrm{d}y\psi(y)\overline{h\left(\frac{y+nb_0-ba_0^{-m}}{aa_0^{-m}}\right)}\\&=\langle\psi,h^{a_0^{-m}a,a_0^{-m}b-nb_0}\rangle\end{aligned}$$

如果分别改变变量 a,b 为 $a'=a_0^{-m}a,b'=a_0^{-m}b$,则

$$\begin{aligned}\sum_{m,n}\langle C\psi_{m,n},\psi_{m,n}\rangle&=\sum_{m,n}\int_{a_0^{-m}}^{a^{-m+1}}\frac{\mathrm{d}a'}{a'^2}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}b'w(\frac{|b'|}{a'})|\langle\psi,h^{a,b-nb_0}\rangle|^2\\&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^\infty\mathrm{d}b|\langle\psi,h^{a,b}\rangle|^2\sum_n w\left(\frac{|b+nb_0|}{a}\right)\end{aligned}$$

这里取 $w(s)=\lambda e^{\lambda^2\pi^2s^2}$,这个函数仅有一个局部极大值,且当$|s|$增加时单调减少。

① 见本章末注 6。

通过对积分的初等逼近的讨论(详见 Daubechies(1990)引理 2.2),可以看出对这样的 w 及任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta>0$ 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}dtw(t)-\beta w_{\max}\leqslant\beta\sum_{n\in\mathbf{Z}}w(\alpha+n\beta)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}dtw(t)+\beta w_{\max}$$

对上述特定的 w

$$\sum_n w\left(\frac{|b+nb_0|}{a}\right)=\frac{a}{b_0}+\rho(a,b)$$

同时 $|\rho(a,b)|\leqslant w(0)=\lambda$,从而

$$\sum_{m,n}\langle C\psi_{m,n},\psi_{m,n}\rangle=\frac{1}{b_0}\int_0^{\infty}\frac{da}{a}\int_{-\infty}^{\infty}ds|\langle\psi,h^{a,b}\rangle|^2+R \qquad (3.3.7)$$

其中

$$|R|=\int_0^{\infty}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}db\quad|\langle\psi,h^{a,b}\rangle|^2\rho(a,b)\leqslant\lambda C_h\|\psi\|^2$$

C_h 如式(2.4.1)定义。式(3.3.7)的第一项可以写为

$$\frac{1}{b_0}\int_0^{\infty}\frac{da}{a}\int_{-\infty}^{\infty}db\left|\int_0^{\infty}d\xi\hat{\psi}(\xi)a^{1/2}\overline{\hat{h}(a\xi)}e^{ib\xi}\right|^2$$

$$=\frac{2\pi}{b_0}\int_0^{\infty}da\int_0^{\infty}d\xi|\hat{\psi}(\xi)|^2|\hat{h}(a\xi)|^2=\frac{2\pi}{b_0}\|h\|^2\int_0^{\infty}d\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2$$

4. 对于所选的特定权函数 w,有 $\int_0^{\infty}dtw(t)=\frac{1}{2}$,因此 $\mathrm{Tr}C=\|h\|^2\ln a_0$,将所有结果代入式(3.3.5)中,得

$$A\|h\|^2\ln a_0\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\|h\|^2\int_0^{\infty}d\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2+R\leqslant B\|h\|^2\ln a_0$$

其中 $|R|\leqslant\lambda C_h\|\psi\|^2$。除以 $\frac{2\pi}{b_0}\|h\|^2$ 并令 λ 趋于 0 即证明了式(3.3.1)。负频率公式(3.3.2)可类似地证得。 ■

注意:

1. 公式(3.3.1)、式(3.3.2)隐含了一个对 ψ 的限制,即 $\int_0^{\infty}d\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2<\infty$ 和 $\int_{-\infty}^{0}d\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2<\infty$,这与连续情形的限制等同(见式 2.4.6)。

2. 在定义 $\psi_{m,n}$ 时只考虑正的伸缩系数 a_0^m(m 的正负可以使 $a_0^m\geqslant1$ 或 $\leqslant1$,但总有 $a_0^m>0$)。因此在式(3.3.1)、式(3.3.2)中将正负频率分开讨论。如果允许离散伸缩系数取负,则只需讨论 $\int_{-\infty}^{\infty}d\xi|\xi|^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2$(仿上法易证)。

3. 如果 $\psi_{m,n}$ 构成一紧框架($A=B$),则由式(3.3.1)及式(3.3.2)知

$$A = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0}\int_0^{\infty} d\xi \xi^{-1} \mid \hat{\psi}(\xi) \mid^2 = \frac{2\pi}{b_0 \ln a_0}\int_{-\infty}^{0} d\xi \mid \xi \mid^{-1} \mid \hat{\psi}(\xi) \mid^2$$

特别地，如果 $\psi_{m,n}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基(Haar 基或其他的基)，则

$$\int_0^{\infty} d\xi \xi^{-1} \mid \hat{\psi}(\xi) \mid^2 = \int_{-\infty}^{0} d\xi \mid \xi \mid^{-1} \mid \hat{\psi}(\xi) \mid^2 = \frac{b_0 \ln a_0}{2\pi} \qquad (3.3.8)$$

容易验证 Haar 基确实满足式(3.3.8)，我们讨论的绝大多数标准正交基都是实的，因此式(3.3.8)第一式总是成立的。

4. Chui 和 Shi(1991)给出了定理 3.3.1 的不同的证明。

以下，我们总是假定 ψ 满足容许条件。 ■

3.3.2 框架界的充分条件及估计

并非所有的 ψ, a_0, b_0 均能得到小波框架，即使 ψ 满足容许条件也如此。本小节只讨论一些使框架存在的 ψ, a_0, b_0 的一般条件并估计相应的框架界。为此，需估计

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} \left|\langle f, \psi_{m,n}\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{m,n} \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{f}(\xi) a_0^{m/2} \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi) e^{b_0 a_0^m n\xi}} \right|^2 \\
&= \sum_{m,n} a_0^m \left| \int_0^{2\pi b_0^{-1} a_0^{-m}} d\xi e^{i b_0 a_0^m n\xi} \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l a_0^{-m} b_0^{-1}) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi + 2\pi l b_0^{-1})} \right|^2
\end{aligned}$$

(由周期函数的 plancherel 定理)

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{b_0} \sum_m \int_0^{2\pi b_0^{-1} a_0^{-m}} d\xi \left| \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{f}(\xi + 2\pi l a_0^{-m} b_0^{-1}) \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi + 2\pi l b_0^{-1})} \right|^2 \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \sum_{m,k\in\mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k a_0^{-m} b_0^{-1})}\, \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} \hat{\psi}(a_0^m \xi + 2\pi k b_0^{-1}) \\
&= \frac{2\pi}{b_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 + \mathrm{Rest}(f) \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Rest}(f)$ 由下式界定

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Rest}(f)| &= \left| \frac{2\pi}{b_0} \sum_{\substack{m,k\in\mathbf{Z}\\ k\neq 0}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \hat{f}(\xi) \right. \\
&\quad \left. \cdot \overline{\hat{f}(\xi + 2\pi k a_0^{-m} b_0^{-1})}\, \overline{\hat{\psi}(a_0^m \xi)} \hat{\psi}(a_0^m \xi + 2\pi k b_0^{-1}) \right| \\
&\leqslant \frac{2\pi}{b_0} \sum_{\substack{m,k\\ k\neq 0}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(a_0^m \xi)| |\hat{\psi}(a_0^m \xi + 2\pi k b_0^{-1})| \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi-2\pi kb_0^{-1})|\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|\right]^{1/2}$$

(用 Cauchy－Schwarz 不等式,并对第二个因子作变量代换 $\zeta=\xi-2\pi kb_0^{-1}a_0^{-m}$)

$$\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\sum_{k\neq0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi+2\pi kb_0^{-1})|\right]^{1/2}$$

$$\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi-2\pi kb_0^{-1})|\right]^{1/2}$$

(对 m 的求和式用 Cauchy-Schwarz 不等式)

$$\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\|f\|^2\sum_{k\neq0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}\tag{3.3.10}$$

这里 $\beta(s)=\sup_\xi\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi+s)|$。合并式(3.3.9)与式(3.3.10)可得[①]

$$\inf_{\substack{f\in\mathscr{H}\\ f\neq0}}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2$$

$$\geqslant\frac{2\pi}{b_0}\left\{\operatorname*{essinf}_\xi\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2-\sum_{k\neq0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}\tag{3.3.11}$$

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{H}\\ f\neq0}}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\left\{\sup_\xi\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2+\sum_{k\neq0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}\tag{3.3.12}$$

如果式(3.3.11)与式(3.3.12)的右端均严格为正且有界,则 $\psi_{m,n}$ 构成框架,式(3.3.11)给出一下界 A,式(3.3.12)给出一上界 B,为此,所有 $1\leqslant|\xi|\leqslant a_0$(对非零 ξ,可乘以适当的 a_0^m 使其位于该区间,若 $\xi=0$,则仅构成一零测集,不影响该处进行的讨论)需满足:$0<\alpha\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\leqslant\beta<\infty$;不仅如此,$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|\,|\hat{\psi}(a_0^m\xi+s)|$ 在 ∞ 处还应有足够的衰减性。这里"足够"指 $\sum_{k\neq0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}$ 收敛且其和当 b_0 趋于 0 时也趋于 0,这就保证了当 b_0 足够小时式(3.3.11)与式(3.3.12)的左边一项夹在两个收敛级数的中间,从而 $\psi_{m,n}$ 构成框架。为了满足这些条件,仅需

---

① 见本章末注 7。

- $\hat{\psi}$ 的零点不密集，从而

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\geqslant\alpha\geqslant 0,\qquad\forall\xi\neq 0\tag{3.3.13}$$

- $|\hat{\psi}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{\alpha}(1+|\xi|^2)^{-\gamma/2},\qquad\alpha>0,\gamma>\alpha+1$[①] (3.3.14)

$\hat{\psi}$ 的这些衰减条件是很弱的，实际应用中我们还需更多的条件。如果 $\hat{\psi}$ 连续并在 ∞ 处衰减，则式(3.3.13)是必要条件：如果某个非 0 的 ξ_0 满足 $\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\leqslant\varepsilon$，则可构造出满足 $\|f\|=1$ 的 $f\in L^2(\mathbb{R})$，从而由 $(2\pi)^{-1}b_0\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2\leqslant 2\varepsilon$ 可得 $A\leqslant 4\pi\varepsilon/b_0$[②]。如果 ε 可取得任意小，则没有有限的框架下界(也可参见 Chui 和 Shi(1991)，那里证明了一个更强的结论 $A\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\leqslant B$)。综上所述，可得如下定理。

定理 3.3.2 如果 ψ 和 a_0 满足

$$\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2>0$$
$$\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2<\infty\tag{3.3.15}$$

而且如果 $\beta(s)=\sup_\xi\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)\|\hat{\psi}|(a_0^m\xi+s)|$，至少有快于 $(1+|s|)^{-(1+\varepsilon)}$ 的衰减($\varepsilon>0$)，则存在阈值 $(b_0)_{\text{thr}}>0$，使得 $\psi_{m,n}$ 对所有的 $b_0<(b_0)_{\text{thr}}$ 都构成框架。对 $b_0<(b_0)_{\text{thr}}$，下面两式是 $\psi_{m,n}$ 的框架界

$$A=\frac{2\pi}{b_0}\left\{\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2-\sum_{\substack{m=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$B=\frac{2\pi}{b_0}\left\{\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2+\sum_{\substack{m=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}$$

如果 $|\hat{\psi}(\xi)|\leqslant C|\xi|^{\alpha}(1+|\xi|)^{-\gamma},\alpha>0,\gamma>\alpha+1$，则式(3.3.15)及关于 β 的条件成立。

证明：我们已经作出了所有必要的估计。β 的衰减条件确保存在 $(b_0)_{\text{thr}}$，使 $\sum_{k\neq 0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}<\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2$ 在 $b_0<(b_0)_{\text{thr}}$ 成立。 ■

这些估计的技术思想很简单：如果 ψ 是“满意的”(在时频域上适当衰减，

① 见本章末注 8。

② 见本章末注 9。

$\int dx\psi(x)=0$,则存在 a_0,b_0 的一个范围,使得对应 $\psi_{m,n}$ 构成框架。由于对 ψ 的限制条件包含了第2章意义下的容许条件,a_0,b_0 分别靠近1和0就不奇怪了:我们已知式(2.4.4)的恒等分解对这样的 ψ 成立,自然地期望一个离散化积分变量的比较好的方法,使之不至于太多地影响重构。奇怪的是,许多实际问题中的 ψ,其"好的"(a_0,b_0)包含了一些离(1,0)很远的数值。下面我们将会看到几个这样的例子。不过,将先研究小波框架的对偶框架,并讨论这一基本理论的其他形式。

3.3.3 对偶框架

如3.2节,对偶框架定义为

$$\tilde{\psi}_{m,n}=(F^*F)^{-1}\psi_{m,n} \tag{3.3.16}$$

其中 $F^*Ff=\sum_{m,n}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\psi_{m,n}$,这里已经得到了 F^*F 逆的显式表示,且具有如 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ 一样的指数收敛性,其收敛比 α 与$\left(\frac{B}{A}-1\right)$成比例。因此框架界 A、B 很接近时是非常有用的。但是,通常地,式(3.2.8)要求计算无穷多项 $\psi_{m,n}$。事情并没有我们想象的那么糟:如果引入

$$(D^mf)(x)=a_0^{-m/2}f(a_0^{-m}x),(T^nf)(x)=f(x-nb_0)$$

则易知 $\forall f\in L^2(\mathbb{R})$

$$F^*FD^mf=D^mF^*Ff$$

即$(F^*F)^{-1}$与 D^m 可交换。特别地,由 $\psi_{m,n}=D^mT^n\psi$ 知

$$\tilde{\psi}_{m,n}=(F^*F)^{-1}D^mT^n\psi=D^m(F^*F)^{-1}T^n\psi$$

或

$$\tilde{\psi}_{m,n}=a_0^{-m/2}\tilde{\psi}_{0,n}(a_0^{-m}x)$$

遗憾的是 F^*F 与 T^n 不可交换,因此,通常还得计算无穷多项 $\tilde{\psi}_{0,n}$。在实际应用中,感兴趣的是只在有限范围内有效的函数。在这个范围内的 F^*F 可由 $\sum_{m=m_0}^{m_1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\cdot,\psi_{m,n}\rangle\psi_{m,n}$近似(见3.5节时一频局部化)。如果 $a_0^{m_1-m_0}$ 是整数,$N=a_0^{m_1-m_0}$,则易证 F^*F 的这种近似与 T^N 可交换,因此这种情况下只需计算 N 个不同的 $\psi_{0,n}$,$0\leqslant n\leqslant N-1$。不过,对实际上的很多情况而言,这个 N 也是非常大的。因此研究几乎是紧的框架(适宜框架——Snug frames)即满足$\frac{B}{A}-1<<1$ 的框架是

很有用的：我们可以只取重构公式(3.2.11)中的零阶项，这样既避免了讨论对偶框架的繁琐，又能对任意的 f 得到高质量的重构。另一方面，存在某些 ψ, a_0, b_0 使 $\psi_{m,n}$ 远离紧框架，但这使 $\tilde{\psi}_{m,n}$ 仅由单个函数产生

$$\tilde{\psi}_{m,n}(x) = \tilde{\psi}_{m,n}(x) = a_0^{-m/2}\tilde{\psi}(a_0^{-m}x - nb_0) \qquad (3.3.17)$$

第 8 章将要涉及的双正交基提供了这样的例子。Frazier 和 Jawerth(1988)在他们所研究 ϕ 变换中给出了另外的例子(也可参见 Frazier, Jawerth 和 Weiss(1991))。

必须注意到，$\psi_{m,n}$ 和 $\tilde{\psi}_{m,n}$ 可以有很不相同的正则性。比如存在这样的框架，其 $\psi \in C^\infty$ 且 ψ 比任意多项式的逆有更快的衰减性，但其某些 $\tilde{\psi}_{0,n}$ 却不属于 L^p 即使 p 很小(也就是说衰减很慢)。Daubechies(1990)在总第 988 至 989 页[①] 详述了 P. G. Lemarie 给出的例子。即使所有的 $\tilde{\psi}_{m,n}$ 均由单个函数 $\tilde{\psi}$ 产生，类似的情况也会发生：存在这样的例子，$\psi \in C^k$(k 可以任意大)，而 $\tilde{\psi}$ 却不连续(第 8 章双正交基给出了几个这样的例子，其中第一个例子由 Tchamitchian(1989)构造)。通过对 ψ, a_0, b_0 附加条件可以排除这些差异(参见 Daubechies(1990) § II.D.2 pp. 991～992)。

3.3.4 基本格式的几种其他形式

到目前为止，除了要求 $a_0 > 1$ 外，还没有对 a_0 加上其他限制。但是，在实际中，取 $a_0 = 2$ 是非常方便的。这时，由一个尺度到另一个尺度只需翻倍或减半，这比其他的 a_0 更实用。另一方面，我们看到选用满足 $B/A - 1 << 1$ 的("适宜")框架要有用的多。从式(3.3.11)和式(3.3.12)对 A、B 的估计可知

$$A \leqslant \frac{2\pi}{b_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2 \leqslant B \qquad \xi \neq 0 \qquad (3.3.18)$$

两个要求结合说明 $\sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$ 在 $\xi = 0$ 处应几乎为常数，这一条件很强，一般的 ψ 不满足它。比如，墨西哥帽状 $\sum_{m\in\mathbf{Z}}$ 函数 $\psi(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$ 在 $a_0 \leqslant 2^{1/4}$ 时可导出满足 B/A 近似为 1 的框架，但在 $a_0 = 2$ 却不能，这是因为 $\sum_{m\in\mathbf{Z}} |\hat{\psi}(a_0^m \xi)|^2$ 波动的振幅太大。为了解决这个问题，在不过多地牺牲选取 ψ 的自由度及其频带宽的条件下，采用 A. Grossmann, R. Kronland - Martinet 和 J. Morlet 使用过的方法，并对音阶采用不同的音频数，也就是说使用几个不同的小波 $\psi^{-1}, \cdots, \psi^N$，并考察

---

① 见本章末注 10。

框架$\{\psi^v_{m,n}; m,n\in\mathbf{Z}, v=1,\cdots,N\}$,仿3.3.2节的分析(参见Daubechies(1990)),可得如下关于这一多音频框架的框架界的估计

$$A = \frac{2\pi}{b_0}\left[\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^v(2^m\xi)|^2 - R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right)\right] \qquad (3.3.19)$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0}\left[\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{v=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^v(2^m\xi)|^2 + R\left(\frac{2\pi}{b_0}\right)\right] \qquad (3.3.20)$$

其中

$$R(x) = \sum_{k\neq 0}\sum_{v=1}^{N}[\beta^v(kx)\beta^v(-kx)]^{1/2}$$

$$\beta^v(s) = \sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^v(2^m\xi)\|\hat{\psi}^v(2^m\xi+s)|$$

只要选取$\hat{\psi}^1,\cdots,\hat{\psi}^n$,使其在无穷远处有好的衰减性,且其频率局部化的中心之间稍有间隔,就可以得到$B/A-1<<1$(见3.3.5节的例子)。对应于这一多音频技术的时一频格与图1.4(a)稍有不同。图3.2示出了每个音阶4个音频的例子。对每个伸缩步长,发现4个不同的频率层(相应于$\psi^1,\cdots,\psi^4$的4个不同的频率局部化)均由同一个平移步长作出平移。这种格可看成是四种如图1.4(a)那样的格的叠加在频率方向上以不同量的扩展,这四个子格各有其不同的"密度",这反映在ψ^v有不同的L^2范数上。Grossmann,Kronland-Martinet和Morlet则采用了对单一小波函数ψ取"分形"伸缩的方法

$$\psi^v(x) = 2^{-(v-1)/N}\psi(2^{-(v-1)/N}x)$$

注意:(这样确实能导致不同的L^2范数!)这样$\sum_{v=1}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}^v(2^m\xi)|^2$简化为$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}(2^{m/N}\xi)|^2$且当$N$足够大时接近于一个常数。

固定$a_0=2$允许对3.2节中的方法作出一些修改,这在某些情形是有用的。现在回到对Rest(f)的估计上来。改写$k\in\mathbf{Z}, k\neq 0$为$k=2^l(2k'+1)$,其中$l\geqslant 0$,$k'\in\mathbf{Z}$,对应$k\to(l,k')$是一对一的。如果$a_0=2$,将不同的项重组可得

$$\mathrm{Rest}(f) = \frac{2\pi}{b_0}\sum_{m',k'\in\mathbf{Z}}\int d\xi\hat{f}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi+2\pi(2k'+1)b_0^{-1}2^{-m'})}$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\overline{\hat{\psi}(2^{m'+l}\xi)}\hat{\psi}[2^l(2^{m'}\xi+2\pi(2l+1)b_0^{-1})]$$

由此可得

$$A = \frac{2\pi}{b_0}\left\{\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{m}|\hat{\psi}(2^m\xi)|^2\right.$$

$$- \sum_{k'=-\infty}^{\infty}\left[\beta_1\left(\frac{2\pi}{b_0}(2k'+1)\right)\beta_1\left(-\frac{2\pi}{b_0}(2k'+1)\right)\right]^{1/2}\Bigg\} \qquad (3.3.21)$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0}\Bigg\{\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{m}|\hat{\psi}(2^m\xi)|^2$$

$$+ \sum_{k'=-\infty}^{\infty}\left[\beta_1\left(\frac{2\pi}{b_0}(2k'+1)\right)\beta_1\left(-\frac{2\pi}{b_0}(2k'+1)\right)\right]^{1/2}\Bigg\} \qquad (3.3.22)$$

其中

$$\beta_1(s) = \sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant 2}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\left|\sum_{l=0}^{\infty}\hat{\psi}(2^{m+l}\xi)\overline{\hat{\psi}(2^l(2^m\xi+s))}\right| \qquad (3.3.23)$$

这些估计是由 Ph. Tchamitchian 提出的(Daubechies(1990)有详细介绍)。注意到 β_1 与 $\hat{\psi}$ 的相位有关,这点与 β 不同,从而当 $\hat{\psi}$ 不是正函数时式(3.3.21)与式(3.3.22)通常比式(3.3.11)和式(3.3.12)更好。如果 $\hat{\psi}$ 是正的,则式(3.3.21)和式(3.3.22)是成立的,它们理所当然地可推广到多音频的情形。

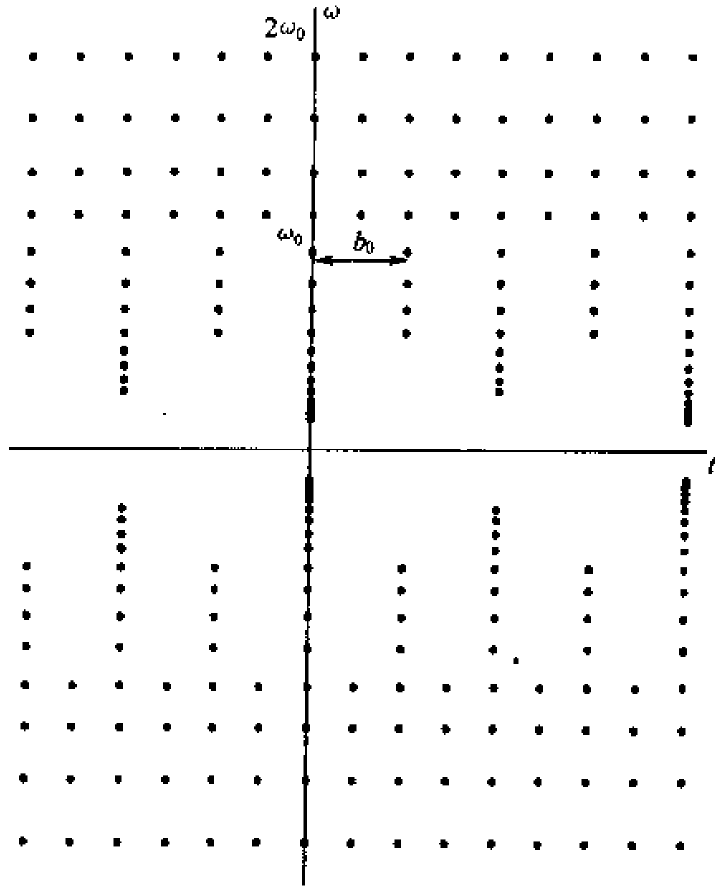


图 3.2 具有 4 个音频的时—频格。这里的 4 个音频小波 $\psi^1,\cdots,\psi^4$ 假定为同一函数 ψ 的伸缩,$\psi^j(x)=2^{-(j-1)/4}\psi(2^{-(j-1)/4}x)$如果$|\hat{\psi}(\xi)|$(假定为偶函数)的顶点在$\pm\omega_0$附近,则$|\hat{\psi}_j|$将集中在$\pm 2^{-(j-1)/4}\omega_0$附近

3.3.5 例子

1. 紧框架

下面的构造(首先由 Daubechies, Grossmann 和 Meyer(1986)提出)导出了一族紧小波框架。设 v 是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^k(或 C^∞)函数并满足

$$v(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}\tag{3.3.24}$$

(见图 3.3),一个 C^1 的函数 v 如

$$v(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \sin^2\dfrac{\pi}{2}x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}\tag{3.3.25}$$

对任意的 $a_0>1, b_0>0$,定义 $\hat{\psi}^{\pm}(\xi)$

$$\hat{\psi}^{+}(\xi)=[\ln a_0]^{-1/2}\begin{cases}0 & \xi\leqslant l \text{ 或 } \xi\geqslant a_0^2 l\\ \sin\left[\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{\xi-l}{l(a_0-1)}\right)\right] & l\leqslant\xi\leqslant a_0 l\\ \cos\left[\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{\xi-a_0 l}{a_0 l(a_0-1)}\right)\right] & a_0 l\leqslant\xi\leqslant a_0^2 l\end{cases}$$

其中 $l=2\pi[b_0(a_0^2-1)]^{-1}$, $\hat{\psi}^{-}(\xi)=\hat{\psi}^{+}(-\xi)$。图 3.4 示出了 $a_0=2, b_0=1, v$ 如式(3.3.25)的 $\hat{\psi}^{+}$。易证

$$|\text{support}\hat{\psi}^{+}|=(a_0^2-1)l=2\pi/b_0$$

且

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}^{+}(a_0^m\xi)|^2=(\ln a_0)^{-1}\chi_{(0,\infty)}(\xi)$$

这里 $\chi(0,\infty)$为区间$(0,\infty)$上的指示函数,即当 $\xi\in(0,\infty)$时,$\chi_{(0,\infty)}(\xi)=1$,当 $\xi\in(0,\infty)$时,$\chi_{(0,\infty)}(\xi)=0$。

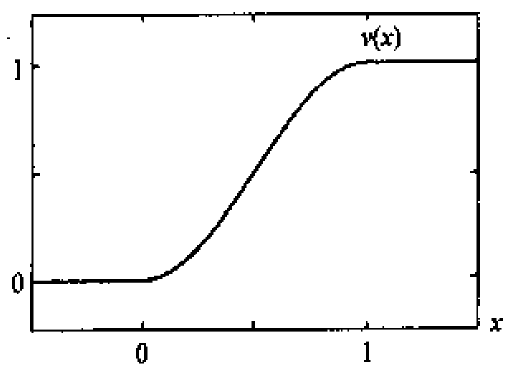


图 3.3　式(3.3.25)定义的函数 $v(x)$

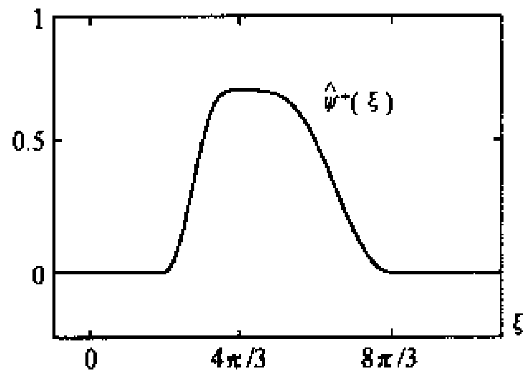


图 3.4　$\hat{\psi}^{+}(\xi)$,其中 $a_0=2, b_0=1$

对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$,总有

$$\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{m,n}^{+}\rangle|^2=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}a_0^m\left|\int_{a_0^{-m}l}^{a_0^{-m}la_0^2}\mathrm{d}\xi\hat{f}(\xi)e^{2\pi na_0^m[l(a_0^2-1)]^{-1}}\overline{\hat{\psi}^{+}(a_0^m\xi)}\right|^2$$

$$=\frac{2\pi}{b_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int\mathrm{d}\xi|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\psi}^{+}(a_0^m\xi)|^2$$

$$=\frac{2\pi}{b_0\ln a_0}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\xi|\hat{f}(\xi)|^2$$

类似地,$\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}^{-}\rangle|^2=\frac{2\pi}{b_0\ln a_0}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\xi\ |\hat{f}(\xi)|^2$,于是 $\{\psi_{m,n}^{\epsilon};m,n\in\mathbf{Z},\epsilon=+\text{或}-\}$构成 $L^2(\mathbb{R})$的一个紧框架,框架界为$\frac{2\pi}{b_0\ln a_0}$。对上述结果作一点变化,可得一个由实小波构成的框架:$\psi^1=\mathrm{Re}\psi^{+}=\frac{1}{2}[\psi^{+}+\psi^{-}]$和 $\psi^2=\mathrm{Im}\psi^{+}=\frac{1}{2i}[\psi^{+}+\psi^{-}]$生成紧框架$\{\psi_{m,n}^{\lambda};m,n\in\mathbf{Z},\lambda=1,2\}$。这些框架不是由一个函数经伸缩、平移得来的,这是对结构中正负频率解耦的一个自然的过程。它们在实际中一个很有用的性质是它们的傅里叶变换为紧支的且支集相当小(对于适当的 a_0,b_0)。因此,这种小波在数值上的衰减很慢,即使选取 $v\in C^{\infty}$以使 $\psi^{\pm}$比任何多项式的倒数衰减得更快

$$|\psi^{\pm}(x)|\leqslant C_N(1+|x|)^{-N}$$

也是如此,C_N 的数值对实际应用而言也太大。注意,在这个构造过程中,我们没有对 a_0,b_0 附加任何条件。

2. 墨西哥帽状函数

墨西哥帽状函数是高斯函数 $e^{-x^2/2}$的二阶函数。如果将其按 L^2 范数标准化,则得这个函数

$$\psi(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}$$

(包括伸缩、平移变形)表示在图 1.2(b)中。如果取其中一条曲线绕其对称轴旋转就可以得到类似于墨西哥帽状的函数图形。这个函数首次并已广泛应用于图像分析(至少是在理论上),表 3.1 给出了这个函数由式(3.3.19) 和式(3.3.20) 计算出的框架界,其中 $a_0=2,b_0$ 取不同的值和音频数 v,且取 1~4。只要选音频数为 2 或更多,则对所有的 $b_0\leqslant 0.75$,所有的框架可以看成是紧的。值得注意,$b_0=0.75$ 和$(a_0)_{\mathrm{effective}}=2^{1/2}\approx 1.41$(与每音节两个音频对应)对墨西哥帽状函数而言不算小值:ψ 的最大值点与其零点的距离仅为 1,且 $\hat{\psi}$ 的正频率的宽度(以

$\left[\int_0^\infty d\xi(\xi-\xi_{av})^2\|\hat{\psi}(\xi)\|^2\right]^{1/2}$ 度量，其中 $\xi_{av}=\int_0^\infty d\xi\xi|\hat{\psi}(\xi)|^2)$ 为$\sqrt{3/2}\approx 1.23$。对于固定的 N，足够小的 b_0，框架就近似为紧框架；由表中可以看出，$A\approx B$ 与 b_0 有反比例关系，这与标准向量构成的紧框架中用 $A=B$ 度量"冗余度"这一点是一致的(见 3.2 节)，当 b_0 减半时 $A=B$ 自然应该翻番。另一方面，由表3.1 可看出，当 b_0 太大时 B/A 戏剧性地增加。对每个 N，表中对应于最后一个 b_0(以 0.5 递增)的值是保证 A 的估计(按式(3.3.19))为正的最后一个值，从下一个 b_0 开始，$\psi_{m,n}$可能不再构成基。这种当 b_0 增加时由好框架到差框架再到非框架的陡峭变化最早由 J. Morlet(1985，私人通信)讨论并成为对它们作详尽数学讨论的一种推动力。

3. 调制高斯函数

这是 R. Kronland - Martinet 和 J. Morlet 常用的一个函数。其富氏变换是移位的 Gaussian 函数，以使 $\hat{\psi}(0)=0$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi) &= \pi^{-1/4}[e^{-(\xi-\xi_0)^2/2}-e^{-\xi^2/2}e^{-\xi_0/2}]\\ \psi(x) &= \pi^{-1/4}(e^{-i\xi_0 x}-e^{-\xi_0^2/2})e^{-x^2/2}\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

通常选取 ξ_0 以使 ψ 的最高极大值与第二最高极大值的比近似为 2，即 $\xi_0=\pi[2/\ln 2]^{1/2}\approx 5.3364$；实际应用中常取 $\xi_0=5$。对这个 ξ_0，式(3.3.26)的第二项很小，在实际中可以忽略不计。这个 Morlet 小波是复数的，尽管在其绝大多数的应用中仅牵涉到实信号 f。通常(见 Kronland - Martinet 和 Grossmann(1989))用这个复小波对实信号的小波变换常以模—相的方式记载，即记为 $|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|$ 和 $\tan^{-1}[\mathrm{Im}\langle f,\psi_{m,n}\rangle/\mathrm{Re}\langle f,\psi_{m,n}\rangle]$而不是 $\mathrm{Re}\langle f,\psi_{m,n}\rangle$和 $\mathrm{Im}\langle f,\psi_{m,n}\rangle$。对模的记载特别适合奇异性的检测(见 Grossmann(1987))。对于实的 f，通过 $\hat{f}(-\xi)=\overline{\hat{f}(\xi)}$，可以得出如下的框架界(这与 2.4 节中对实 f 的讨论类似)

$$A=\frac{2\pi}{b_0}\left\{\frac{1}{2}\inf_\xi\left[\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2+|\hat{\psi}(a_0^{-m}\xi)|^2\right]-R\right\}$$

$$B=\frac{2\pi}{b_0}\left\{\frac{1}{2}\sup_\xi\left[\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2+|\hat{\psi}(a_0^{-m}\xi)|^2\right]+R\right\}$$

其中

$$R=\sum_{\varepsilon=+,-}\sum_{k\neq 0}\left[\beta_\varepsilon\left(\frac{2\pi}{b_0}k\right)\beta_\varepsilon\left(-\frac{2\pi}{b_0}k\right)\right]^{1/2}$$

$$\beta_\varepsilon(s)=\frac{1}{4}\sup_\xi\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)+\varepsilon\hat{\psi}(-a_0^m\xi)\|\hat{\psi}(a_0^m\xi+s)+\varepsilon\hat{\psi}(-a_0^m\xi-s)|$$

表 3.1

基于墨西哥帽函数 $\psi(x)=2/\sqrt{3}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2}$，伸缩参数 $a_0=2$；N 是音频参数

$N=1$

b_0	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083
0.50	6.546	7.092	1.083
0.75	4.364	4.728	1.083
1.00	3.223	3.596	1.116
1.25	2.001	3.454	1.726
1.50	0.325	4.221	12.986

$N=2$

b_0	A	B	B/A
0.25	27.273	27.278	1.0002
0.50	13.673	13.639	1.0002
0.75	9.091	9.093	1.0002
1.00	6.768	6.870	1.015
1.25	4.834	6.077	1.257
1.50	2.609	6.483	2.485
1.75	0.517	7.276	14.061

$N=3$

b_0	A	B	B/A
0.25	40.914	40.914	1.0000
0.50	20.457	20.457	1.0000
0.75	13.638	13.638	1.0000
1.00	10.178	10.279	1.010
1.25	7.530	8.835	1.173
1.50	4.629	9.009	1.947
1.75	1.747	9.942	5.691

$N=4$

b_0	A	B	B/A
0.25	54.552	54.552	1.0000
0.50	27.276	27.276	1.0000
0.75	18.184	18.184	1.0000
1.00	13.586	13.690	1.007
1.25	10.205	11.616	1.138
1.50	6.594	11.590	1.758
1.75	2.928	12.659	4.324

这些结论也可推广到多音频的情形。表 3.2 给出了 $a_0=2$，不同的 b_0 和从 2 到 4 的不同音频的框架界，实际中的音频数往往比表出的还要高。

表 3.2

基于调制函数，$\psi(x)=\pi^{-1/4}(e^{-i\xi_0 x}-e^{-\xi_0^2/2})e^{-x^2/2}$，$\xi_0=\pi(2/\ln 2)^{1/2}$

的小波框架的框架界，伸缩参数 $a_0=2$；N 是音频参数

$N=2$

b_0	A	B	B/A
0.5	6.019	7.820	1.299
1.0	3.009	3.910	1.230
1.5	1.944	2.669	1.373
2.0	1.173	2.287	1.950
2.5	0.486	2.282	4.693

$N=3$

b_0	A	B	B/A
0.5	10.295	10.467	1.017
1.0	5.147	5.234	1.017
1.5	3.366	3.555	1.056
2.0	2.188	2.188	1.372
2.5	1.175	2.977	2.534
3.0	0.320	3.141	9.824

$N=4$

b_0	A	B	B/A
0.5	13.837	13.847	1.0006
1.0	6.918	6.923	1.0008
1.5	4.540	4.688	1.032
2.0	3.013	3.910	1.297
2.5	1.708	3.829	2.242
3.0	0.597	4.017	6.732

4. 一个易于实现的例子

到现在为止，我们尚未提到如何实际地计算小波系数$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$，实际生活中，$f$并非以函数形式而是以采样值形式给定。于是计算$\int dx f(x)\overline{\psi_{m,n}(x)}$就需要一些求积公式。对于很小的尺度(大多数负数$m$)，由于只牵涉到$f$的不太多的采样点，可以很快地计算出。但对于很大的尺度，就得计算很大的积分，对任何给定函数的小波变换的计算就会减慢。特别是对在线实施，必须避免这种长积分的计算。所谓的"裤形算法 trous algorithme"(Holschneider et al.(1989))就能做到这点，它采用插入技术避免长积分的计算(详情请参阅他们的文章)。这里仅举一个类似的例子(尽管这不是"裤形")，借用多分辨分析和标准正交基的讨论(以后将会谈到)即引入一个辅助函数ϕ，基本思想是：假定存在函数ϕ满足

$$\psi(x)=\sum_k d_k\phi(x-k) \tag{3.3.27}$$

$$\phi(x)=\sum_k c_k\phi(2x-k) \tag{3.3.28}$$

其中只有有限个系数非零① (这样的函数对ϕ,ψ有很多，下面给出了一个例子。"裤形算法"对应于一个特殊ϕ满足$c_0=1$，所有偶数指标的$c_{2n}=0$)。这里ϕ的积分不为0(但ψ的积分为0)，标准化ϕ使得$\int dx\phi(x)=1$，尽管ϕ不是小波函数，定义$\phi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\phi(2^{-m}x-n)$，取$a_0=2,b=1$。显然

$$\langle f,\psi_{m,n}\rangle=\sum_k d_k\langle f,\phi_{m,n+k}\rangle$$

于是求小波系数就简化为计算$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$(其有限的组合就构成了$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$)，另一方面

$$\langle f,\phi_{m,n}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_k c_k\langle f,\phi_{m-1,2n+k}\rangle$$

---

① 见本章末注 11。

于是$\langle f,\phi_{m,n}\rangle$的计算可以从最小尺度开始(这时容易计算)一直到最大尺度递归地进行计算。这样一来,只需做简单有限的卷积运算即可。

下列函数组是满足式(3.3.27)、式(3.3.28)的例子

$$\psi(x)=N\left[-\frac{1}{2}\phi(x+1)+\phi(x)-\frac{1}{2}\phi(x-1)\right]$$

$$\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2i\xi}\left(\frac{e^{i\xi}-1}{i\xi}\right)^4=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^4$$

它对应于

$$\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}(x+2)^3 & -2\leqslant x\leqslant -1\\ \frac{2}{3}-x^2(1+x/2) & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{2}{3}-x^2(1-x/2) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{6}(x-2)^3 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

N 是使 $\|\psi\|=1$ 的常数,可算出 $N=6\sqrt{\frac{70}{1313}}$,$\phi$ 和 ψ 图示于图 3.5(a),它们不像 3.5(b)所示 Gaussian 函数及其二阶导数。显然 ψ 满足式(3.3.27),其中 $d_0=N,d_{\pm1}=-N/2$,其余的 $d_k=0$,而

$$\hat{\phi}(2\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^4=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\sin\xi/2\cos\xi/2}{\xi}\right)^4=(\cos\xi/2)^4\hat{\phi}(\xi)$$

蕴涵

$$\phi(x)=\frac{1}{8}\phi(2x+2)+\frac{1}{2}\phi(2x+1)+\frac{3}{4}\phi(2x)+\frac{1}{2}\phi(2x-1)+\frac{1}{8}\phi(2x-2)$$

即 $c_0=\frac{3}{4},c_{\pm1}=\frac{1}{2},c_{\pm2}=\frac{1}{8}$,其余的 $c_k=0$,对这个 ψ,当 $a_0=2,b_0=1$ 时框架界为 $A=0.73178,B=1.77107,B/A=2.42022$;当 $a_0=2,b_0=0.5$ 时,$A=2.33854,B=2.66717,B/A=1.14053$(采用 $b_0=0.5$ 意味着联系 $\psi_{m,n}$ 和 $\phi_{m,n}$,$\phi_{m,n}$和 $\phi_{m-1,n}$的递推公式要作些修改,但这很容易)。这里我们仅采用了一个音频。当然还可以根据不同 d_k^v 而选取几个不同 ψ^v,这样就产生了一个多音频策略,其更接近于紧框架。

现举例到此为止，Daubechies(1990)给出了一些例子(其中一个用式(3.3.21)和式(3.3.22)估计优于式(3.3.11)和式(3.3.12))。当然还可以构造许多其他的例子。Mallat 和 Zhong(1990)采用的例子与我们的最后一个例子属同一类型，那里 ψ 是某个积分不等于 0 的函数的一阶导函数(所以$\int \mathrm{d}x\psi(x)=0$，但$\int \mathrm{d}xx\psi(x)\neq 0$)。

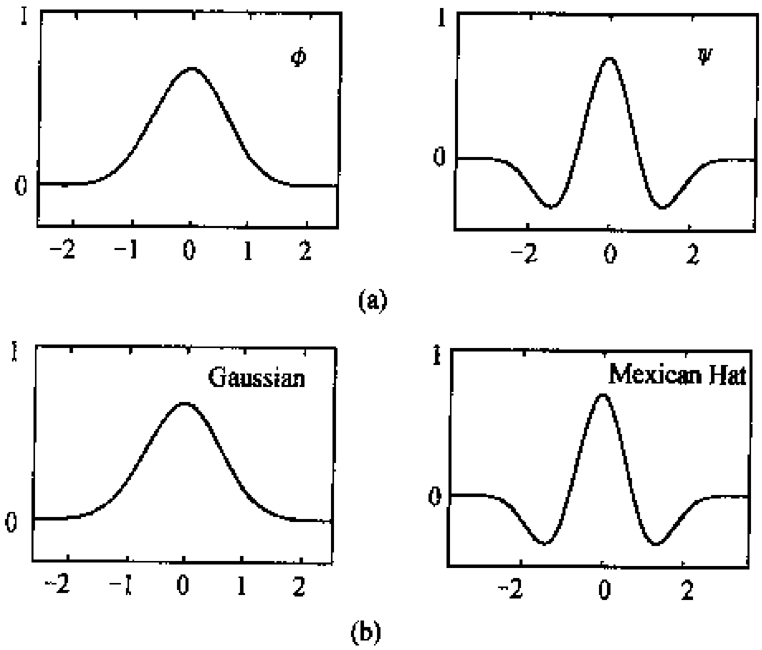


图 3.5 一个容易实现的例子：ϕ，ψ 示于(a)；
为此求比较一个 Gaussian 函数及其二阶导函数示于(b)

3.4 窗口傅里叶变换的框架

第 2 章的窗口傅里叶变换也可以离散化。对 $g^{\omega,t}(x)=\mathrm{e}^{i\omega x}g(x-t)$的 ω,t 离散化的自然的方法是取 $\omega=m\omega_0, t=nt_0$，其中 $\omega_0, t_0>0$ 是固定的，m 和 n 取遍 $\mathbf{Z}$；于是得到一族具有离散下标的函数

$$g_{m,n}(x) = \mathrm{e}^{im\omega_0 x}g(x-nt_0)$$

可以对与小波同样的问题求解：

(1) 对什么样的 g, ω_0, t_0 能由内积$\langle f, g_{m,n}\rangle$表征函数 f?

(2) 怎样才能由这些内积经由数值稳定的方法重构函数 f?

(3) 能否给出一个有效的算法将 f 表示为$g_{m,n}$的线性组合?

这些问题的答案也存在于同样的抽象框架中：仅当 $g_{m,n}$构成框架，即$\exists A>0, B<$

∞,使得

$$A\int dx\,|f(x)|^2 \leqslant \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |\langle f,g_{m,n}\rangle|^2 \leqslant B\int dx\,|f(x)|^2$$

时,存在由 f 的窗口傅里叶系数$\langle f,g_{m,n}\rangle=\int dx f(x)e^{-im\omega_0 x}\overline{g(x-nt_0)}$重构 f 的数值稳定的方法。如果 $g_{m,n}$构成框架,则任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$,可以写成

$$f=\sum_{m,n}\langle f,g_{m,n}\rangle\widetilde{g_{m,n}}=\sum_{m,n}(f,\widetilde{g_{m,n}})g_{m,n} \tag{3.4.1}$$

其中$\widetilde{g_{m,n}}$为对偶框架中的向量。式(3.4.1)即说明了如何将 f 写为 $g_{m,n}$的叠加。对窗口傅里叶函数框架的详细分析导出了一些由其不同构造而导致的与小波框架不同的性质。

3.4.1 一个必要条件:足够高的时-频密度

定理 3.3.1 证明中的讨论同样可用于窗口傅里叶变换的情形(当然要做些明显的修改),于是得出任何窗口傅里叶函数框架均需满足

$$A\leqslant\frac{2\pi}{\omega_0 t_0}\|g\|^2\leqslant B \tag{3.4.2}$$

的结论,其中 A 和B 为框架界。这里并未对 g 附加任何条件(当然我们总是假定 $g\in L^2(\mathbb{R})$)。式(3.4.2)的一个推论是任何紧框架的框架界为 $2\pi(\omega_0,t_0)^{-1}$(如果选 g 为范数为 1 的函数)。特别地,如果 $g_{m,n}$构成标准正交基,则 $\omega_0 t_0=2\pi$。

不等式(3.4.2)中对 g 没有附加限制,是与连续窗口傅里叶变换不需要容许条件相类似的(见第 2 章),这点与小波框架和连续小波变换都要求母小波 ψ 满足 $\int d\xi|\xi|^{-1}\hat{\psi}(\xi)|^2<\infty$不同。另一点与小波框架不同的是 t_0 和 ω_0 是有限制的:对于 $\omega_0 t_0>2\pi$ 的 t_0 和 ω_0 是不存在窗口傅里叶框架的。甚至有这种情况:如果 $\omega_0 t_0>2\pi$,则$\forall g\in L^2(\mathbb{R})$,$\exists f\in L^2(\mathbb{R})(f\neq 0)$,使得 f 垂直于所有的$g_{m,n}(x)=e^{im\omega_0 x}g(x-nt_0)$。这时 $g_{m,n}$非但不构成框架,就连内积$\langle f,g_{m,n}\rangle$也不足以确定 f。因此我们总要求 $\omega_0 t_0\leqslant 2\pi$,为了获得好的时-频局部化,甚至要求 $\omega_0 t_0<2\pi$。注意小波框架中没有对 a_0,b_0 作类似的限制!我们将在第 4 章讨论这些条件,在那里还将与小波框架对比起来,对窗口傅里叶变换中时—频密度的作用做较详细的讨论,将 $\omega_0 t_0<2\pi$ 的必要性的证明留待那时。

3.4.2 框架界的充分条件及估计

即使 $\omega_0 t_0\leqslant 2\pi$,$g_{m,n}$也未必构成框架。一个简单的反例是

$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

只要 $t_0>1$,无论 ω_0 多小,任何支集在$[1,t_0]$上的 f 都与 $g_{m,n}$正交。本例中 es-$\sin f_x \sum_n |g(x-nt_0)|^2=0$,这正是 $g_{m,n}$不构成框架的原因(类似的情形在小波框架中也有,见 3.3 节)。

与小波情形完全类似地推导可得

$$\inf_{\substack{f\in\mathscr{H}\\ f\neq 0}}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2$$

$$\geqslant\frac{2\pi}{\omega_0}\left\{\inf_x\sum_n|g(x-nt_0)|^2-\sum_{k\neq 0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}\tag{3.4.3}$$

$$\sup_{\substack{f\in\mathscr{H}\\ f\neq 0}}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{\omega_0}\left\{\sup_x\sum_n|g(x-nt_0)|^2+\sum_{k\neq 0}\left[\beta\left(\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)\beta\left(-\frac{2\pi}{\omega_0}k\right)\right]^{1/2}\right\}\tag{3.4.4}$$

其中 β 定义为

$$\beta(s)=\sup_x\sum_n|g(x-nt_0)||g(x-nt_0+s)|$$

与小波情形一样,由 g 衰减足够快可得β 的衰减,因此只要选 ω_0 足够小,式(3.4.3)和式(3.4.4)的右边就可以足够小。如果 $\sum_n|g(x-nt_0)|^2$ 有界且有严格正的下界(g 的零点孤立),则对充分小的 ω_0, $g_{m,n}$构成框架,框架界由式(3.4.3)和式(3.4.4)给出。简单地说,可以得到下面的定理。

定理 3.4.1 设 g,t_0 使得

$$\inf_{1\leqslant x\leqslant t_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g(x-nt_0)|^2>0$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant t_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g(x-nt_0)|^2<\infty\tag{3.4.5}$$

且 $\beta(s)=\sup_{0\leqslant x\leqslant t_0}\sum_n|g(x-nt_0)||g(x-nt_0+s)|$ 的衰减速度至少相当于$(1+|s|)^{-(1+\epsilon)}$, $\epsilon>0$,则存在$(\omega_0)_{\text{thr}}>0$,当 $\omega_0<(\omega_0)_{\text{thr}}$时,$g_{m,n}(x)=e^{im\omega_0 x}g(x-nt_0)$构成一个框架。且在 $\omega_0<(\omega_0)_{\text{thr}}$时,式(3.4.3)和式(3.4.4)的右端即为 $g_{m,n}$ 的框架界。

关于 β 的条件及式(3.4.5),只要,例如使$|g(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-r}$, $r>1$ 即可得到满足。

注意:窗口傅里叶框架具有在傅里叶变换下的一种对称性,这是小波情形所缺乏的。

即

$$(g_{m,n})^{\wedge}(\xi) = e^{-int_0\xi}\hat{g}(\xi - m\omega_0),$$

这蕴含着当把式(3.4.3)和式(3.4.4)中(包含在 β 的定义中)的每一处 g,ω_0,t 分别换成 $\hat{g},t_0,\omega_0$ 时,式(3.4.3)和式(3.4.4)仍然成立。运用这个注意,将能够算出 A 的两个估计值和 B 的两个估计值,从而可选出最大 A 和最小的 B。

3.4.3 对偶框架

对偶框架可再定义为

$$\widetilde{g_{m,n}} = (F^*F)^{-1}g_{m,n}$$

F^*F 现在是 $(F^*F)f = \sum_{mn}\langle f,g_{m,n}\rangle g_{m,n}$。并且 F^*F 可以与 t_0 的平移及 $e^{i\omega_0 x}$ 的倍乘进行交换,即如果定义 $(Tf)(x) = f(x-t_0)$,$(Ef)(x) = e^{i\omega_0 x}f(x)$ 那么

$$F^*FT = TF^*F, F^*FE = EF^*F$$

同样 $(F^*F)^{-1}$ 也能用 E、T 替换。于是

$$\widetilde{g_{m,n}} = (F^*F)^{-1}E^mT^ng = E^mT^n(F^*F)^{-1}g$$

或

$$\widetilde{g_{m,n}}(x) = e^{i\omega_0 x}\tilde{g}(x - nt_0) = \tilde{g}_{m,n}(x)$$

其中 $\tilde{g} = (F^*F)^{-1}g$。与小波情形不同,窗口函数的对偶框架总是通过单个函数 $\tilde{g}$ 生成。这意味着,在窗口傅里叶情形下一个框架是否接近于紧框架并不那么重要。如果 $B/A-1$ 不可忽略时,仅需对 $\tilde{g}$ 计算到高精度,即可一劳永逸地用对两个对偶框架去工作。

3.4.4 例子

A. 在时域或频域具紧支集的紧框架

下面的构造也是引自 Daubechies, Grossmann 和 Meyer(1986),与 3.3.5 节类似,在 $\omega_0 t_0 < 2\pi$ 的条件下,可导出具有任意正则性的窗口傅里叶紧框架。如果支撑 support $g \subset \left[-\frac{\pi}{\omega_0},\frac{\pi}{\omega_0}\right]$,则

$$\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2$$

$$= \sum_{m,n}\left|\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathrm{d}x e^{in\omega_0 x}\sum_{l\in\mathbf{Z}}f\left(x + l\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\overline{g\left(x + l\frac{2\pi}{\omega_0} - nt_0\right)}\right|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0}\sum_n\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathrm{d}x\left|\sum_{l\in\mathbf{Z}}f\left(x+l\frac{2\pi}{\omega_0}\right)g\left(x+l\frac{2\pi}{\omega_0}-nt_0\right)\right|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0}\sum_{n,l}\int_0^{2\pi/\omega_0}\mathrm{d}x\left|f\left(x+l\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right|^2\left|g\left(x+l\frac{2\pi}{\omega_0}-nt_0\right)\right|^2$$

上式中我们已经用到了对任意 n 至多有一个 l 的值起作用这一特点，这是由 g 的支撑特性所决定的。所以

$$\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2 = \frac{2\pi}{\omega_0}\int\mathrm{d}x\,|f(x)|^2\sum_n|g(x-nt_0)|^2$$

当且仅当 $\sum_n|g(x-nt_0)|^2$ 为常数时，此框架为紧的。如果 $\omega_0t_0\geqslant\pi$，我们可从满足式(3.3.25)的一个 C^k 或 C^∞ 函数 v 出发并定义

$$g(x) = t_0^{-1/2}\begin{cases}\sin\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{\pi+\omega_0x}{2\pi-\omega_0t_0}\right)\right] & -\frac{\pi}{\omega_0}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{\omega_0}-t_0\\ 1 & \frac{\pi}{\omega_0}-t_0\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{\omega_0}+t_0\\ \cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{\pi-\omega_0x}{2\pi-\omega_0t_0}\right)\right] & -\frac{\pi}{\omega_0}+t_0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{\omega_0}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 g 是有紧支撑的一个 C^k 或 C^∞ 函数(依赖于 v 的选择)，$\|g\|=1$，$g_{m,n}$构成框架界为 $2\pi(\omega_0t_0)^{-1}$的一个紧框架(已从式 3.4.2 中得出)。如果 $\omega_0t_0<\pi$，这种构造方式更容易被接受，这种构造形成了一个用紧支撑 g 的所作成的紧框架。通过对它做傅里叶变换，可获得了一种其窗口函数有紧支撑的傅里叶变换的框架①。

B. 高斯窗框架

在这个例子中 $g(x)=\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{-x^2/2}$。对 Gauss 窗的窗口傅里叶函数的离散族在各种文献中已经广泛地讨论过。Gabor(1946)建议将其用于通信(他提出 $\omega_0t_0=2\pi$，但这是不恰当的，下面将论及它)，在量子力学中“典型相干态”的重要性(见 Klauder 和 Skagerstam(1985))是物理学家感兴趣的内容；有关 Gauss 相干态和整函数 Bargmann 空间之间的联系使得人们有可能利用 Bargmann 空间采样特性去改写关于 $g_{m,n}$的结果。利用与整函数的这种的联系，Bargmann et al(1971)和 Perelomov(1971)已经证明当且仅当时 $\omega_0t_0\leqslant2\pi$ 时 $g_{m,n}$可展开整个 $L_2(\mathbb{R})$空间；Bacry、Gaussian 和 Zak(1975)用不同的方法指出当 $\omega_0t_0=2\pi$ 时，有下列等式成立

$$\inf_{\substack{f\in\mathscr{H}\\f\neq0}}\|f\|^{-2}\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2 = 0$$

① 见本章末注 12。

即使函数系 $g_{m,n}$对于展开整个$L^2(\mathbb{R})$而言是“完全的”，上式也成立[①]（我们将在第 4 章中看到，这是对 $\omega_0 t_0=2\pi$ 和 $g,\hat{g}$ 具有正则性的直接结论）。因此这是一个可以用其内积$\langle f,g_{m,n}\rangle$充分表征函数 f（如果$\langle f_1,g_{m,n}\rangle=\langle f_2,g_{m,n}\rangle$对所有的 m,n 成立，则 $f_1=f_2$）的函数族 $g_{m,n}$的例子，但不存在从$\langle f,g_{m,n}\rangle$中重建 f 的数值稳定的重建公式。Bastiaans(1980,1981)构造了一个对偶函数 $\tilde{g}$，使得

$$f=\sum_{m,n}\langle f,g_{m,n}\rangle\tilde{g}_{m,n} \tag{3.4.6}$$

其中 $\tilde{g}_{m,n}=e^{im\omega_0 x}\tilde{g}(x-nt_0)$，但式(3.4.6)只在非常弱的意义下（在分布的意义下——见 Janssen(1981,1984)）才具有收敛性，甚至在弱的 L_2 意义下也不行；事实上，$\tilde{g}$ 本身不在$L_2(\mathbb{R})$中。

$\omega_0 t_0=2\pi$ 的情形已经完全了解了，那么 $\omega_0 t_0<2\pi$ 将发生什么？表 3.3 展示了对 $\omega_0 t_0$ 的各种取值下，框架界 A、B 和比值B/A 的对应值，对 A、B 的计算是根据式(3.4.3)、式(3.4.4)及用 $\tilde{g}$ 的类似的公式作出的。我们发现，甚至当 $\omega_0 t_0/2\pi=0.95$ 时，$g_{m,n}$也肯定构成框架，虽然此时 B/A 已变得非常大，非常接近于“临界”密度。也可以证明当 $\omega_0 t_0/(2\pi)=1/N,N\in N,N>1$ 时，可以用另一种方法去计算框架界，从而得出一种精确值（含计算误差），分别代替 A、B 的较低和较高的界[②]。表 3.3 给出了 $\omega_0 t_0/(2\pi)=1/4$ 和 1/2 时的这些精确值，人们可以惊奇地发现，A、B 的界是何等接近于这些精确值（虽然，它们是通过 Cauchy - Schwarz 不等式得到的，有可能相当粗糙）。将 A、B 的这些值代入 3.2 节末尾的近似公式中，则可以对 $\omega_0 t_0$ 的不同选择计算出 $\tilde{g}$ 的值。

图 3.6 显示了对 $\omega_0=t_0=(\lambda 2\pi)^{1/2}$且 λ 的值由 0.25,0.375,0.5,0.75,0.95 到 1 的特殊选择下 $\tilde{g}$ 的图形。注意到 Bastiaans 的函数 $\tilde{g}$，它相当于 $\lambda=1$（图 3.6 中右下方），必须另外计算，因为 $\lambda=1$ 时 $A=0$。对于小的 λ，其框架非常近于紧框架，且 $\tilde{g}$ 也非常接近于g 自身，例如 $\lambda=0.25$ 时，$\tilde{g}$ 有近似 Gauss 的外观形状。随着 λ 的增长，此框架变得更少冗余（$\tilde{g}$ 的根大振幅的增长可以反应这一点）也不紧凑，$\tilde{g}$ 越来越偏离 Gauss 函数。由 g 和$\hat{g}$ 有快于指数的衰减性，从 $\tilde{g}$ 的收敛级数表示（见 3.2 节）可以证明 $\tilde{g}$ 和$\hat{\tilde{g}}$当$A>0$ 时也有指数衰减性，因此图 3.6 中所有 $\lambda<1$ 时的 $g_{m,n}$都有好的时—频局部化特征，即使随着 λ 的增加$\tilde{g}$ 趋向于 Astiauns 的病

① 见本章末注 13。

② 见本章末注 14。

态 $\tilde{g}$ 时也是如此。对于 $\lambda=1$，整个时—频局部化都打破了[①]。图 3.6 中的图形系列暗示一种猜测，它是 Daubechies 和 Grossmann(1988)首先提出的，即至少对 Gauss 函数 g，只要 $\omega_0 t_0 < 2\pi$，$g_{m,n}$ 都形成一种框架。Daubechies 于 1990 年对 $\omega_0 t_0/(2\pi) < 0.996$ 证实了上述结论。运用整函数方法，这种猜测已经被 Lyubarskii(1989)以及 Seip 和 Wallsten(1990)独立地证明了。

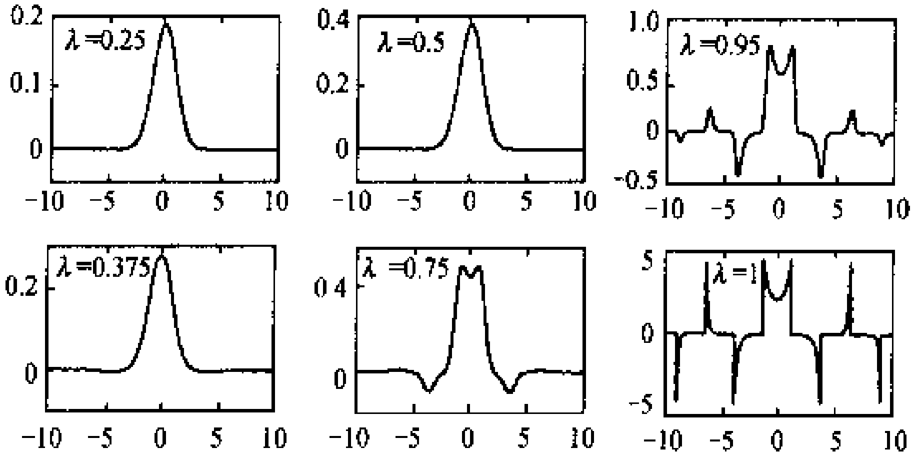


图 3.6　对 Gauss 函数 g 和 $\omega_0=t_0=(\lambda 2\pi)^{1/2}$，$\lambda=0.25, 0.375, 0.5, 0.75, 0.95, 1$ 时的对偶框架函数 $\tilde{g}$。随着 λ 的增长，$\tilde{g}$ 越来越是偏离 Gauss 函数(反应 B/A 的增长)，而且它的振幅也增大(因为 $A+B$ 减小)，对于 $\lambda=1$，$\tilde{g}$ 不再平方可积

当然存在着对窗口函数 g 的许多其他的可能选择，但我们将停在这里，转回到小波的讨论上去。

3.5　时—频局部化

研究小波变换(或窗口傅里叶变换)的主要原因是它们提供了一张时—频图，并且有望对这两个变量都有好的局部化特征。曾几次谈过，如果 ψ 自身在时间和频率上有好的局部化，则通过 ψ 产生的框架也具有这种特性。这一节我们想让这种模糊的说法更精确些。

为了方便，假定 $|\psi|$ 和 $|\hat{\psi}|$ 都是对称的(例如，ψ 是实的且对称的，一个好的例子就是墨西哥帽状函数)[②]，则 ψ 是在时间变量上集中于 0 附近，在频率上接近于 $\pm\xi$ 附近(例如，定义 $\xi_0=\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\xi\,|\hat{\psi}|^2/\left[\int_0^\infty \mathrm{d}\xi\,|\hat{\psi}(\xi)|^2\right]$)。如果 ψ 在时间和频

① 见本章末注 15。

② 见本章末注 16。

率上有较好的局部化,则 $\psi_{m,n}$ 时间上在 $a_0^m nb_0$ 附近,频率上在 $\pm a_0^{-m}\xi_0$ 附近也有类似的局部化。直观地,$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$ 代表了 f 在时间上在 $a_0^m nb_0$ 附近,频率上在 $\pm a_0^{-m}\xi_0$ 附近的信息内容。如果 f 自身在时间—频率的两个矩形中"本质局部化",则意味着对某些 $0<\Omega_0<\Omega_1<\infty$, $0<T<\infty$,有

表 3.3

$g(x)=\pi^{1/4}\exp(-x^2/2)$ 及 $\omega_0 t_0$ 的不同取值时的框架界 A, B 和比率 B/A 的值。对 $\omega_0 t_0=\pi/2$ 和 π,通过 Zak 变换(见 Daubechies 和 Grossmann(1988))计算出的框架界精确值。

$\omega_0 t_0=\pi/2$

t_0	A_B	A_{exact}	B	B_{exact}	B/A
0.5	1.203	1.221	7.091	7.091	5.896
1.0	3.853	3.854	4.147	4.147	1.076
1.5	3.899	3.899	4.101	4.101	1.052
2.0	3.322	3.322	4.679	4.679	1.408
2.5	2.365	2.365	5.664	5.664	2.395
3.0	1.427	1.427	6.772	6.772	4.745

$\omega_0 t_0=2\pi/4$

t_0	A	B	B/A
1.0	1.769	3.573	2.019
1.5	2.500	2.833	1.133
2.0	2.210	3.124	1.414
2.5	1.577	3.776	2.395
3.0	0.951	4.515	4.745

$\omega_0 t_0=\pi$

t_0	A	A_{exact}	B	B_{exact}	B/A
1.0	0.601	0.601	3.546	3.546	5.901
1.5	1.519	1.540	2.482	2.482	1.635
2.0	1.575	1.600	2.425	2.425	1.539
2.5	1.172	1.179	2.843	2.843	2.426
3.0	0.713	0.713	3.387	3.387	4.752

$\omega_0 t_0 = 3\pi/4$

t_0	A	B	B/A
1.0	0.027	3.545	130.583
1.5	0.342	2.422	7.082
2.0	0.582	2.089	3.592
2.5	0.554	2.123	3.834
3.0	0.393	2.340	5.953
3.5	0.224	2.656	11.880
4.0	0.105	3.014	28.618

$\omega_0 t_0 = 1.9\pi$

t_0	A	B	B/A
1.5	0.031	2.921	92.935
2.0	0.082	2.074	25.412
2.5	0.092	2.021	22.004
3.0	0.081	2.077	25.668
3.5	0.055	2.218	40.455
4.0	0.031	2.432	79.558

$$\int_{\Omega_0 \leqslant \xi \leqslant \Omega_1} d\xi \, |\hat{f}(\xi)|^2 \geqslant (1-\delta)\|f\|^2 \tag{3.5.1}$$

$$\int_{|x| \leqslant T} dx \, |f(x)|^2 \geqslant (1-\delta)\|f\|^2 \tag{3.5.2}$$

这里 δ 是一个小数,则直观地可以看出只有那些使时—频中心$(a_0^m nb_0, \pm a_0^{-m}\xi_0)$或者含于或接近于$[-T, T] \times ([-\Omega_1, -\Omega_0] \cup [\Omega_0, \Omega_1])$的 m, n 所对应的$\langle f, \psi_{m,n}\rangle$对于重建 f 到一个好的近似才是必要的。下面的定理说明它的正确性,但需做适当修正。

定理 3.5.1 设 $\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^m x - nb_0)$组成一个框架界为 A、B 的框架,又

$$|\psi(x)| \leqslant C(1+x^2)^{-\alpha/2}, |\hat{\psi}(\xi)| \leqslant C|\xi|^{\beta}(1+\xi^2)^{-(\beta+\gamma)/2} \tag{3.5.3}$$

其中 $\alpha>1,\beta>0,\gamma>1$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在有限集 $B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1;T)\subset\mathbf{Z}^2$,使得对所有 $f\in L^2(\mathbb{R})$

$$\left\|f-\sum_{(m,n)\in B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1,T)}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\widetilde{\psi}_{m,n}\right\|$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{B}{A}}\left[\left(\int_{\substack{|\xi|<\Omega_0\\ \text{或}|\xi|>\Omega_1}}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\right)^{1/2}+\left(\int_{|x|>T}\mathrm{d}x\,|f(x)|^2\right)^{1/2}+\varepsilon\|f\|\right]\tag{3.5.4}$$

注意:

1. 如果 f 满足式(3.5.1)和式(3.5.2),那么在式(3.5.3)的右端的前两项有界 $2\delta\sqrt{\frac{B}{A}}\|f\|$;选择 $\varepsilon=\delta$,则可推出 $\left\|f-\sum_{m,n\in B_\varepsilon}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\widetilde{\psi_{m,n}}\right\|=O(\delta)$;

2. 当 $\varepsilon\to0$, $\#B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1,T)\to\infty$(见下面的证明):只有用无穷多个 $\langle f,\psi_{m,n}\rangle$ 才能达到无限精确。

图 3.7 给出了集合 $B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1,T)$ 对于一个特殊值 ε 的图形,以下证明过程中将指出它何以会出现这个形态。

证明:

1. 定义集合 $B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1,T)=\{(m,n)\in\mathbf{Z}^2;m_0\leqslant m\leqslant m_1;|nb_0|\leqslant a_0^{-m}T+t\}$ 时,其中 m_0,m_1 和 t 在下面给出,在该集合中对应于 (m,n) 的点 $(a_0^m nb_0,\pm a_0^{-m}\xi_0)$ 填出了图 3.7 中那样的形态。

2. $$\left\|f-\sum_{(m,n)\in B_\varepsilon}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\widetilde{\psi_{m,n}}\right\|$$

$$=\sup_{\|h\|=1}\left|\langle f,h\rangle-\sum_{(m,n)\in B_\varepsilon}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\langle\widetilde{\psi_{m,n}},h\rangle\right|$$

$$=\sup_{\|h\|=1}\left|\sum_{(m,n)\notin B_\varepsilon}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\langle\widetilde{\psi_{m,n}},h\rangle\right|$$

$$\leqslant\sup_{\|h\|=1}\sum_{\substack{m<m_0\\ \text{或}m>m_1}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left[\left|\langle P_{\Omega_0,\Omega_1}f,\psi_{m,n}\rangle\right|+\left|\langle(I-P_{\Omega_0,\Omega_1})f,\psi_{m,n}\rangle\right|\right]\left|\langle\psi_{m,n},h\rangle\right|$$

$$+\sup_{\|h\|=1}\sum_{m_0\leqslant m\leqslant m_1}\sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t}\left[\left|\langle Q_Tf,\psi_{m,n}\rangle\right|\right.$$

$$\left.+\left|\langle(I-Q_T)f,\psi_{m,n}\rangle\right|\right]\left|\langle\widetilde{\psi_{m,n}},h\rangle\right|\tag{3.5.5}$$

其中在 $|x|\leqslant T$ 时,$(Q_Tf)(x)=f(x)$;否则,$(Q_Tf)(x)=0$。又在 $\Omega_0\leqslant|\xi|\leqslant\Omega_1$ 时,$(P_{\Omega_0,\Omega_1}f)^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi)$;否则,$(P_{\Omega_0,\Omega_1}f)^\wedge(\xi)=0$;由于 $\widetilde{\psi}_{m,n}$ 构成一个框架,其框架界为 B^{-1}、A^{-1} 的框架,有

$$\sum_{\substack{m<m_0\\ 或 m>m_1}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left|\langle(l-P_{\Omega_0,\Omega_1})f,\psi_{m,n}\rangle\right|\left|\langle\tilde{\psi}_{m,n},h\rangle\right|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{m,n}\left|\langle(l-P_{\Omega_0,\Omega_1})f,\psi_{m,n}\rangle\right|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{m,n}\left|\langle\tilde{\psi}_{m,n},h\rangle\right|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant B^{1/2}\left\|(l-P_{\Omega_0,\Omega_1})f\right\|A^{-1/2}\|h\|$$

$$=\sqrt{\frac{B}{A}}\Big[\int_{\substack{|\xi|<\Omega_0\\ 或 |\xi|>\Omega_1}}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\Big]^{1/2}(因为\ \|h\|=1)$$

类似地有

$$\sup_{\|h\|=1}\sum_{m_0\leqslant m\leqslant m_1}\sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t}\left|\langle(l-Q_T)f,\psi_{m,n}\rangle\right|\left|\langle\tilde{\psi}_{m,n},h\rangle\right|$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{B}{A}}\Big[\int_{|x|>T}\mathrm{d}x\,|f(x)|^2\Big]^{1/2}$$

余下部分只需要检验式(3.5.5)中其他两项也以$\sqrt{\frac{B}{A}}\varepsilon\|f\|$为界就可以了。

3．利用相同的 Cauchy-Schwarz 策略，可以将式(3.5.5)中剩下的两项归结为

$$A^{-1/2}\Big\{\Big[\sum_{\substack{m<m_0\\ 或 m>m_1}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left|\langle P_{\Omega_0,\Omega_1}f,\psi_{m,n}\rangle\right|^2\Big]^{1/2}$$
$$+\Big[\sum_{m_0\leqslant m\leqslant m_1}\sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t}\left|\langle Q_Tf,\psi_{m,n}\rangle\right|^2\Big]^{1/2}\Big\}\tag{3.5.6}$$

由此可见适当 m_0,m_1,t 两个方括号中的每一个都比$B\varepsilon^2\|f\|^2/4$更小。

4．用命题 3.3.2 的证明中的同样方法来解决式(3.5.6)之第一项。

$$\sum_{\substack{m<m_0\\ 或 m>m_1}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left|\langle P_{\Omega_0,\Omega_1}f,\psi_{m,n}\rangle\right|^2$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\sum_{\substack{m<m_0\\ 或 m>m_1}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\int_{\substack{\Omega_0\leqslant|\xi|\leqslant\Omega_1\\ \Omega_0\leqslant|\xi-2\pi la_0^{-m}b_0^{-1}|\leqslant\Omega_1}}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|$$
$$\cdot\left|\hat{f}\Big(\xi-\frac{2\pi}{b_0}la_0^{-m}\Big)\right|\left|\hat{\psi}(a_0^m\xi)\right|\left|\hat{\psi}\Big(a_0^m\xi-\frac{2\pi}{b_0}l\Big)\right|$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{b_0}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\Big[\int_{\substack{\Omega_0\leqslant|\xi|\leqslant\Omega_1\\ \Omega_0\leqslant|\xi-2\pi la_0^{-m}b_0^{-1}|\leqslant\Omega_1}}\mathrm{d}\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2$$

$$\cdot \sum_{\substack{m<m_0\\ \text{或}m>m_1}} |\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^{2-\lambda}\left|\hat{\psi}\left(a_0^m\xi-\frac{2\pi}{b_0}l\right)\right|^{\lambda}\Bigg]^{1/2}$$

$$\cdot\Bigg[\int_{\substack{\Omega_0\leqslant|\zeta|\leqslant\Omega_1\\ \Omega_0\leqslant|\zeta+2\pi la_0^{-m}b_0^{-1}|\leqslant\Omega_1}} \mathrm{d}\zeta|\hat{f}(\zeta)|^2$$

$$\cdot \sum_{\substack{m<m_0\\ \text{或}m>m_1}} \left|\hat{\psi}\left(a_0^m\zeta+\frac{2\pi}{b_0}l\right)\right|^{\lambda}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^{2-\lambda}\Bigg]^{1/2} \tag{3.5.7}$$

其中 $0<\lambda<1$ 取定值。由于 $[1+(u-s)^2]^{-1}(1+s^2)[1+(u+s)^2]^{-1}$ 对 u 及 s 一致有界，故有

$$\left|\hat{\psi}(a_0^m\xi)\|\hat{\psi}\left(a_0^m\xi-\frac{2\pi}{b_0}l\right)\right|$$

$$\leqslant C[1+(a_0^m\xi)^2]^{-\Upsilon/2}\left[1+\left(a_0^m\xi-\frac{2\pi}{b_0}l\right)^2\right]^{-\Upsilon/2}$$

$$\leqslant C_1(1+l^2)^{-\Upsilon/2}$$

代此结果到式(3.5.7)中可得

$$(3.5.7)\leqslant\frac{2\pi}{b_0}C_2\|P_{\Omega_0,\Omega_1}f\|^2$$

$$\cdot\sum_{l\in\mathbf{Z}}(1+l^2)^{-\Upsilon\lambda/2}$$

$$\sup_{\Omega_0\leqslant|\xi|\leqslant\Omega_1}\sum_{\substack{m<m_0\\ \text{或}m>m_1}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^{2(1-\lambda)} \tag{3.5.8}$$

上述对 l 的和式当 $\Upsilon\lambda>1$ 亦即 $\lambda>1/\Upsilon$ 时收敛；故可以选择例如 $\lambda=\frac{1}{2}(1+\Upsilon^{-1})$。另一方面，对 $\Omega_0\leqslant|\xi|\leqslant\Omega_1$ 有

$$\sum_{m>m_1}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^{2(1-\lambda)}\leqslant C_3\sum_{m>m_1}(1+a_0^{2m}\Omega_0^2)^{-\Upsilon(1-\lambda)}$$

$$\leqslant C_4\Omega_0^{2\Upsilon(1-\lambda)}a_0^{-2m_1\Upsilon(1-\lambda)} \tag{3.5.9}$$

和

$$\sum_{m<m_0}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^{2(1-\lambda)}\leqslant C_5\sum_{m<m_0}(a_0^m\Omega_1)^{2\beta(1-\lambda)}$$

$$\leqslant C_6\Omega_0^{2\beta(1-\lambda)}a_0^{2m_0\beta(1-\lambda)} \tag{3.5.10}$$

在以上的所有估计式中，常数 C_j 依赖于 a_0,b_0,λ,β 和 Υ 面与 Ω_0,Ω_1,m_0 和 m_1 无关。将它们代入式(3.5.8)选择 $\Upsilon=\frac{1}{2}(1+\Upsilon^{-1})$，得出

$$式 (3.5.8) \leqslant C_7 \| f \|^2 [(\Omega_0 a_0^{m_1})^{-(\Upsilon-1)} + (a_0^{m_0}\Omega_1)^{\beta(\Upsilon-1)/\Upsilon}]$$

如果

$$m_1 \geqslant (\ln a_0)^{-1}[(\Upsilon - 1)^{-1}\ln(4C_7/B_\varepsilon^2) - \ln\Omega_0]$$
$$m_0 \leqslant (\ln a_0)^{-1}[\Upsilon\beta^{-1}(\Upsilon - 1)^{-1}\ln(B_\varepsilon^2/4C_7) - \ln\Omega_1]$$

解得

$$\sum_{\substack{m<m_0 \\ 或 m>m_1}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\langle P_{\Omega_0,\Omega_1} f, \psi_{m,n}\rangle|^2 \leqslant B\frac{\varepsilon^2}{4}\| f \|^2$$

即为所求。

5. 在式(3.5.6)中的第二项是比较容易处理的,有

$$\sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t} |\langle Q_T f, \psi_{m,n}\rangle|^2$$
$$\leqslant \sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t} \|f\|^2 \|Q_T\psi_{m,n}\|^2$$
$$\leqslant \| f \|^2 \int_{|x|\leqslant T} \mathrm{d}x a_0^{-m} \sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t} |\psi(a_0^m x - nb_0)|^2$$

将对 n 的求和分成两部分:$n > b_0^{-1}(a_0^{-m}T+t)$和 $n < -b_0^{-1}(a_0^{-m}T+t)$。设 n_1 是大于 $b_0^{-1}(a_0^{-m}T+t)$中的最小整数,则

$$a_0^{-m}\int_{|x|\leqslant T}\mathrm{d}x \sum_{nb_0>a_0^{-m}T+t} |\psi(a_0^{-m}x - nb_0)|^2$$
$$\leqslant a_0^{-m}\int_{|x|\leqslant T}\mathrm{d}x \sum_{n=n_1}^{\infty} C_8\{1 + [t + (n - n_1)b_0 + a_0^{-m}(T - x)]^2\}^{-\alpha}$$

$$(因为 |a_0^{-m}x - nb_0| = nb_0 - a_0^{-m}x \geqslant (n - n_1)b_0 + t + a_0^{-m}(T - x))$$

$$\leqslant C_9 \sum_{l=0}^{\infty} [1 + (t + lb_0)^2]^{-\alpha} \leqslant C_{10} t^{-2\alpha}$$

对 $n < -b_0^{-1}(a_0^{-m}T+t)$的和式可类似处理。随即有

$$\sum_{m_0\leqslant m\leqslant m_1} \sum_{|nb_0|>a_0^{-m}T+t} |\langle Q_T f, \psi_{m,n}\rangle|^2 \leqslant 2(m_1 - m_0 + 1)C_{10}t^{-2\alpha}\| f \|^2$$

当选择

$$t \geqslant [8(m_1 - m_0 + 1)C_{10}B^{-1}\varepsilon^{-2}]^{1/2\alpha}$$

时,上式可小于 $B\varepsilon^2\|f\|^2/4$。这就完成了证明。 ■

从以上证明中得出的 m_0,m_1,t 的估计值都非常粗糙;实际中,如果 $\psi,\hat{\psi}$ 有比定理中更快的衰减速度,则可以获得更准确的值(见 Daubechies(1990)P966)。

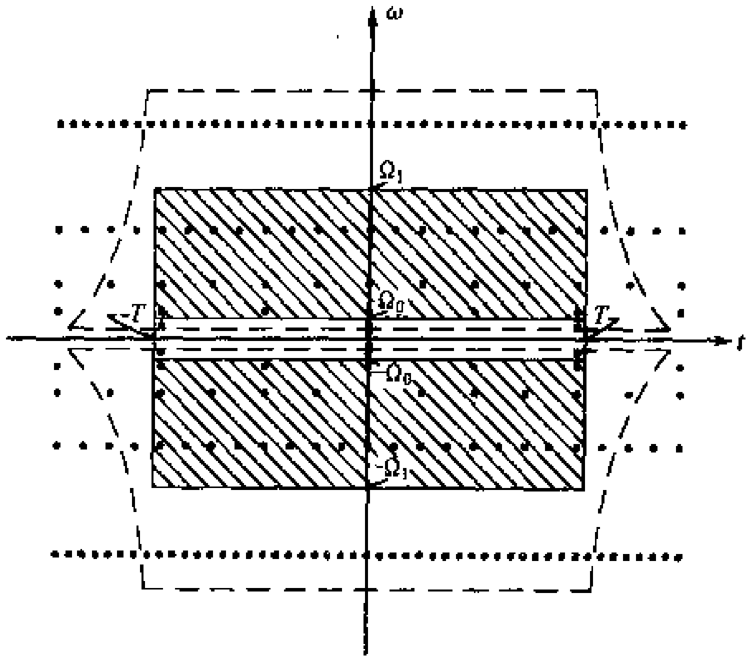


图 3.7 当 f 在时间上局限于 $[-T,T]$ 上和在频率上局限于 $[-\Omega_1,-\Omega_0]\cup[\Omega_0,\Omega_0]$ 上时,近似重建构造 f 的"小波点阵"的集合 $B_\varepsilon(\Omega_1,\Omega_1,T)$

为了以后参考,我们估计作为 $\Omega_0,\Omega_1;T$ 和 ε 的函数的 $\# B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1;T)$

$$\begin{aligned}\# B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1;T) &\approx \sum_{m=m_0}^{m_1} 2b_0^{-1}(a_0^{-m}T+t)\\ &= 2b_0^{-1}T\frac{a_0^{-m+1}-a_0^{-m1}}{a_0-1}+2b_0^{-1}(m_1-m_0+1)t\\ &\approx 2TC_{11}b_0^{-1}(a_0-1)^{-1}\varepsilon^{2/(T-1)}(\Omega_1-\Omega_0)\\ &\quad + 2\varepsilon^{-1/a}b_0^{-1}(\ln a_0)^{-(2\alpha+1)/2\alpha}C_{12}[C_{13}+\ln\Omega_1-\ln\Omega_0]^{(2\alpha+1)/2\alpha}\end{aligned}$$

另一方面,时—频区域 $[-T,T]\times([-\Omega_1,-\Omega_0]\cup[\Omega_0,\Omega_1])$ 的面积是 $4T(\Omega_i-\Omega_0)$,当 $\Omega_0\to 0T,\Omega_1\to\infty$ 时,有

$$\lim\frac{\# B_\varepsilon(\Omega_0,\Omega_1;T)}{4T(\Omega_1-\Omega_0)}=\frac{1}{2}C_{11}b_0^{-1}(a_0-1)^{-1}\varepsilon^{2/T-1} \qquad (3.5.11)$$

它并非与 ε 无关,在第 4 章中将再回到它。

定理 3.5.1 告诉我们如果 ψ 在时间上和频率上有适当的衰减性,由 ψ 生成的框架的确显示出时间与频率局部化的特征,至少对于时—频集 $[-T,T]\times([-\Omega_1,-\Omega_0]\cup[\Omega_0\Omega_1])$ 是如此。在实际工作中,人们对许多别的时—频集更有

兴趣。例如,鸟叫的信号,直观地对应于在时一频平面上的一个对角区域(可能是曲线的),只有时一频中心($a_0^m nb_0, \pm a_0^{-m}\xi_0$)在此区域内或靠近此区域的 $\psi_{m,n}$才有可能重建该信号。实际中确是如此(如鸟叫的信号或别的信号)。但这一点难于用公式来表达,因为要作到这一点首先需要在规定的时一频集上就“局部化”的意见达成一致。假定这一集合不像定理 3.5.1 中那样是个矩形的并集时,选用 2.8 节中定义的算子 L_S 来作(即当 $\|(l-L_S)f\| << \|f\|$, f 大部分局限于 S 中),那么,只要在 L_S 定义中的小波与框架中的小波都有良好的衰减性质时,这个定理就几乎是平凡的。对另外一些时一频局部化程序(如用 Wigner 分布或用 J. Bertrand 和 P. Bertrand(1989)的仿射 Wigner 分布),仍期望有类似于定理 3.5.1 的结果,但证明都要依赖于那些被选用的局部化程序。

对于窗口傅里叶情形有完全类似的局部化定理。

定理 3.5.2 设 $g_{m,n}(x)=e^{im\omega_0 x}g(x-nt_0)$组成一个框架界为 A、B 的框架,又

$$|g(x)|\leqslant C(1+x^2)^{-\alpha/2},\ |\hat{g}(\xi)|\leqslant C(1+\xi^2)^{-\alpha/2}$$

其中 $\alpha>1$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $t_\varepsilon,\omega_\varepsilon>0$,使对所有 $f\in L^2(\mathbb{R})$及 $T,\Omega>0$,有

$$\Big\|f-\sum_{\substack{|m\omega_0|\leqslant\Omega+\omega_\varepsilon\\ |nt_0|\leqslant T+t_\varepsilon}}\langle f,g_{m,n}\rangle g_{m,n}\Big\|$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{B}{A}}\left[\left(\int_{|x|>T}dx\,|f(x)|^2\right)^{1/2}+\left(\int_{|\xi|>\Omega}d\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2\right)^{1/2}+\varepsilon\|f\|\right]$$

证明:

1. 用定理 3.5.1 的证明中第 2、3 段相同的策略,有

$$\Big\|f-\sum_{\substack{|m\omega_0|\leqslant\Omega+\omega_\varepsilon\\ |nt_0|\leqslant T+t_\varepsilon}}\langle f,g_{m,n}\rangle\tilde{g}_{m,n}\Big\|\leqslant\sqrt{\frac{B}{A}}[\|(1-Q_T)f\|+\|(1-P_\Omega)f\|]$$
$$+A^{-1/2}\Big\{\Big[\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{|m\omega_0|>\Omega+\omega_\varepsilon}|\langle R_\Omega f,g_{m,n}\rangle|^2\Big]^{1/2}$$
$$+\Big[\sum_{n\in\mathbf{Z}}\sum_{|nt_0|>T+t_\varepsilon}|\langle Q_T f,g_{m,n}\rangle|^2\Big]^{1/2}\Big\}\tag{3.5.12}$$

其中,当时 $|x|\leqslant T$ 时,,$(Q_Tf)(x)=f(x)$,否则为零。又对 $|\xi|\leqslant\Omega$ 的一切 ξ,有 $(P_\Omega f)^\wedge(\xi)=\hat{f}(\xi)$,否则为零。只要能证明式(3.5.12)中后两项均以 $B^{1/2}\varepsilon\|f\|$ 为上界,则定理就被证明了,且首先集中于最后一项。

2. $\displaystyle\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}|\langle Q_Tf,g_{m,n}\rangle|^2$

$$\leqslant\frac{2\pi}{\omega_0}\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\int_{\substack{|x|\leqslant T\\ |x-\frac{2\pi}{\omega_0}l|\leqslant T}}dx\left|f(x)\right|\left|f\left(x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right)\right|\left|g(x-nt_0)\right|\left|g(x-\frac{2\pi}{\omega_0}l-nt_0)\right|$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{\omega_0}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\Big[\int\limits_{\substack{|x|\leqslant T\\ \left|x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}} \mathrm{d}x\,|f(x)|^2 \sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}|g(x-nt_0)|\left|g\left(x-\frac{2\pi}{\omega_0}l-nt_0\right)\right|\Big]^{1/2}$$

$$\cdot\Big[\int\limits_{\substack{|y|\leqslant T\\ \left|y-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}} \mathrm{d}y\,|f(y)|^2 \sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\left|g\left(y+\frac{2\pi}{\omega_0}l-nt_0\right)\right||g(y-nt_0)|\Big]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{\omega_0}\|Q_T f\|^2\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\sup_{\substack{|x|\leqslant T\\ \left|x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}}|g(x-nt_0)|\left|g\left(x-\frac{2\pi}{\omega_0}l-nt_0\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{2\pi}{\omega_0}\|f\|^2C^2\sum_{l\in\mathbf{Z}}\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\sup_{\substack{|x|\leqslant T\\ \left|x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}}\left[1+(x-nt_0)^2\right]^{-\alpha/2}$$

$$\cdot\left[1+\left(x-\frac{2\pi}{\omega_0}l-nt_0\right)^2\right]^{-\alpha/2} \tag{3.5.13}$$

容易验证上述和式中 $n>t_0^{-1}(T+t_\varepsilon)$的贡献恰好等于 $n<-t_0^{-1}(T+t_\varepsilon)$项的贡献;因此可以在加以一个因子 2 的代价下限制于对负 n 的讨论。当 l 为正时,我们再定义 $y=x-\frac{2\pi}{\omega_0}l$,这样也可以仅限于负 l 的讨论。于是有

$$\text{式(3.5.13)}\leqslant \frac{2\pi}{\omega_0}C^2\|f\|^2\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\sum_{l\geqslant 0}$$

$$\cdot\sup_{\substack{|x|\leqslant T\\ \left|x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}}\left[1+(x+nt_0)^2\right]^{-\alpha/2}\left[1+\left(x+\frac{2\pi}{\omega_0}l+nt_0\right)^2\right]^{-\alpha/2}$$

$$\leqslant \frac{4\pi}{\omega_0}C^2\|f\|^2\sum_{|nt_0|\geqslant T+t_\varepsilon}\sum_{l\geqslant 0}$$

$$\cdot\sup_{\substack{|x|\leqslant T\\ \left|x-\frac{2\pi}{\omega_0}l\right|\leqslant T}}\left[1+(nt_0-T)^2\right]^{-\alpha/2}\left[1+\left(nt_0-T+\frac{2\pi l}{\omega_0}\right)^2\right]^{-\alpha/2} \tag{3.5.14}$$

然而,对任意 $\mu,v>0$,有

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[1+(\mu+vl)^2\right]^{-\alpha/2}$$

$$\leqslant(1+\mu^2)^{-\alpha/2}+\int_0^\infty \mathrm{d}x\left[1+(\mu+vx)^2\right]^{-\alpha/2}$$

$$\leqslant(1+\mu^2)^{-\alpha/2}+2^{\alpha/2}\frac{1}{v}\int_0^\infty \mathrm{d}y\left[\sqrt{1+\mu^2}+y\right]^{-\alpha}\left(\text{用 } a^2+b_2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2\right)$$

$$\leqslant(1+\mu^2)^{-\alpha/2}+2^{\alpha/2}v^{-1}(\alpha-1)^{-1}(1+\mu^2)^{-\frac{\alpha-1}{2}}$$

由此

$$\text{式}(3.5.14) \leqslant \frac{4\pi}{\omega_0} C_1 \| f \|^2 \sum_{mt_0 \geqslant T+t_\epsilon} [1 + (nt_0 - T)^2]^{-\alpha+1/2}$$

设 n_1 是大于 $T+t_\epsilon$ 的最小整数,则由上面的计算可得

$$\begin{aligned} &\sum_{mt_0 \geqslant T+t_\epsilon} [1 + (nt_0 - T)^2]^{-\alpha+1/2} \\ \leqslant &\sum_{n=n_1}^{\infty} [1 + ((n - n_1)t_0 + t_\epsilon)^2]^{\alpha+1/2} \\ \leqslant &C_2(1 + t_\epsilon^2)^{-\alpha+1} \end{aligned}$$

总起来说,有

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} \sum_{|nt_0| \geqslant T+t_\epsilon} |\langle Q_T f, g_{m,n} \rangle|^2 \leqslant C_3(1 + t_\epsilon^2)^{-\alpha+1} \| f \|^2 \qquad (3.5.15)$$

其中 C_3 依赖于 ω_0, t_0, α,但 C 不依赖于 T 或 Ω。

3. 类似地可证明

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \sum_{|m\omega_0| \geqslant \Omega+\omega_\epsilon} |\langle P_\Omega f, g_{m,n} \rangle|^2 \leqslant C_4(1 + \omega_\epsilon^2)^{-\alpha+1} \| f \|^2 \qquad (3.5.16)$$

而由于 $\alpha > 1$,所以只要适当选择 $t_\epsilon, \omega_\epsilon$(与 T 或 Ω 无关!),总可使式(3.5.15)及式(3.5.16)小于 $B\epsilon^2 \| f \|^2/4$,这就完成了证明。 ■

图 3.8 给出了一个与时-频矩形$[-T,T]\times[-\Omega,\Omega]$相对照的满足$|m\omega_0| \leqslant \Omega+\omega_\epsilon$, $|nt_0| \leqslant T+t_\epsilon$ 的点阵(m,n)的示意图。其"ϵ—箱"有不同于图 3.7 的形状。

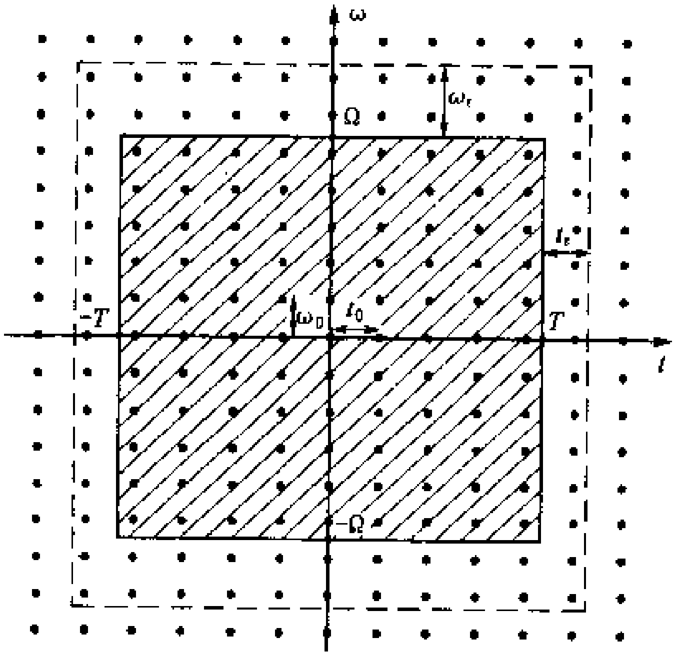


图 3.8 在时域限制在$[-T,T]$,频域限制在$[-\Omega,\Omega]$的函数经由傅里叶变换而近似重建时,格点的集合 B_ϵ

让我们再对扩展箱 $B_\varepsilon=\{(m,n);|m\omega_0|\leqslant\Omega+\omega_\varepsilon,|nt_0|\leqslant T+t_\varepsilon\}$中的点数与时－频矩形$[-T,T]\times[-\Omega,\Omega]$的面积作一比较，并求出当 T,Ω 增大时这一个比值的极限

$$\frac{\# B_\varepsilon(T,\Omega)}{4T\Omega}\approx\frac{2\omega_0^{-1}(\Omega+\omega_\varepsilon)\cdot 2t_0^{-1}(T+t_\varepsilon)}{4T\Omega}\to(\omega_0 t_0)^{-1}\quad(3.5.17)$$

与小波不同的是，这一极限与 ε 无关。第 4 章将回过头来解释它的意义。

3.6 框架中的冗余：能得到些什么？

正如不同框架界表所显示的，框架（小波或窗口傅里叶函数的）可以是相当冗余的（当框架很接近于紧框架时且框架向量又已规范化到可用$(A+B)/2$来度量）。在某些应用中（例如 Marseille 组的工作中——见 Grossmann，Kronland—Martinet，Torresani 的论文），因为人们需要去表示近似连续变换，这种冗余还应该是追求的。J.Morlet（私人通信，1986）很早就注意到冗余可导致鲁棒（robustness）性，意思是说冗余可以使得在低精度下（如在两个字节上）获得的小波系数$\langle f,\psi_{m,n}\rangle$却可以在相对高的精度下重建 f。我们可以按如下方式来理解这种现象。设$(\varphi_j)_{j\in J}$为某种框架（不必为小波的或窗口傅里叶函数的）。假若这一框架是正交基，则

$$F:\mathscr{H}\to l^2(J),(Ff)_j=\langle f,\varphi_j\rangle$$

是一个单式映射（unitary map），而且$\mathscr{H}$在 F 下的像是整个 $l^2(J)$。但如果该框架是冗余的，即 φ_j 是不独立的，那么 $F\mathscr{H}$的元素将是一些其构成成分满足某些关系的序列，且 $F\mathscr{H}=\mathrm{Ran}(F)$仅为 $l^2(J)$的一个真子空间。框架愈冗余，Ran(F)就愈“小”。如 3.2 节所示，重建公式

$$f=\sum_{j\in J}\langle f,\varphi_j\rangle\widetilde{\varphi}_j$$

含有在 Ran(F)上的投影，可以将它重写为

$$f=\widetilde{F}^* Ff$$

当 $c\perp\mathrm{Ran}(F)$时，$\widetilde{F}^*c=0$。如果在对每个系数$\langle f,\varphi_j\rangle$上掺入一个参数 α_j（例如舍入误差），则重建函数的总误差将会是

$$f_{\text{approx}}=\widetilde{F}^*(Ff+\alpha)$$

由于 $\widetilde{F}^*$ 含有在 Ran(F)上的投影，序列 α 中正交于 Ran(F)的分量将不起作用，而

且我们也希望 $\|f-f_{近似}\|$ 小于 $\|\alpha\|$。这种效果在 Ran(F)"愈小",即框架愈冗余时,更为显著。

现用 3.2 节的二维例子作一解释,并与正交基进行比较。令 $u_1=(1,0)$, $u_2=(0,1)$, $e_1=u_2$, $e_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2$, $e_3=\frac{\sqrt{3}}{2}u_1-\frac{1}{2}u_2$; $\{u_1,u_2\}$ 组成 $\mathbb{C}^2$ 的一组正交基,$\{e_1,e_2,e_3\}$ 组成一个框架界为 $\frac{3}{2}$ 的紧框架,如果在系数 $\langle f,u_j\rangle$ 上加上 $\alpha_j\varepsilon$,其中 α_j 是均值为 0、方差为 1 的独立随机变量,则重建时误差的期望值为

$$\mathbb{E}\left(\left\|f-\sum_{j=1}^{2}(\langle f,u_j\rangle+\alpha_j\varepsilon)u_j\right\|^2\right)$$

$$=\varepsilon^2\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{2}\alpha_j u_j\right\|^2\right)=\varepsilon^2\mathbb{E}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)=2\varepsilon^2$$

如果在框架系数 $\langle f,e_j\rangle$ 上也加上 $\alpha_j\varepsilon$,则

$$\mathbb{E}\left(\left\|f-\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{3}(\langle f,e_j\rangle+\alpha_j\varepsilon)e_j\right\|^2\right)=\frac{4}{9}\varepsilon^2\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{3}\alpha_j e_j\right\|^2\right)$$

$$=\frac{4}{9}\varepsilon^2\mathbb{E}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-\alpha_1\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_3)=\frac{4}{3}\varepsilon^2$$

这说明它(关于逼近的)有了超过正交基 $\frac{2}{3}$ 的增大因子!

类似的讨论可以用在小波或窗口傅里叶框架中。为了限于对有限多个 $\psi_{m,n}$ 或 $g_{m,n}$ 的讨论,可以限定 f 在 $[-T,T]\times([-\Omega_1,-\Omega_0]\cup[\Omega_0,\Omega_1])$ 上(小波情形)或在 $[-T,T]\times[-\Omega,\Omega]$ 上(窗口傅里叶情形)具有"本性局部化",这样就可以找到一个有限的扩展箱 B_ε(见 3.5 节),在其上有

$$\left\|f-\sum_{m,n\in B_\varepsilon}\langle f,\psi_{m,n}\rangle\widetilde{\psi}_{m,n}\right\|\leqslant\varepsilon\|f\|$$

(窗口傅里叶情形有类似的结果)。假定该框架是几乎紧凑的,$\widetilde{\psi_{m,n}}\approx A^{-1}\psi_{m,n}$。将 $\alpha_{m,n}\delta$ 加到每一个 $\langle f,\psi_{m,n}\rangle$ 上并约定 $\mathbb{E}(\alpha_{m,n},\alpha_{m',n'})=\delta_{m,m'}\delta_{n',n}$, $\mathbb{E}(\alpha_{m,n})=0$,于是有

$$\mathbb{E}\left(\left\|f-A^{-1}\sum_{m,n\in B_\varepsilon}(\langle f,\psi_{m,n}\rangle+\alpha_{m,n}\delta)\psi_{m,n}\right\|^2\right)$$

$$\leqslant\varepsilon^2\|f\|^2+\delta^2(\#B_\varepsilon)A^{-2} \tag{3.6.1}$$

其中已用到了 $\|\psi_{m,n}\|=1$ 的假设条件。现在用将 b_0 缩小一半的方法使冗余度增加一倍,则由此得到的新框架也是几乎紧的(见式(3.3.11),式(3.3.12)),其框架界 A' 为原来的两倍;新的"ε 箱"B'_ε 也将含有原来的两倍多的元素。这样

$$(\#B'_\varepsilon)A'^{-2}=\frac{1}{2}(\#B_\varepsilon)A^{-2}$$

即冗余度加倍带出了小波系数误差减半的效果。对窗口傅里叶变换也可同样进行讨论。

上面的讨论是相当有启发性的。它暗示了这些结果还可以在相当程度上给予加强：Morlet 观察到的增大因子事实上其价值远超过了以上讨论中所得到的结论。近来 Munch(1992)还提出紧窗口傅里叶框架当 $\lambda=(2\pi)^{-1}(\omega_0 t_0)=N^{-1}, N\in N$, $N>1$ 时对于正交情形的增大因子是 N^{-2}面不是 N^{-1}。他的证明中以 λ^{-1}为整数作为基本条件，但是很难相信同样的现象不会出现在 λ^{-1}为非整数的情形中；同样对小波框架它也可能是成立的！我们将以上的设想作为对读者的挑战……

3.7 一些结论性的注记

在这一章中我们已较深入地研究了从序列$(\langle f,\psi_{m,n}\rangle)_{m,n\in\mathbf{Z}}$(及其变化——见 3.3.4 节)重建 f 的问题，其中 $\psi_{m,n}(x)=a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x-nb_0)$。已经看到，要想数值稳定地重建出 f，仅仅在 $\psi_{m,n}(x)$构成框架才有可能，并已给出了 $\psi_{m,n}$ 为框架时的重建公式。而且(倘使 $\psi_{m,n}$保持为一个框架的条件不变)，人们还可以获得其他的重建公式。作为本章的结束，我们略述 S. Mallat 的处理，它更多地着重于解决平移的变异问题。

本章中已经描述过，离散小波变换有高度的平移变异性。这意味着，两个彼此具有平移关系的函数可以有相当不同的小波系数。这点在图 1.4 的“双曲格点阵”[①] 中已表现出来，其中轴 $t=0$ 起了基本作用。在实际上，人们不可能使用无穷多个尺度，常常是切除掉很低和很高的频率：仅用满足 $m_1\leqslant m\leqslant m_0$ 的 m。这样得到的截断后的格点具有在平移 $b_0 2^{m_0}$下的变异性(为了简单，此地选 $a_0=2$)，而且对 f 的(不同的)时间采样步长(实用中 f 通常是用采样形式给出的)它还可能是很大的。设 f_1 是 f 经平移$\neq nb_0 2^{m_0}$而得到的，则 f_1 有不同于 f 的小波系数。例如当平移量为 $\bar{n}b_0 2^{\bar{m}}$，其中 $m_1\leqslant\bar{m}\leqslant m_0$，若 $\bar{m}\geqslant m$，则$\langle f,\psi_{m,n}\rangle=\langle f,\psi_{m,n-2^{\bar{m}-m}\bar{n}}\rangle$；若 $m>\bar{m}$，没有这一公式。这一现象对某些应用(尤其是那些需要“再识别”f 的应用)可能是一个真正的问题。S. Mallat 在一次近似的意义下提出了如下解决办法：

- 计算所有的$\int \mathrm{d}x f(x)\psi(2^{-m}x-n2^{-m}b_0)=\alpha_{m,n}(f)$(例如 3.3.5 节中所示的特殊的 ψ，在 f 具有 N 次采样形式时，它可以经过 $CN\lg N$ 次运算完成)。
- 对每一层 m，仅保留是局部极大(作为 n 的函数)的 $\alpha_{m,n}(f)$。这大约相当

① 见本章末注 17。

于高冗余度下 $\alpha_{m,n}(f)$ 的子抽样。事实上，子抽样所包含的数目正比例于原来数目的 2^{-m} 倍；它约等于不太大的冗余度框架所具有的数目。但子抽样仅与 f 相适应，而不是先验地附加一个“双曲格点阵”。

把上述对分解的规律集中起来，Mallat 提出了一种重建算法，它在应用中已获得相当大的成功（见 Mallat(1991)）①。1992 年 Mallat 与 Zhong 将程序推广到二维，并用于讨论图像。理解 Mallat 算法的方式之一是将 $2^{-m}\psi(2^{-m}x-n2^{-m}b_0)$ 看成为基本框架（注意在每层 m 上按规范化计算，大多数的框架向量都发生了变化）。其次，为了得到稳定的重建算法，向量族还必须满足框架条件式(3.1.4)；一旦该条件被满足就可以提出多种重建算法。可以肯定地说，Mallat 的极值算法比标准的框架逆算法是更为精彩的。

注：

1. 如果任意的 f 能够写成这样的叠加形式，则 $\psi_{m,n}$ 也被称为“原子”，其对应的展开式被称为“原子分解”。原子分解对除 $L^2(\mathbb{R})$ 以外的许多空间都已被研究过并早已应用于调和分析之中。对整函数空间的原子分解请见 Coifman 和 Rochberg(1980)。

2. 除了对非常特殊的 ψ 外，这一结果都成立。如果 $\psi_{m,n}$ 组成一个正交基（见第 4 章及以后几章），则关于该正交基的展开式提供了一个离散型的“恒等分解式”。

3. 用极化恒等式可以从 $\|f\pm g\|$，$\|f\pm ig\|$，而得到 $\langle f,g\rangle$

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\{\|f+g\|^2-\|f-g\|^2+i\|f+ig\|^2-i\|f-ig\|^2\}$$

4. 设 $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 J 的有限子集构成的一个增长序列，即当 $n\leqslant m$ 时 $J_n\subset J_m$，且当 n 趋向 ∞ 时，$(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 趋向于 J，即 $U_{n\in\mathbb{N}}J_{\mathbb{N}}=J$。则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\left\|F^*c-\sum_{j\in J_n}c_j\psi_j\right\|\to 0$$

分两个步骤加以证明：

- 若 $n_2\geqslant n\geqslant n_0$，则

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{j\in J_{n2}}c_j\psi_j-\sum_{j\in J_{n1}}c_j\psi_j\right\|\\&=\sup_{\|f\|=1}\left|\left\langle\sum_{j\in J_{n2}\setminus J_{n1}}c_j\psi_j,f\right\rangle\right|^{1/2}\\&\leqslant\sup_{\|f\|=1}\left(\sum_{j\in J_{n2}\setminus J_{n1}}|c_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\in J}|\langle\psi_j,f\rangle|^2\right)^{1/2}\\&\leqslant B^{1/2}\left(\sum_{j\in J\setminus J_{n0}}|c_j|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

它在 $n_0\to\infty$ 时趋向于 0。因此 $\eta_n=\sum_{j\in J_n}c_j\psi_j$ 组成一个 Cauchy 序列，其极限 η 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中。

---

① 见本章末注 18。

- 对这个 η 与任一个 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 有

$$\langle \eta, f\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \eta_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in J_n} c_j\langle \psi_j, f\rangle$$
$$= \sum_{j\in J} c_j\langle \psi_j, f\rangle = \langle c, Ff\rangle$$

因此, $\eta = F^* c$。

5. 此结论证明如下:

- $\langle R(f+g), f+g\rangle - \langle R(f-g), f-g\rangle$
  $= 2\langle Rf, g\rangle + \langle Rg, f\rangle = 4\mathrm{Re}\langle Rf, g\rangle$ （因为 $R^* = R$）
- $\mathrm{Re}\langle Rf, g\rangle \leqslant \frac{1}{4}\frac{B-A}{B+A}[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2] = \frac{1}{2}\frac{B-A}{B+A}[\|f\|^2 + \|g\|^2]$
- $|\langle Rf, g\rangle| = \langle Rf, g\rangle\overline{\langle Rf, g\rangle}/|\langle Rf, g\rangle|$
  $= \langle Rf, \langle Rf, g\rangle g/|\langle Rf, g\rangle|\rangle$
  $\leqslant \frac{1}{2}\frac{B-A}{B+A}[\|f\|^2 + \|\langle Rf, g\rangle g/|\langle Rf, g\rangle|\|^2]$
  $\leqslant \frac{1}{2}\frac{B-A}{B+A}[\|f\|^2 + \|g\|^2]$
- $\|R\| = \sup_{\|f\|=1, \|g\|=1}|\langle Rf, g\rangle| \leqslant \frac{B-A}{B+A}$

6. 直观地, C 可以理解为一个以 $C(a,b)$ 为权的秩 1 的迹类算子 $\langle\cdot, h^{a,b}\rangle h^{a,b}$ 的叠加。如果 C 关于 $a^{-2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$ 可积,则个体迹 $\langle\cdot, h^{a,b}\rangle h^{a,b}$ 当赋以权 $C(a,b)$（它们都等于 1）是"可和的",整个叠加起来存在有限迹

$$TrC = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}a}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}bc(a,b)$$

这种手工式的讨论可以通过逼近的方法而精确地作成。

7. 此处运用"essential infimum"（记作 ess inf）,其定义为

$$\mathrm{essinf}_x f(x) = \inf\{\alpha;\ |\{y; f(y)\geqslant \alpha\}| > 0\}$$

其中 $|A|$ 代表 $A\subset\mathbb{R}$ 的 Lebesque 测度。$\mathrm{essinf}_x f(x)$ 和 $\inf_x f(x)$ 在正测度要求之间存在差别:如果 $f(0)=0, f(x)=1$,对所有的 $x\neq 0$,则 $\inf_x f(x)=0$。但因为除了一组不值得考虑的零测度集外,有 $f\geqslant 1$,故 $\mathrm{essinf}_x f(x)=1$。但或许过于考究了,事实上,在大多数使用的条件中,如果以 essinf 或 esssup 去替换 inf 成 sup,其结果也不会是无效的。但是在通常情况下不值得这样去做;因为实际中要处理的表达式通常是连续函数,对其而言, inf 和 essinf 是一致的。不过在式(3.3.11)中情况又不同:即使对一个非常光滑的 $\hat\psi$,因为 $\hat\psi(0)=0$,和式 $\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat\psi(a_0^m\xi)|^2$ 在 $\xi=0$ 处也是不连续的。例如,对 Haar 函数, $|\hat\psi(\xi)| = 4(2\pi)^{-1/2}|\xi|^{-1}\sin^2\xi/4$,当 $\xi\neq 0$ 时 $\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat\psi(\xi)|^2 = (2\pi)^{-1}$,当 $\xi=0$ 时则为 0。因此有必要计算其 essential infimum,它的 infimum = 0。

8. 此条件蕴涵 $\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\hat\psi(a_0^m\xi)|^2$ 的有界性和 $\beta(s)$ 的衰减性两个结构

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\leqslant\sup_{1\leqslant|\zeta|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\zeta)|^2$$

$$\leqslant C^2a_0^{2\alpha}\Big[\sum_{m=-\infty}^{0}a_0^{2m\alpha}+\sum_{m=1}^{\infty}a_0^{2m\alpha}(1+a_0^{2m})^{-\Upsilon}\Big]<\infty$$

及

$$\beta(s)=\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2|\hat{\psi}(a_0^m\xi+s)|$$

$$\leqslant C^2\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\Big\{a_0^{\alpha}\sum_{m=-\infty}^{-1}a_0^{m\alpha}(1+|a_0^m2\xi+s|^2)^{-(\Upsilon-\alpha)/2}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}[1+|a_0^m\xi|^2)(1+|a_0^m\xi+s|^2)]^{(-\Upsilon-\alpha)/2}\Big\}$$

在第一项中用$|s|\geqslant2$时，$|a_0^m\xi+s|\geqslant|s|-1\geqslant\frac{|s|}{2}$的结论，可得

$$(1+|a_0^m\xi+s|^2)^{-1}\leqslant4(1+|s|^2)^{-1}$$

对$|s|<2$，有

$$(1+|a_0^m\xi+s|^2)^{-1}\leqslant1\leqslant5(1+|s|^2)^{-1}$$

这样一来，一旦$\alpha>0$，$\Upsilon>\alpha$，第一项以$C'(1+|s|^2)^{-(\Upsilon-\alpha)/2}$为界。当利用

$$\sup_{x,y\in\mathbf{R}}(1+y^2)[1+(x-y)^2]^{-1}[1+(x+y)^2]^{-1}<\infty$$

的结论时，第二项将以下式

$$C''(1+|s|^2)^{-(\Upsilon-\alpha)(1-\epsilon)/2}\sum_{m=0}^{\infty}(1+|a_0^m\xi|^2)^{-\epsilon(\Upsilon-\alpha)/2}$$

为界，其中$0<\epsilon<1$是任意小数，而$1\leqslant|\xi|\leqslant a_0$，当$\Upsilon>\alpha$时，它有界$C'''(1+|s|^2)^{-(\Upsilon-\alpha)(1-\epsilon)/2}$。这样，当$0<\rho<\Upsilon-\alpha$

$$\beta(s)\leqslant C(\rho)(1+|s|^2)^{-\rho/2}$$

而如果$\rho>1$，则有

$$\sum_{k\neq0}\Big[\beta\Big(\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\beta\Big(-\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\Big]^{1/2}\leqslant C'(\rho)b_0^{-\rho+1}$$

9．若$\hat{\psi}$连续而且在∞处有衰减性，则$\sum_m|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2$除$\xi=0$外，均连续。故存在$\alpha$，当$|\xi-\xi_0|\leqslant\alpha$时，$\sum_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2\leqslant\frac{3}{2}\epsilon$；对$\alpha'<\alpha$，定义一个函数$f$，当$|\xi-\xi_0|\leqslant\alpha'$时，$\hat{f}(\xi)=(2\alpha')^{-1/2}$，其他的$\xi$处$\hat{f}(\xi)=0$。则有

$$\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2\leqslant\frac{3}{2}\epsilon+\frac{2\pi}{b_0}\sum_{\substack{m,k\in\mathbf{Z}\\k\neq0}}(2\alpha')^{-1}$$

$$\int_{\substack{|\xi-\xi_0|\leqslant\alpha\\|\xi+2\pi kb_0^{-1}a_0^{-m}-\xi_0|\leqslant\alpha'}}\mathrm{d}\xi|\hat{\psi}(a_0^m\xi)||\hat{\psi}(a_0^m\xi+2\pi kb_0^{-1})|$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{2\pi}{b_0}\sum_{m\in\mathbf{Z}} \sum_{\substack{k\neq 0 \\ |k|\leqslant \alpha' b_0 a_0^m \pi^{-1}}} (2\alpha')^{-1} \int_{|\xi-\xi_0'|\leqslant\alpha'} \mathrm{d}\xi \,|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2$$

(用关于积分的 Cauchy-Schwaryz 不等式)

$$\leqslant \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{2\pi}{b_0}(2\alpha')^{-1}2\alpha' b_0\pi^{-1}\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_0^m \int_{|\xi-\xi_0'|\leqslant\alpha'} \mathrm{d}\xi \,|\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\varepsilon + 2\alpha' \sup_{\xi}\sum_{m\in\mathbf{Z}} a_0^m |\hat{\psi}(a_0^m\xi)|^2$$

如果对 $\Upsilon>1$ 时有 $\hat{\psi}(\xi)\leqslant C(1+|\xi|^2)^{-\Upsilon/2}$,则这个无穷和式对 ξ 是一致有界的,而且能够选到 α' 使得整个不等式的右端$\leqslant 2\varepsilon$。

10. 当心 Daubechies(1990) pp. 988～989 例子中的一个错误。对 $(h_{00})^{\wedge}$ 的公式应作成 $(h_{00})^{\wedge} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{r}^j \psi_{j0}$并推出对小的 p 的 $h_{00}\in L^p(\mathbb{R})$的结论。我很乐意向指出我的错误的 Chui 和 Shi(1991)致谢。

11. 这里与多分辨分析稍微不同,此地的式(3.3.27)也含有一个尺度因子 2

$$\psi(x) = \sum_k d_k \phi(2x-k)$$

12. 人们也能够在 g 和 $\hat{g}$ 的无紧支撑的情况下造出紧框架来。例如,当 g 和 $\hat{g}$ 都有指数衰减时即可作到。作这件事的方法之一是从窗口傅里叶框架出发,设窗函数为 g,并定义函数 $G=(F^*F)^{-1/2}g$,其中 $F^*F=\sum_{m,n}\langle\cdot, g_{m,n}\rangle g_{m,n}$。函数系 $G_{m,n}(x)=\mathrm{e}^{im\omega_0 x}G(x-nt_0)$(其中 ω_0, t_0 与 $g_{m,n}$的相同)将构成一个紧框架。事实上

$$\sum_{m,n}|\langle f, G_{m,n}\rangle|^2$$
$$=\sum_{m,n}|\langle f,(F^*F)^{-1/2}g_{m,n}\rangle|^2 = \sum_{m,n}|\langle (F^*F)^{-1/2}f, g_{m,n}\rangle|^2$$
$$=\langle (F^*F)(F^*F)^{-1/2}f,(F^*F)^{-1/2}f\rangle = \|f\|^2$$

函数 G 的计算可以利用$(F^*F)^{-1/2}$的级数展开来完成,该展开式与 3.2 节中$(F^*F)^{-1}$的级数类似。如果 g 和$\hat{g}$ 有指数衰减性(特别当 g 为 Gauss 函数时),则 G 与它的傅里叶变换也都有指数衰减性,更详细的大量的例子及有趣的应用请参看 Daubechies, Jaffard 和 Journe(1990)。

13. 在 Bacry, Grossmann 和 Zak(1975)的证明中运用了 Zak 变换,并将在第 4 章中介绍并引用它。关于他们的论述详细内容可参见 Daubechies(1990)。有趣的是,将他们的证明稍加推广即可证明当去掉函数系 $g_{m,n}$中的任一个(而不是两个)时,它也将生成整个 $L^2(\mathbb{R})$。

14. 这些公式再次运用了 Zak 变换。它们的推导可参见 Daubechies 和 Grossmann (1988);Daubechies(1990)还对他作出过评论。

15. 在一些应用中,Bastiaans 的结果可以对人们为了恢复稳定性进行的"超采样"(即选择$\omega_0 t_0<2\pi$)行为作出正确的解释。但是,即使使用这样的超采样技术仍然可能用到 Bastiaans 的病态对偶函数(参看,例如 Porat 和 Zeevi(1988))。当 $\omega_0 t_0=\pi$ 时,$g_{m,n}$可以分成两个族 $g_{m,2n}$, $g_{m,2n+1}$其中每一个都可以看成是 Gauss 窗口傅里叶函数在 $\omega_0 t_0=2\pi$ 的函数,一个由 g 本身产

生,另一个有 $g(x-t_0)$生成。这两个族都可以用来写出具有坏收敛性(在 $L^2(\mathbb{R})$中不收敛)的展开式(3.4.6),而其函数值可以看作两个展开式的平均值。在分布的意义上说这是对的,而且(用 Bastiaans$\tilde{g}$ 的去尾方法——与 Zeevi 的私人通信(1989))似乎也得到一种合理的收敛性(可能由于互相抵消的缘故),但缺乏较好的时—频局部化性质,估计使用较优的对偶函数 $\tilde{g}$(与图 3.6 中 $\lambda=5$ 的图形相对应)有望获得更好的收敛性。

16. 这种对称性肯定是不必要的。

17. 事实上,对于在正负频率半平面上的双曲几何而言,它是真正的双曲格点阵。

18. 但是,注意到 Y. Meyer 近来已证明了上面构造的 $a_{m,n}(f)$是局部极大,它不足以完全表征函数 f。

第 4 章　时—频密度和正交基

本章分为两节。第 1 节借助于窗口傅里叶变换讨论小波变换中时—频密度的作用。特别地，对于窗口傅里叶变换，正交基仅在 Nyquist 密度下才可能，而对于小波却无这种限制。这自然引出第 2 节，讨论两种情况下正交基的不同情况。

4.1　在小波变换及窗口傅里叶变换中时—频密度的作用

我们从窗口傅里叶变换开始讨论。在式 3.4.1 中曾提及只要 $\omega_0 t_0 > 2\pi$，不论 g 如何选择，函数族 $(g_{m,n}; m, n \in \mathbb{Z})$

$$g_{m,n}(x) = e^{im\omega_0 x} g(x - nt_0) \tag{4.1.1}$$

都不能构成一个框架。事实上，对于任意 $g \in L^2(\mathbb{R})$，可以找到 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 使 $f \neq 0$。但对于所有 $m, n \in Z$，$\langle f, g_{m,n} \rangle = 0$。例如，假设 $\omega_0 = 2\pi$，$t_0 = 2$，那么这样的 f 函数容易构造：对于所有 $m, n \in \mathbb{Z}$，$\langle f, g_{m,n} \rangle = 0$，则

$$0 = \int dx \cdot e^{2\pi imx} f(x) \overline{g(x - 2n)}$$

$$= \int_0^1 dx \cdot e^{2\pi imx} \sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x + l) \overline{g(x + l - 2n)}$$

因此只需找到 $f \neq 0$ 使 $\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x + l) \overline{g(x + l - 2n)} = 0$。现定义对于 $0 \leqslant x \leqslant 1, l \in \mathbb{Z}$，$f(x + l) = (-1)^l \cdot \overline{g(x - l - 1)}$。显然，$\int_{-\infty}^{\infty} dx \mid f(x) \mid^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mid g(x) \mid^2$，因此 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $f \neq 0$。然而，$\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(x + l) \cdot g(x + 1 - 2h) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l \cdot \overline{g(x - l - 1)} \cdot \overline{g(x + l - 2n)}$，该式在代入 $l = 2n - l' - 1$ 后刚好符号相反，因此为 0。对于任何其他 $\omega_0, t_0, \omega_0 t_0 = 4\pi$，可采用同样的方法构造，这可推广到 $\omega_0 t_0 > 2\pi$ 且 $2(\pi)^{-1} \omega_0 t_0$ 是有理数的情形（见 Daubechies(1990)，P978），如果 $(2\pi)^{-1} \omega_0 t_0 > 1$ 而且是无理数，还不知 $f \neq 0$ 且 $f \perp g_{m,n}$ 的显式构造。Rieffel (1981) 利用 von Neumann 代数证明了这样的函数 f 的存在性。如果考虑性能良好的 g（即 g 具时频衰减性），而且仅对证明 $g_{m,n}$ 能否构成一个框架感兴趣（这比证明存在 $f \perp g_{m,n}$ 容易），则 H. Landau 的下述结论巧妙地解决了这个问题。如果

$|g(x)|\leqslant C(1+x^2)^{-\alpha/2}, |\hat{g}(\xi)\leqslant C(1+\xi^2)^{-\alpha/2}|$并且 $g_{m,n}$构成一个框架,则定理3.5.2表明仅利用$|m\omega_0|\leqslant\Omega$、$|nt_0|\leqslant T$上的$\langle f,g_{m,n}\rangle$就可重构$[-T,T]\times[-\Omega,\Omega]$上的本性局部化函数$f$(有一个小的误差)。如果 support $\hat{f}(\omega)=[-\Omega,\Omega]$并且$[\int_{|x|\geqslant T}\mathrm{d}x\,|f(x)|^2]^{1/2}\leqslant\varepsilon\|f\|$,则

$$\|f-\sum_{\substack{|m\omega_0|\leqslant\Omega+\omega_\varepsilon\\|nt_0|\leqslant T+t_\varepsilon}}\langle f,g_{m,n}\rangle\tilde{g}_{m,n}\|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{\frac{B}{A}}\|f\|$$

根据此公式,所有这些函数能以任意小的误差表示为$\tilde{g}_{m,n}$的叠加,其中$|m|\leqslant\omega_0^{-1}(\Omega+\delta)$,$|n|\leqslant t_0^{-1}(T+\delta)$,这里$\delta$依赖于所允许的误差而不是$\Omega$或$T$。然而,2.3节中Landau、Pollak和Slepian的推论表明$[-\Omega,\Omega]$上满足$\int_{|x|\geqslant T}\mathrm{d}x\,|f(x)|^2\leqslant\gamma\|f\|^2$ $(0<\gamma<1$, γ为定值)的函数空间中,包含至少$\frac{4\Omega T}{2\pi}-O|\lg(\Omega T)|$个不同的规范正交函数(适当的椭球波函数)。所有这些不同的正交函数都能用一定数量的$\tilde{g}_{m,n}$的线性组合加以近似,只要$\tilde{g}_{m,n}$的数量超过这些正交函数的数量,即只要$(2\pi)^{-1}\Omega T-O(\lg(\Omega T))\leqslant 4\omega_0^{-1}t_0^{-1}(\Omega+\delta)(T+\delta)$,$\Omega,T$为任意值。当$\Omega,T\to\infty$时,$(2\pi)^{-1}\leqslant(\omega_0t_0)^{-1}$或$\omega_0t_0\leqslant2\pi$(这仅是证明的框架,详细证明请参考Landau(1989))。

实际中要得到好的时—频局部化特性,就不得不限制$\omega_0\cdot t_0<2\pi$(严格不等):当$\omega_0\cdot t_0=2\pi$时在时域或频域(甚至两者都)局部化特性变坏。这在以下定理中阐明。

定理4.1.1(Balian-Low定理) 如果$g_{m,n}(x)=\mathrm{e}^{2\pi mx}g(x-n)$构成$L^2(\mathbb{R})$的一个框架,那么$\int\mathrm{d}x\cdot x^2|g(x)|^2=\infty$或者$\int\mathrm{d}\zeta\cdot\zeta^2|\hat{g}(\zeta)|^2=\infty$成立。

在证明本定理之前,先回顾一下它的历史并作些说明。最先分别由Balian(1981)和Low(1985)为了正交基(而不是框架)提出该定理。他们的证明基本相似但都包含一个技术上的缺陷后被R. Coifman和S. Semmes解决。这个证明在Daubechies(1990)PP976~977中推广到框架。结果,Battle(1988)发现了一个完全不同而又非常巧妙的证明,该证明在1988年被Daubechies和Janssen推广到框架(即为下面给出的证明)。

使函数族$\mathrm{e}^{2\pi imx}g(x-n)$构成正交基的两种常见$g$函数为

$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad 及\quad g(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$$

在第一种情形中$\int\mathrm{d}\zeta\cdot\zeta^2|\hat{g}(\zeta)|^2=\infty$;在第二种请形中$\int\mathrm{d}x\cdot x^2|g(x)|^2=\infty$。Jensen、Hoholdt和Justesen(1988)证明有较好时—频局部化的g:构请g函数使g和$\hat{g}$均可积(即$\int\mathrm{d}x\,|g(x)|<\infty$,$\int\mathrm{d}\zeta\,|\hat{g}(\zeta)|<\infty$),但是它们的衰减

相当缓慢,见定理 4.1.1。

注意:定理 4.1.1 的公式中条件限制 $\omega_0=2\pi, t_0=1$ 并不苛刻,只要满足 $\omega_0\cdot t_0=2\pi$ 该条件就成立。从酉算子 $(\mu f)(x)=(2\pi\omega_0^{-1})^{1/2}\cdot g(2\pi\omega_0^{-1}x)$ 就足以看出这点;将 V 作用于 $g_{m,n}(x)=e^{im\omega_0 x}g(x-nt_0)$ 即可得到 $\mu g_{m,n}(x)=e^{2\pi imx}(Vg)(x-n)$。

用所谓的 Zak 变换证明定理 4.1.1。该变换定义为

$$(Zf)(s,t)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}e^{2\pi itl}\cdot f(s-l) \tag{4.1.2}$$

首先,这个变换有意义只要 f 对使所有 s 满足 $\sum|f(s-l)|$,特别地,只要 $|f(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-(1+\epsilon)}$。结果这种对 Z 变换限制条件的解释可推广到 $L^2(\mathbb{R})$ 至 $L^2([0,1]^2)$ 的酉映射。因为

- $e_{m,n}(x)=e^{2\pi imx}\cdot e(x-n)$ 构成 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上的正交基,其中

$$e(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases};$$

- $$(Ze_{m,n})(s,t)=\sum_l e^{2\pi itl}e^{2\pi im(s-l)}e(s-n-l)$$
$$=e^{2\pi ims}e^{-2\pi itn}(Ze)(s,t)$$
- $(Ze)(s,t)=1$ 在 $[0,1]^2$ 上几乎处处成立。

Z 将 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一个标准正交基映射为 $L^2([0,1]^2)$ 上的一个标准正交基,因此 Z 为酉映射。我们可将 Z 映射 $L^2(\mathbb{R})$ 的图像扩展到一个与 $L^2([0,1]^2)$ 同构的空间。从式(4.1.2),可以看出,如果允许 (s,t) 超出 $[0,1]^2$

$$(Zf)(s,t+1)=Zf(s,t),$$
$$(Zf)(s+1,t)=e^{2\pi it}(Zf)(s,t)$$

因此可以这样定义 $\mathscr{Z}$ 空间

$$\mathscr{Z}=\{F:R^2\to C;F(s,t+1)=F(s,t),F(s+1,t)=e^{2\pi it}F(s,t)$$

且

$$\|F\|_2^2=\int_0^1 dt\int_0^1 ds\,|F(s,t)|^2<\infty\}$$

于是 Z 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 到 $\mathscr{Z}$ 的酉映射。逆映射为:对任意 $F\in\mathscr{Z}$

$$(Z^{-1}F)(x)=\int_0^1 dt\cdot F(x,t)$$

这里,假设积分存在 (否则,要讨论极限)。

Zak 变换有许多精巧而有用的特性,正如其他精巧而有用的概念一样,它多次被发现,并在不同的领域具有不同的名字。它也称为 Weil-Brezin 映射,据称甚至 Gauss 也发现了它的某些特性,它还被 Gel'fand 使用过。J. Zak 独立发现了这种变换并进行了系统研究,开始应用于固态物理学,然后推广。Janssen (1988) 发表了一篇主要关于 Z 变换在信号分析中应用的很有价值的文章。

这里仅涉及的 Zak 变换的两方面的特性。首先,如果 $g_{m,n}(x)=e^{2\pi imx}g(x-n)$,则

$$(Zg_{m,n})(s,t)=e^{2\pi ims}e^{-2\pi in}(Zg)(s,t)$$

(正如上面我们已经指出,特殊情况下 $g=e$),因此

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2 &= \sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|\langle Zf,Zg_{m,n}\rangle|^2(\text{酉运算})\\ &= \sum_{m,n\in\mathbf{Z}}\left|\int_0^1 ds\int_0^1 dt\cdot e^{-2\pi ims}e^{2\pi int}(Zf)(s,t)\overline{(Zg)(s,t)}\right|^2\\ &= \int_0^1 ds\int_0^1 dt\,|(Zf)(s,t)|^2|Zg(s,t)|^2\end{aligned}$$

同样我们有 $Z(F^*F)Z^{-1}=|(Zg)(s,t)|^2$ 乘上 $\mathscr{Z}$ 空间,式中 $F^*Ff=\sum_{m,n}\langle f,g_{m,n}\rangle g_{m,n}$。这里需要关注的第二种特性是 Z 和 Q,P 运算之间的关系。Q,P 运算由 $(Qf)(x)=xf(x)$,$(Pf)(x)=-if'(x)$ 定义(或者更准确地,$(P\hat{f})\hat{}(\zeta)=\zeta\hat{f}(\zeta)$。可以验证

$$[Z(Qf)](s,t)=s(Zf)(s,t)-\frac{1}{2\pi i}\partial t(Zf)(s,t)$$

这意味着 $\int dx\cdot x^2|f(x)|^2<\infty$,即,$Qf\in L^2(\mathbf{R})$。当且仅当 $\partial t(Zf)\in L^2([0,1]^2)$。类似地可得,$\int d\zeta\cdot\zeta^2|\hat{f}(\zeta)|^2<\infty$ 或 $Pf\in L^2(\mathbf{R})$ 当且仅当 $\partial s(Zf)\in L^2([0,1]^2))$。现在我们可以证明定理 4.1.1 了。

证明:

1. 假定 $g_{m,n}$ 构成框架。因为

$$\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle\|^2=\int_0^1 ds\int_0^1 dt\,Zf(s,t)|^2|Zg(s,t)|^2$$

并且因为 Z 是酉的,于是

$$0<A\leqslant|Zg(s,t)|^2\leqslant B<\infty \tag{4.1.3}$$

2. 对偶框架向量 $\tilde{g}_{m,n}$ 由下式给出

$$\tilde{g}_{m,n}=(F^*\cdot F)^{-1}g_{m,n}$$

(见 3.2 节,3.4.3 节)。因为 $Z(F^*\cdot F)Z^{-1}=|Zg|^2$ 的倍乘,所以

$$Z\tilde{g}_{m,n}=|Zg|^{-2}Zg_{m,n}$$

或

$$\begin{aligned}(Z\tilde{g}_{m,n})(s,t) &= |Zg(s,t)|^{-2}e^{2\pi ims}e^{-2\pi its}(Zg)(s,t)\\ &= e^{2\pi ims}e^{-2\pi itn}[\overline{Zg(s,t)}]^{-1}\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

由式(4.1.3)知上式在 $\mathscr{Z}$ 空间。特别地,由式(4.1.4)可得

$$\tilde{g}_{m,n}(x)=e^{2\pi imx}\tilde{g}(x-n)$$

且

$$\tilde{Zg} = 1/\overline{(Zg)}$$

3. 现在假定$\int dx \cdot x^2 |g(x)|^2 < \infty, \int d\zeta \cdot \zeta^2 |\hat{g}(\zeta)|^2 < \infty$，即 Qg、$Pg \in L^2(\mathbb{R})$，这将导出矛盾，定理并由此得证。因为 Qg、$Pg \in L^2(\mathbb{R})$，我们有$\partial s(Zg)$、$\partial t(Zg) \in L^2([0;1]^2)$。结果

$$\partial s\tilde{Zg} = \overline{(Zg)}^{-2}\,\overline{\partial sZg} \text{ 和 } \partial t\tilde{Zg} = \overline{(Zg)}^{-2}\,\overline{\partial tZg}$$

在 $L^2([0,1]^2)$中；于是 $Q\tilde{g}$、$P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$

4. $\langle \tilde{g}, g_{m,n} \rangle = \langle Z\tilde{g}, Zg_{m,n} \rangle$

$$= \int_0^1 ds \int_0^1 dt\, Z\tilde{g}(s,t)\, \overline{Zg(s,t)} e^{-2\pi ims} e^{2\pi tin} = \delta_{m0}\delta_{n0}$$

类似地

$$\langle g, \tilde{g}_{m,n} \rangle = \delta_{m0}\delta_{n0} \tag{4.1.5}$$

5. 因为 Qg、$P\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$并且因为$(g_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$、$(\tilde{g}_{m,n})_{m,n\in\mathbb{Z}}$构成二元框架。有

$$\langle Qg, P\tilde{g} \rangle = \sum_{m,n} \langle Qg, \tilde{g}_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, P\tilde{g} \rangle$$

但

$$\langle Qg, \tilde{g}_{m,n} \rangle = \int dx \cdot xg(x) e^{-2\pi imx} \overline{\tilde{g}(x-n)}$$

$$= \int dx \cdot g(x) e^{-2\pi imx} (x-n) \overline{\tilde{g}(x-n)}$$

(因为$\langle g, \tilde{g}_{m,n} \rangle = \delta_{m0}\delta_{n0}$)

$$= \langle g_{-m,-n}, Q\tilde{g} \rangle$$

同样地

$$\langle g_{m,n}, P\tilde{g} \rangle = \langle Pg, \tilde{g}_{-m,-n} \rangle$$

所以

$$\langle Qg, P\tilde{g} \rangle = \sum_{m,n} \langle Pg, \tilde{g}_{-m,-n} \rangle \langle g_{-m,-n}, Q\tilde{g} \rangle = \langle Pg, Q\tilde{g} \rangle \tag{4.1.6}$$

上式最后一项有意义，因为 Pg、$Q\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$。

6. 我们已经引出矛盾：$\langle Qg, P\tilde{g} \rangle = \langle Pg, Q\tilde{g} \rangle$是不可能的。对于任两个函数 f_1, f_2 满足$|f_j(xc)| \leqslant C(1+x^2)^{-1}, |\hat{f}_j(\zeta)| \leqslant C(1+\zeta^2)^{-1}$有

$$\langle Qf_1, Pf_2 \rangle = \int dx \cdot xf_1(x)\, \overline{if_2'(x)}$$

$$= -\int dx i[xf'_1(x) + f_1(x)] f_2(x)$$

$$= -i\langle f_1, f_2 \rangle + \langle Pf_1, Qf_2 \rangle$$

此外，因为，$Pg, Qg \in L^2(\mathbb{R})$，存在 g_m 满足$|g_n(x)| \leqslant C_n(1+x^2)^{-1}, |\hat{g}_n(\zeta)| \leqslant C_n(1+\zeta^2)^{-1}$，使$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} g_n = g, \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} Pg_n = Pg, \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} Qg_n = Qg$（例如 $g_n = \sum_{k=0}^{n} \langle g, H_k \rangle$

H_k，这里 H_k 为 Hermite 函数)。可以为 $\tilde{g}$ 构造一个类似的序列 $\tilde{g}_n$。于是

$$\begin{aligned}\langle Pg, Q\tilde{g}\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle Pg_n, Q\tilde{g}_n\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}[\langle Qg_n, Q\tilde{g}_n\rangle + i\langle g_n, \tilde{g}_n\rangle] \\ &= \langle Qg, P\tilde{g}\rangle + i\langle g, \tilde{g}\rangle\end{aligned}$$

考虑到式(4.1.6)可得 $\langle g,\tilde{g}\rangle = 0$。然而从式(4.1.5)得到 $\langle g,\tilde{g}\rangle = 1$，这将引起矛盾，于是定理得证。[①] ■

至此我们归纳结论如下：

- $\omega_0 t_0 > 2\pi \rightarrow$ 无框架。
- $\omega_0 t_0 = 2\pi \rightarrow$ 存在框架，但时—频局部化特性不好。
- $\omega_0 t_0 < 2\pi \rightarrow$ 存在框架(甚至为紧框架)具有良好的时频局部化特性(见3.4.4.A)。

这由图4.1所示给出 $\omega_0 t_0$ 平面的三个区域代表。3.4.1节中已指出，正交基仅在边界情况 $\omega_0 t_0 = 2\pi$ 情况下才可能。由定理4.1.1，说明 $g_{m,n}$ 满足式(4.1.1)，正交基 $\{g_{m,n}; m,n\in\mathbb{Z}\}$；时频局部化不好。

事实上，$\omega_0 t_0$ 是由 $g_{m,n}$ 构成框架的"时—频密度"的一种度量。我们将这种"密度"定义为

$$\lim_{\lambda\to\infty} \#\{(m,n);(m\omega_0, nt_0)\in\lambda s\}/|\lambda s| \tag{4.1.7}$$

式中 s 为 $\mathbb{R}^2$ 中具零 Lebesgue 测度的子集。该极限与 s 无关，等于 $(\omega_0 t_0)^{-1}$，这个密度与3.5节中时—频局部化特性的讨论一致(见式(3.1.17))。$(\omega_0 t_0)^{-1} \geqslant (2\pi)^{-1}$ 这种限制意味着—框架的时频密度至少为 Nyquist 密度(见2.3节的一般表达式)。实际上，定理4.1.1表明如果窗口傅里叶框架要具有良好的时—频局部化特性，必须严格限制在 Nyquist 密度之上。

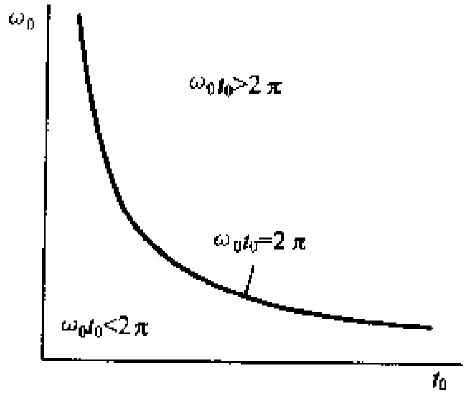


图4.1 区域 $\omega_0 t_0 > 2\pi$ 无框架，$\omega_0 t_0 < 2\pi$ 时存在紧框架具有良好的时—频特性，分界线 $\omega_0 t_0 = 2\pi$ 仅存在正交基

① 见本章末注2。

让我们转到小波讨论,其情况是完全不同的。对于小波展开无"明确"的时—频密度的定义。在 2.8 节中的局部化算子研究中已经看到这点:对于窗口傅里叶变换,过度区中的特征根数量变得很小(与 1 附近特征根数量相比)。而在小波情形,当局部化区域的面积趋于无穷时,这两个数量都为同一数量级。这使得不可能用 Nyquist 密度作为一个精确的比较。

对于离散小波族类似情况也常常发生。在 3.5 节用框架讨论时—频密度时,我们看到在时—频平面上,一个本质上集中在$[-T,T]\times[-\Omega,-\Omega_0]\times[\Omega_0,\Omega_1]$的函数可以用有限多个小波很好地逼近。不像窗口傅里叶变换情况下,该数量与时—频面积 $4T(\Omega_1,-\Omega_0)$之比取决于所希望的近似精度(见式(3.5.11)),这使得不可能用 Nyquist 密度作一个精确的比较(正如连续小波中一样)。另一方面,如果我们试图模仿图 1.4(a)中双曲格点定义,就会发现

$$R_s(\lambda) = \#\{(m,n);(m\omega_0, nt_0)\in\lambda s\}/|\lambda s|$$

(式中 s 的选择使分子为有限值)并不随 $\lambda\to\infty$ 时趋于一个有限值。例如,$S=[-T,T]\times([-2^{m_1},-2^{m_0}]\cup[2^{m_0},2^{m_1}])$且 $a_0=2$,$R_s(\lambda)$在 $\rho(1-2^{m_0-m_1-1})/(1-2^{m_0-m_1})$与 $2\rho(1-2^{m_0-m_1-1})/(1-2^{m_0-m_1})$之间振荡,式中 ρ 取决于所选小波 Ψ。时—频局部化中计算所需小波数量时碰到的问题可能是由该现象而不是框架缺少一个固有的时—频密度而引起。因此我们将进一步研究。

正如前面曾提到的,小波框架无需预先限制膨胀和平移参数的范围:任意 a_0、b_0 所定义的紧框架对于 ψ 在时域及频域都具有良好的局部性(见式(3.3.5(a))。事实上,从一个离散化参数为 a_0、b_0 的(紧)框架,我们总可以用 a_0、b_0'(b'_0 任意),即仅通过膨胀构造一个不同的(紧)框架①。因此对 a_0、b_0 不必预先给予限制。可通过将 ψ 标准化,$\|\psi\|=1$ 和将$\int d\xi\cdot|\xi|^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2$值固定来取消这种膨胀自由。例如对于实小波 ψ,可以令$\int_0^\infty d\xi\xi^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2=\int_{-\infty}^0 d\xi|\xi|^{-1}|\hat{\psi}(\xi)|^2=2$。通过这种限制 ψ 产生的紧框架将自动具有框架界 $A=\frac{2\pi}{b_0\ln a_0}$(见定理 3.3.1)。与紧窗口傅里叶变换的 $A=\frac{2\pi}{\omega_0 t_0}$相比较,小波情形的$(b_0\ln a_0)^{-1}$可能起着时—频密度的作用。以下的例子将消除这方面的所有可能性。下一节我们将涉及到 Meyer 小波 ψ;它具有紧支傅里叶变换 $\hat{\psi}\in C^k$(此处 k 可能是∞,正如式(3.3.5(a)) 中所述;这两种构造是相关的),并且 $\psi_{m,n}=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)$, $m,n\in\mathbf{Z}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$上的一个正交基。定义

$$\psi^b_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-nb) \tag{4.1.8}$$

---

① 见本章末注 3。

式中 ψ 为 Meyèr 小波,任意 $b>0$。考虑与 b 相关的函数族 $F(b)=\{\psi^b_{m,n};m,n\in\mathbf{Z}\}$,对应栅格的密度随 b 的变化而变化(注意对于所有 $F(b)$, a_0 和 ψ 相同!)。如果小波也有像图 4.1 一样的表示,可以设想因为 $F(1)$ 为 $L^2(\mathbf{R})$上的正交基,如果 $b>1$,$F(b)$不能胀成整个 $L^2(\mathbf{R})$(向量数"不够"),如果 $b<1$,$F(b)$将呈不线性独立("太多"向量)。可以证明(见 Daubechies(1990)中定理 2.10,并在本章后面给出一个简略证明),对某些 $\varepsilon>0$,$F(b)$为 $L^2(\mathbf{R})$的 Riesz 基,$\forall b\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$。此例说明对小波族应用"时—频密度的方法"并不是总是正确的。

4.2 标准正交基

4.2.1 标准正交小波基

上节最后一段的结论似乎是小波的缺陷:无明晰的时—频密度概念。本节将强调小波的优点:存在具有良好时—频局部化特性的正交小波基。

历史上第一个标准正交小波基为 Haar 基,在"小波"这个术语出现之前就已构造出。正如在第一章所见,其基本小波为

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -1 & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{4.2.1}$$

1.6 节中给出 $\psi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)$构成 $L^2(\mathbf{R})$的一个标准正交基。Haar 函数非连续,其傅里叶变换衰减为$|\zeta|^{-1}$,与其坏的频率局部化特性对应。因此 Haar 基似乎不比窗口傅里叶变换基

$$g_{m,n}(x)=e^{2\pi imx}g(x-n)\tag{4.2.2}$$

优越,其中

$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

并且 $g_{m,n}$也为$L^2(\mathbf{R})$的正交基。然而,Haar 基具有这个窗口傅里叶基不具备的优势。例如,傅里叶基是 $L^p(\mathbf{R})$,$1<p<\infty$上的无条件基,而式(4.2.2)给出的窗口傅里叶基如果 $p\neq 2$ 则不是①。第 9 章还会讨论这个问题。对于更光滑函数的分析,非连续的 Haar 基就不适合。

比 Haar 基的时—频特性更好的另一种正交基为 Littlewood—Paley 基

---

① 见本章末注 4。

$$\hat{\psi}(\zeta)=\begin{cases}2(\pi)^{-1/2} & \pi\leqslant|\zeta|\leqslant 2\pi\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

或

$$\psi(x)=(\pi x)^{-1}(\sin 2\pi x-\sin\pi)$$

容易验证 $\psi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)$构成 $L^2(\mathbb{R})$上的一个正交基。对于所 $m,n\in\mathbb{Z}$,有 $\|\psi_{m,n}\|=1$,并且

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2\\
&=\sum_{m,n}(2\pi)^{-1}2^m\left|\int_{2^{-m}\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2^{-m+1}\pi}\mathrm{d}\xi\cdot\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{in2^m\xi}\right|^2\\
&=\sum_{m,n}(2\pi)^{-1}2^{-m}\left|\int_{\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2\pi}\mathrm{d}s\cdot\hat{f}(2^{-m}\xi)\mathrm{e}^{in\xi}\right|^2\\
&=\sum_{m,n}(2\pi)^{-1}2^{-m}\left|\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\cdot\mathrm{e}^{in\xi}[\hat{f}(2^{-m}\xi)x_{[\pi,2\pi]}(\xi)\right.\\
&\qquad\left.+\hat{f}(2^{-m}(\xi-2\pi))x_{[0,\pi]}(\xi)]\right|^2\\
&=\sum_m 2^{-m}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi|\hat{f}(2^{-m}\xi x_{[\pi,2\pi]}(\xi)+\hat{f}(2^{-b}(\xi-2\pi))x_{[0,\pi]}(\xi)|^2\\
&=\sum_m 2^{-m}\int_{\pi<|\xi|\leqslant 2\pi}\mathrm{d}\xi|\hat{f}(2^{-m}\xi)|^2\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi|\hat{f}(\xi)|^2=\|f\|^2
\end{aligned}$$

根据命题3.2.1,表明$\{\psi_{m,n};m,n\in\mathbb{Z}\}$为 $L^2(\mathbb{R})$上的正交基。$\psi(x)$衰减特性与 Shannon 展开式(2.1.1)中使用的正交窗口傅里叶基一样不好($x\to\infty$时,$\psi(x)\sim|x|^{-1}$),两者都具有良好的频率局部性,因为他们的傅里叶变换是紧支的。

最近 10 年人们构造了 $L^2(\mathbb{R})$的几个正交小波基,它们具有 Haar 基和 Littewood - Paley 基最好的特性,这些小波基在频域和时域都具有良好的局部化特性。Strombery 构造了其中第一个小波基,该小波呈指数衰减并在 C^k 中(k 任意但为有限)。可惜的是,他的发现很少为当时所注意。第二个例子是前面提到的 Meyer 基(Meyer 1985),其中 $\hat{\psi}$ 是紧支的且属于 C^k(k 为任意,可为∞)。未意识到当时 Stromberg 的构造,Y. Meyer 在试图证明小波亦有与定理 4.1.1 类似的结论(该结论说明这些性能良好的小波基并不存在)时发现了该小波基。不久,Tchamitchian (1987) 构造了第一个双正交小波基(见 8.3 节)。翌年,Battle(1987)和 Lamarie (1988)用完全不同的方法构造了同样具有指数衰减 $\psi\in C^k$(k 任意但为有限)的正交小波基族(Battle 受真空领域的理论所启发,Lamarie 重新使用一些 Tchamitchian 的计算)。除了具有类似特性以外,Battle - Lamare 小波不同于 Stromberg 小波。

1986 年底，S. Mallat 和 Y. Meyer 提出了“多分辨分析”框架，这给所有这些小波以一个满意的解释，并为构造其他小波提供了一个工具。这将在后面的章节中讨论。在进入多分辨分析前，先讨论 Meyer 小波基的构造。

$|\hat{\psi}|$ 的构造类似于 3.3.5 节(a)中的紧框架。该框架具有冗余度 2。为消除这种冗余，Meyer 的构造将正频率和负频率组合起来(将一对函数减少为一个)。为达到标准正交化，需要一些巧妙的相位分解技巧。更清楚地说，通过

$$\hat{\psi}(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{-1/2}e^{i\xi/2}\sin\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\xi|-1\right)\right] & \frac{2\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{4\pi}{3}\\ (2\pi)^{1/2}e^{i\xi/2}\cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{4\pi}|\xi|-1\right)\right] & \frac{4\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8\pi}{3}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{4.2.3}$$

定义 ψ，式中 v 为 C^k 或 C^∞ 函数满足式(3.3.25)，即

$$v(x)=\begin{cases}0 & 若\ x\leqslant 0\\ 1 & 若\ x\geqslant 1\end{cases}\tag{4.2.4}$$

且

$$v(x)+v(1-x)=1\tag{4.2.5}$$

$\hat{\psi}$ 的正则性与 v 相同。图 4.2 显示了典型的 v 和 $|\hat{\psi}|$ 的曲线形状。为了证明 $\psi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)$ 构成一个正交基，只需有证明 $\|\psi\|=1$，并且 $\psi_{m,n}$ 组成一个紧框架，其框架常数为 1(见命题 3.2.1)。

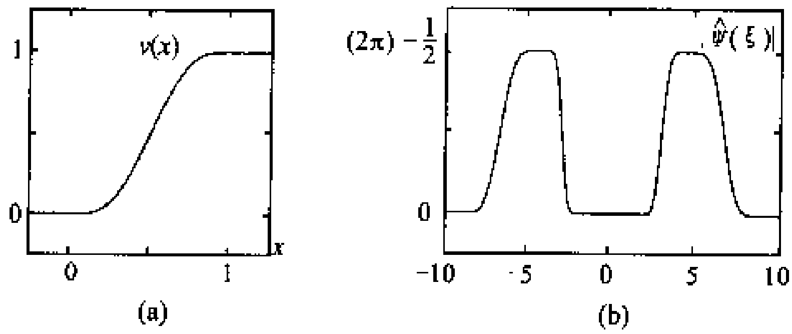


图 4.2　式(4.2.3)～式(4.2.5)给出的函数及 ψ 函数

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &= (2\pi)^{-1}\Big\{\int_{\frac{2\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{4\pi}{3}} d\xi\sin^2\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\xi|-1\right)\right]\\ &\quad+\int_{\frac{4\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8\pi}{3}} d\xi\cos^2\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{4\pi}|\xi|-1\right)\right]\Big\}\\ &= (2\pi)^{-1}\Big\{2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^1 ds\sin^2\left[\frac{\pi}{2}v(s)\right]+2\cdot\frac{4\pi}{3}\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2}v(s)\right]\Big\}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\{1 + \int_0^1 ds\cos^2[\frac{\pi}{2}v(s)]\}$$

但

$$\int_0^1 ds\cos^2[\frac{\pi}{2}v(s)] = \int_0^{1/2} ds\cos^2[\frac{\pi}{2}V(s)]$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} ds\ \cos^2[\frac{\pi}{2}(1 - v(\frac{1}{2} - s))]$$

(因为由式(4.2.5), $v(s + \frac{1}{2}) = 1 - V(\frac{1}{2} - s)$)

$$= \int_0^{1/2} ds\cos^2[\frac{\pi}{2}v(s)] + \int_0^{1/2} ds'\sin^2[\frac{\pi}{2}v(s')] = \frac{1}{2}$$

所以 $\|\psi\|^2 = 1$。

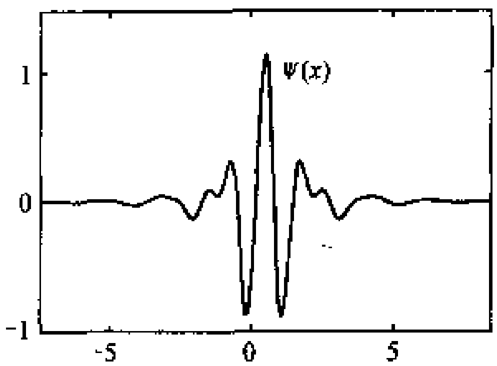


图 4.3 选择 $v(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$时 Meyer 小波

使用 Tchachitchian 的框架估计式(3.2.21),式(3.2.22)来估计 $\sum_{m,n}|\langle f, \psi_{m,n}\rangle|^2$。首先证明对所有 $k \in \mathbb{Z}$, $\beta_1(2\pi(2k+1)) = 0$ 成立,即对所有 $\zeta \in \mathbb{R}$,证明

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(2^l\zeta)}\hat{\psi}[2^l(\zeta + 2\pi(2k + 1))] = 0 \tag{4.2.6}$$

成立。根据 $\hat{\psi}$ 的支集,式(4.2.6) 的非零部分只有在 $|2^l\zeta| \leqslant \frac{8\pi}{3}$ 和 $|2^l(\xi + 2\pi(2k + 1))| \leqslant \frac{8\pi}{3}$ 才可能,这表明 $2^l|2k + 1| \leqslant \frac{8\pi}{3}$。满足此条件的$(l, k)$只有(0,0),(0,−1),(1,0),(1,−1),验证 $k = 0(k = -1)$类似。于是式(4.2.6)左边变为

$$\overline{\hat{\psi}(\zeta)}\hat{\psi}(\zeta + 2\pi) + \overline{\hat{\psi}(2\zeta)}\hat{\psi}(2\xi + 4\pi) \tag{4.2.7}$$

容易证明式(4.2.7)中两项都为零,除非 $-\frac{4\pi}{3} \leqslant \zeta \leqslant -\frac{2\pi}{3}$。对于该间隔中的 ζ, $\zeta = -\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\alpha$。其中 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$,有

$$(4.2.7) = e^{-i\zeta/2}\sin[\frac{\pi}{2}v(1 - \alpha)]e^{i(\zeta+2\pi)/2}\sin[\frac{\pi}{2}v(\alpha)]$$

$$+ e^{i\xi}\cos[\frac{\pi}{2}v(1-\alpha)]e^{i(\xi+2\pi)}\cos[\frac{\pi}{2}v(\alpha)]$$

$$= -\cos[\frac{\pi}{2}v(\alpha)]\sin[\frac{\pi}{2}v(\alpha)] + \sin[\frac{\pi}{2}v(\alpha)]\cos[\frac{\pi}{2}v(\alpha)] = 0$$

于是式(4.2.6)得证。另一方面,容易验证对所有 $\zeta\neq 0$, $\sum_m |\hat{\psi}(2^m\zeta)|^2 = (2\pi)^{-1}$。由式(3.3.21)、式(3.3.22)可得 $\psi_{m,n}$构成一个紧框架其框架界为1(类似计算可用于证明 $F(b)$(见4.1节末尾)构成 $L^2(\mathbb{R})$上 Riesz 基,如果 b 接近与1[①])。

Meyer 小波构成正交基的证明取决于利用 $\hat{\psi}$ 相位与 v 的特性式(4.2.5)间的相互作用所进行的奇妙的消项。利用多分辨分析可解释这种奇妙性(见下章)。图4.3给出 $\psi(x)$的图形,其中 $v(x)=x^4(35-84x+80x^2-20x^3)\in C^{4-\epsilon}$, $0\leqslant x\leqslant 1$。注意,即使 $v\in C^\infty$, ψ 比任何多项式的倒数衰减更快。即对所有 $N\in\mathbb{N}$,存在 $C_N<\infty$。使

$$|\psi(x)|\leqslant C_N(1+|x|^2)^{-N} \tag{4.2.8}$$

ψ 的数值衰减可能相当慢(即 $\inf\{a;对|x|>a, \|\psi(x)\|\leqslant 0.001\|\psi\|_{L^\infty}\}$可能很大,因此式(4.2.8)中 C_N 也大)。Stromberg 或 Battle-Lemarie 的指数衰减在数值上衰减快得多,以正则性为代价。

在正交基方面小波相对窗口傅里叶函数更具有优越性。某些小波基的 ψ 和 $\hat{\psi}$ 都衰减很快,与定理4.1.1形成鲜明的对比,该定理不允许 g 和 $\hat{g}$ 同时具有良好的衰减特性,如果 g 为能导出一个正交基的窗口函数。如果我在三年前写本章内容,可能就到此为止了。但事情并非如此简单,最近几年,窗口傅里叶变换已经导出几个令人吃惊的结论,本章其余部分将讨论这个问题。

4.2.2 窗口傅里叶变换重新定位:非常良好的正交基

在定理4.1.1条件下,推广窗口傅里叶构造的一种方法是考虑不由严格的时—频栅格产生的函数簇 $g_{m,n}(x)$。这样稍容易一些。Bourgain(1988)构造了 $L^2(\mathbb{R})$正交基$(g_i)_{j\in J}$使

$$\int dx(x-x_j)^2|g_j(x)|^2\leqslant C, \quad \int d\xi(\xi-\xi_j)^2|\hat{g}_j(\xi)|^2\leqslant C \tag{4.2.9}$$

在 $j\in J$ 中均匀分布,式中 $x_j=\int dx\cdot x|g_j(x)|^2$, $\xi_j=\int d\xi\xi|\hat{g}_j(\xi)|^2$(注意,小

① 见本章末注5。

波基并不满足这样一个一致上界①)。因此放弃栅格结构可以得到比 Balian－Low 定理更好的局部化特性。然而,Steger(个人通信,1986 年)证明局部化特性即使比式(4.2.9)好一点点也是不可能的。$L^2(\mathbb{R})$不允许一个正交基$(g_j)_{j\in J}$满足

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}x(x-x_j)^{2(1+\epsilon)}\mid g_j(x)\mid^2\leqslant C,\\&\int \mathrm{d}\xi(\xi-\xi_j)^{2(1+\epsilon)}\mid \hat{g}_j(\xi)\mid^2\leqslant C\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

当$\epsilon>0$时，在j中一致成立。因此这种方法不能得到良好的时—频局部化特性。有另外一种方法可突破栅格方案式(4.1.1)。注意式(4.2.9),式(4.2.10)中,时—频局部化要求$g_{m,n}$及$\hat{g}_{m,n}$在平均值$x_{m,n}$,$\xi_{m,n}$外有很强的衰减性。这与$g_{m,n}$和$\hat{g}_{m,n}$本质上只有一个主峰的曲线一致。Wilson (1987) 提出另外一种小波基$g_{m,n}$

$$g_{m,n}(x)=f_m(x-n),m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}\tag{4.2.11}$$

式中$\hat{f}_m$具有双峰,位于$\frac{m}{2}$和$-\frac{m}{2}$附近

$$\hat{f}_m(\xi)=\phi_m^+(\xi-\frac{m}{2})+\phi_m^-(\xi+\frac{m}{2})\tag{4.2.12}$$

ϕ_m^+和ϕ_m^-以 0 为中心。这完全改变了曲线形状。Wilson (1987) 提供了一个正交基存在的数值证明,该正交基对f_m和ϕ_m^+,ϕ_m^-呈一致的指数衰减。在他的数值构造中他还通过要求

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}\xi\cdot\xi^2\,\overline{(\psi_{m,n})\wedge(\xi)}\,\psi_{m',n'}(\xi)=0\\&\text{如果}\mid m-m'\mid>1\text{或}\begin{cases}\mid m-m'\mid=1\\\mid n-n'\mid>1\end{cases}\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

而优化了局部化特性。Sullivan et al. (1987) 提供证据解释了 Wilson 基的存在及其指数衰减性。在两篇论文中给出了无限多$\phi_m^{\pm}$;当$m\to\infty$时,$\phi_m^{\pm}$趋向一个有限函数$\phi_\infty^{\pm}$。

Wilson 构造的原理是如果使用式(4.2.13)中双模态函数则获得好的相空间局部化特性的正交基是可能的。

注意以前见到的小波构造,框架以及正交基在频域具有双峰(一个峰对应$\xi>0$,另一个峰对应$\xi<0$)。在框架或连续小波变换中,两个频率区可以分开(与频率单峰函数一致;见 3.3.5 节(a)或式(2.4.9)),但正交基似乎并非如此。后面将看到ψ的两个频率峰不必对称:例如$\|\psi\|^{-2}\cdot\int_{\xi\leqslant0}\mathrm{d}\xi|\hat{\psi}(\xi)|^2$可任意小(但严格为正!)。然而,至今未找到一个例子,具有良好局部化特性的$\psi^{\pm}$函数满足$(\hat{\psi}^{\pm})\subset$

① 见本章末注 6。

$\mathbb{R}^{\pm}$并使$\{\psi^{\varepsilon}_{m,n}; m,n\in\mathbb{Z},\varepsilon=+$或$-\}$构成 $L^2(\mathbb{R})$上正交基,对应于具有频率单峰的小波基(同样,不存在光滑函数 $\eta=\hat{\psi}$ 使 $2^{m/2}\exp(2\pi i 2^m n\xi)\eta(2^m\xi)$, $m,n\in\mathbb{Z}$)构成 $L^2(\mathbb{R}^+)$上的一个正交基)。据说没有这种基存在，但到目前为止也没有证据证明[①]。

现回到 Wilson 基。如果取消限制式(4.2.13)(如果 f_m、$\phi^{\pm}_m$ 为指数衰减,则这些量按指数$|m-m'|$,$|n-n'|$衰减),则 Wilson 公式(4.2.11),式(4.2.12)可极大地简化。

Daubechies Jaffard 和 Journe(1991) 提出一个仅使用一个函数 ϕ 的构造。该构造定义为

$$g_{m,n}(x)=f_m(x-n), m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, n\in\mathbb{Z} \tag{4.2.14}$$

且

$$\hat{f}_1(\xi)=\phi(\xi)$$

$$\hat{f}_2(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(\xi-2\pi)-\phi(\xi+2\pi)]$$

$$\hat{f}_3(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(\xi-2\pi)+\phi(\xi+2\pi)]e^{j\xi/2}$$

$$\hat{f}_4(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(\xi-4\pi)+\phi(\xi+4\pi)]$$

$$\hat{f}_5(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\xi-4\pi)-\phi(\xi+4\pi)e^{j\xi/2}$$

……

或

$$\hat{f}_{2l+\sigma}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\phi(\xi-2\pi l)+(-1)^{l+\sigma}\phi(\xi+2\pi l)]e^{i\sigma\xi/2} \tag{4.2.15}$$

其中 $l\in\mathbb{N}$, $\sigma=0$ 或 1 但 l、σ 不能同时为 0。所有这些相位因子和替换符号的结果为

$$f_1(x)=\check{\phi}(x)$$

$$f_{2l+\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\check{\phi}(x+\frac{\sigma}{2})e^{i\pi\sigma l}[e^{2\pi ilx}+(-1)^{l+\sigma}e^{-2\pi ilx}]$$

如果通过定义 $G_{m,n}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$ 重新对 $g_{m,n}$标号,即

① 见本章末注 7。

$$G_{0,n} = g_{1,n}$$
$$G_{l,2n+\sigma} = g_{2l+\sigma,n}$$

则

$$G_{0,n}(x) = \check{\phi}(x-n) \tag{4.2.16}$$

并且对 $l>0$

$$G_{l,n}(x) = \sqrt{2}\check{\phi}\left(x-\frac{n}{2}\right)\begin{cases}\cos 2\pi lx, 如果 \ l+n \ 为偶数\\ \sin 2\pi lx, 如果 \ l+n \ 为奇数\end{cases} \tag{4.2.17}$$

该构造(以及下面提及的)表明获得良好时—频局部化(选择 ϕ 使 $\phi,\check{\phi}$ 呈指数衰减)以及窗口傅里叶框架的标准正交性的关键在于使用正弦和余弦(相应地改变)而不是复指数函数。

让我们回到式(4.2.14)、式(4.2.15)并说明该构造怎样导出一个正交基。与通常一样,我们同样只需要检查 $\| g_{m,n} \| = 1$ 及 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\langle h, g_{m,n}\rangle|^2 = \|h\|^2$。于是有 $\|g_{1,n}\| = \|f_1\| = \|\phi\|$,并且对 $m>1$

$$\begin{aligned}\|g_{m,n}\|^2 = \|f_m\|^2 &= \|f_{2l+\sigma}\|^2 \quad (m = 2l+\sigma, l>0)\\ &= \frac{1}{2}\left[2\|\phi\|^2 + 2(-1)^{l+\sigma}\int d\xi \phi(\xi)\phi(\xi+4\pi l)\right)\end{aligned}$$

(为简便起见,假定 ϕ 为实数)。因此对所有 m、n, $\|g_{m,n}\| = 1$,只要

$$\int d\xi \phi(\xi)\phi(\xi+4\pi l) = \delta_{l0} \tag{4.2.18}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\langle h, g_{m,n}\rangle|^2\\ &= 2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int d\xi \hat{h}(\xi)\overline{\hat{h}(\xi+2\pi)\hat{f}_m(\xi)}\hat{f}_m(\xi+2\pi k)\end{aligned}$$

上式等于 $\|h\|^2$, 只要

$$\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\hat{f}_m(\xi)}\hat{f}_m(\xi+2\pi k) = (2\pi)^{-1}\delta_{k0} \tag{4.2.19}$$

经过简单处理即可得

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{\hat{f}_m(\xi)}\hat{f}_m(\xi+2\pi k) &= \phi(\xi)\phi(\xi+2\pi k)\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l\neq 0}\phi(\xi+2\pi k)\phi(\xi+2l\pi+2\pi k)[1+(-1)^k]\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l\neq 0}(-1)^l\varphi(\xi-2\pi l)\varphi(\xi+2\pi l+2\pi k)[1-(-1)^k]\end{aligned} \tag{4.2.20}$$

如果 k 为奇数，$k=2k'+1$，于是简化为

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}(-1)^l\phi(\xi-2\pi l)\phi(\xi+2\pi(l+2k'+1)) \qquad (4.2.21)$$

该式为0，因为作代换 $l'=-(l+2k'+1)$ 将得到式(4.2.21)的相反数。如果 k 为偶数，$k=2k'$，于是式(4.2.19)简化为

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\phi(\xi+2\pi l)\phi(\xi+2\pi l+4\pi k')=(2\pi)^{-1}\delta_{k'0} \qquad (4.2.22)$$

所以 $\{g_{m,n};m\in\mathbb{N}\setminus\{0\},n\in\mathbf{Z}\}$ 构成一个正交基，只要 ϕ 为满足式(4.2.18)和式(4.2.22)的实函数。注意将式(4.2.22)对 ξ 在0和 2π 之间积分可导出式(4.2.18)，所以只需满足式(4.2.22)一个条件。这是相当容易的。举例如 $\operatorname{supp}\phi\subset[-2\pi,2\pi]$，使 $k'\neq0$ 时，式(4.2.22) 自动满足，我们只需验证 $\sum_{l\in\mathbf{Z}}\phi(\xi+2\pi l)^2=(2\pi)^{-1}$。假如取

$$\phi(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{-1/2}\sin\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{\xi}{2\pi}+1\right)\right] & -2\pi\leqslant\xi\leqslant0\\(2\pi)^{-1/2}\cos\left[\frac{\pi}{2}v\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)\right] & 0\leqslant\xi\leqslant2\pi\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

v 的表达式见式(4.2.4)，该条件满足。如果 v 属于 C^∞，则 f_m 比任意多项式倒数衰减更快，但如 Meyer 基一样，其数值衰减可能是缓慢的。如果 ϕ 为非紧支则 f_m 可获得更快的衰减。为构造这样一个满足式(4.2.22)的 ϕ，我们可再使用 Zak 变换，标准化可得

$$(Zh)(s,t)=(4\pi)^{1/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}e^{2\pi itl}h(4\pi(s-l))$$

通过这个标准化，Z 仍是 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2([0,1]^2)$ 的酉映射。不难验证式(4.2.22)等价于

$$|(Z\phi)(s,t)|^2+|(Z\phi)(s+\frac{1}{2},t)|^2=2 \qquad (4.2.23)$$

(详细细节见 Daubechies, Jaffard 和 Journe(1991))。于是有以下构造 φ 的方法

- 任取 h 满足

$$0<\alpha\leqslant|Zh(s,t)|^2+|Zh(s+\frac{1}{2},t)|^2\leqslant\beta<\infty \qquad (4.2.24)$$

- 通过下式定义 ϕ

$$Z\phi(s,t)=\sqrt{2}\frac{Zh(s,t)}{[|Zh(s,t)|^2+|Zh(s+\frac{1}{2},t)|^2]^{1/2}} \qquad (4.2.25)$$

如果 h 和 $\hat{h}$ 均呈指数衰减，则 ϕ 也呈指数衰减。图4.4显示当 h 为 Gaussian 函数时 ϕ 和 $\hat{\phi}$ 的曲线(Gaussian 函数满足式(4.2.24))。式(4.2.23)刚好等价于 $\hat{\phi}_{m,n}(x)$

$=e^{2\pi imx}\hat{\phi}(x-\frac{n}{2})$,或者,$\psi_{m,n}(\xi)=e^{\pi in\xi}\phi(\xi-m)$,$m,n\in\mathbb{Z}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$上的紧框架(具冗余度 2)的条件。式(4.2.25)的构造相当于利用$(F^*F)^{-1/2}$将一个由 h 产生的普通框架至紧框架的转换(见第 3 章后面注释,或 Daubechies、Jattard 和 Journe(1991))。Wilson 基因此可看作是对一个(紧)框架消冗的结果。

Wilson 的方案可有许多种形式。Laeng(1990)推广了以上方案使频率空间的正则性要求降低。Auscher(1990)重新总结了整个构造方案。直接从式(4.2.16)和式(4.2.17)开始,不用傅里叶变换就得到了所有结果,并构造了其他的例子。特别是,他得到了一些例子,其中式(4.2.17)意义下的"窗口"函数 ϕ 为紧支,这在实际应用中是很有用的(频域的衰减不是决定性的,只要适当)。这些例子可看作是 3.4.4 节 A 中取 $\omega_0 t_0=\pi$ 所得冗余度为 2 的紧框架经消冗后的结果。

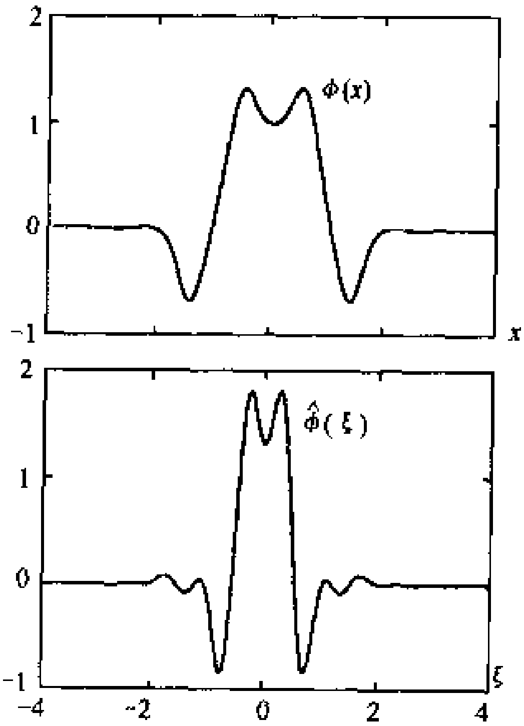


图 4.4 ϕ 函数和$\hat{\phi}$。对应式(4.2.25)及如果 $h(x)=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$ 的函数 ϕ 和$\hat{\phi}$

Malvar(1990),Coifman 和 Meyer(1990)发现了其他窗口傅里叶基(使用正弦和余弦而不是复指数函数并可获得良好的时—频局部化)。Malvar 在论文中使用正弦和余弦函数,他提出将他的构造应用于语音编码。Coifman 和 Meyer 的"局部化正弦基"将 $\mathbb{R}$ 分解成区间开始

$$\mathbb{R}=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}[a_j,a_{j+1}]$$

其中 $\alpha_j<\alpha_{j+1}$,且$\lim\limits_{j\to\pm\infty}\alpha_j=\pm\infty$。于是在 $I_j=[\alpha_j,\alpha_{j+1}]$附近建立起窗口函数 ω_j,

其覆盖了相邻区间的一部分

$$0 \leqslant \omega_j(x) \leqslant 1$$

$$\omega_j(x) = \begin{cases} 1 & \alpha_j + \varepsilon_j \leqslant x \leqslant \alpha_{j+1} - \varepsilon_{j+1} \\ 0 & x \leqslant \alpha_j - \varepsilon_j \text{ 或 } x \geqslant \alpha_{j+1} + \varepsilon_{j+1} \end{cases}$$

这里傅里叶假定对所有 j, ε_k 满足 $\alpha_j + \varepsilon_j \geqslant \alpha_{j+1} - \varepsilon_{j+1}$。而且，我们要求 ω_j 和 ω_{j-1} 在 α_j 附近互为补充：$\omega_j(x) = \omega_{j-1}(2\alpha_j - x)$ 且如果 $|x - \alpha_j| \leqslant \varepsilon_j$，则 $\omega_j^2(x) + \omega_{j-1}^2(x) = 1$（在 ω_j 光滑情况下所有这些均可达到；例如 W_j：当 $|x - \alpha_j| \leqslant \varepsilon_j$ 时，$\omega_j(x) = \sin[\frac{\pi}{2} v(\frac{x - \alpha_j + \varepsilon}{2\varepsilon_j})]$，当 $|x - \alpha_{j+1}| \leqslant \varepsilon_{j+1}$ 时，$\omega_j(x) = \cos[\frac{\pi}{2} v(\frac{x - \alpha_{j+1} + \varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_{j+1}})]$，其中 v 满足式(4.2.4)和式(4.2.5)。Coifman 和 Meyer 1990 年证明了如下的 $\{u_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 上的正交基

$$\mu_{j,k}(x) = \sqrt{2/(\alpha_{j+1} - \alpha_j\omega_j)}\,\omega_j(x)\sin[\pi(k + \frac{1}{2})(x - \alpha_j)/(\alpha_{j+1} - \alpha_j)]$$

它由频域上快速衰减的紧支函数组成。该正交基具有一个很有趣的特性。对任意 $j \in \mathbb{Z}$，如果定义 P_j 为在由 $\{u_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ 胀成的空间上的正交投射（P_j 原则上应是到 $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ 的映射），则 $P_j + P_{j+1}$ 刚好为投射算子 $\tilde{P}_j$，与 $[\alpha_j, \alpha_{j+2}]$ 相关，如果从 $\mathbb{R}$ 中删除 α_{j+1} 点即可得到它（即：如果从序列 $\tilde{\alpha}_k$ 开始，$k \leqslant j$ 时 $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k$，$k \geqslant j + 1$ 时 $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{k+1}$）。这一特性可根据应用需要而任意分割和重组区间。整个构造的详细讨论见 Auscher、Weiss 和 Wicker hanser(1992)。

因此，窗口傅里叶基数量超过了几年前的预想。然而，$p \neq 2$ 时这些基都不是 $L^p(\mathbb{R})$ 上的无条件基，这是小波基的一个优势所在。他们甚至比这些性能良好的窗口傅里叶基在更大的函数空间簇上都成为无条件基。这在第 9 章将回头讨论这点。

注：

1. Rieffel 的证明没能产生一个与所有 $g_{m,n}$ 都正交的显函数 f。这是一个留给读者的挑战，对所有 $m, n, \omega_0 t_0$ 任意但满足 $\omega_0 t_0 > 2\pi$，找一个 $f \perp g_{m,n}$ 的简单构造。

2. 对正交基证明更简单。此时不必使用 Zak 变换，引入 Zak 变换只在证明如果 Q_g、$P_g \in L^2$，则 Q_g、$P_g \in L^2$。对正交基可直接从第 5 点开始，建立 $\langle Q_g, P_g \rangle = \langle P_g, Q_g \rangle$，这不能由第 6 点建立。此即为 Battle 最初的证明(1988 年)。

3. 如果 $Y_{m,n}(x) = a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x - nb_0)$ 构成一个（紧）框架，则 $\psi_{m,n}{}^{\#}(x) = a_0^{-m/2}\psi^{\#}(a_0^{-m}x - nb'_0)$，且 $\psi^{\#}(x) = (\frac{b_o}{b_o'})^{1/2}\psi(\frac{b_o x}{b_o'})$。

4. 为说明这点，以下例子表明复指数函数 $e^{2\pi inx}$ 不构成 $L^p[(0,1)]$ 上的无条件基，只要 $p \neq 2$。可得（见 Zygund(1959)）

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1/4} e^{2\pi i n x}\right| \underset{|x|\to 0}{\sim} C|x|^{-3/4}$$

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1/4} e^{i\sqrt{n}} e^{2\pi i n x}\right| \underset{x\to 0}{\overset{\sim}{>}} C|\lg x| \underset{x\to 0}{\overset{\sim}{<}} Cx^{-2}$$

两种情况下，$x=0$为奇异点。这些函数的幂在[0, 1]之间的可积性由0附近的曲线决定。第一个函数在 L^p 中，$p<\frac{4}{3}$，第二个函数却不在，即使他们的傅里叶系数相同。这即表明函数 exp($2\pi inx$)不构成 $L^{4/3}([0,1])$上的无条件基。

区间[0,1]上的 Haar 基由$\{\phi\}\cup\{\psi_{m,n}; m,n\in\mathbf{Z}, m\leqslant 0, 0\leqslant n\leqslant 2^{|m|-1}\}$组成，其中 $\phi(x)$在[0,1]上恒等于1。该基在 $L^2[(0,1)]$上正交，并且为 $L^p[(0,1)]$上的无条件基，$1<p<\infty$。

5. 以下简略证明 $F(b)=\{\psi^b_{m,n}; m,n\in\mathbf{Z}\}$，其中 $\psi^b_{m,n}$构成$L^2(\mathbb{R})$上的 Riesz 基(即一个线性独立框架)，如式(4.1.8)中所示，只要 b 接近1。首先，仍使用式(3.3.21)、式(3.3.22)来找到一个框架界的估计。对于 $b\neq 1$，$\beta_1(2\pi(2k+1)/b)\neq 0$ 但如果 $b<2$，只有 $k=0,\pm1,\pm2$ 时有非零 β_1。在式(4.2.6)的计算中(用$(2k+1)/b$ 取代$(2k+1)$)，非零 l 的数量有限，因此表达式对 b 连续。因此式(3.3.21)、式(3.3.22)的"余项"对 b 也连续；因为如果 $b=1$，则式(3.3.21)=式(3.3.22)，所以只要 b 在1附近，有 $A>0, B<\infty$。现在证明 $\psi^b_{m,n}$是独立的。为此建立 $S(b)$运算：$S(b)f=\sum_{m,n}\langle f,\psi'_{m,n}\rangle\psi^b_{m,n}$。显然，$S(b)\psi'_{m,n}=\psi^b_{m,n}$。为证明 $\psi^b_{m,n}$的独立性，证明对于某个 $C>0$，$\|S(b)f\|\geqslant C\|f\|$ 在 $L^2(\mathbb{R})$上一致成立即足够。但

$$\|S(b)f\|^2=\|f\|^2-\sum_{\substack{m,n,m',n'\\(m,n)\neq(m',n')}}\langle f,\psi^1_{m,n}\rangle\langle\psi^b_{m,n},\psi^b_{m',n'}\rangle\langle\psi^1_{m',n'},f\rangle$$

而$|B_{jk}|=|B_{kj}|$，有

$$\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}} a_j\bar{a}_k B_{jk}\leqslant\Big[\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}}|a_j|^2|B_{jk}|\Big]^{1/2}\Big[\sum_{\substack{j,k\\j\neq k}}|a_k|^2|B_{jk}|\Big]^{1/2}\leqslant\|a\|\sup\sum_{\substack{k\\k\neq j}}|B_{jk}|$$

于是可得

$$\begin{aligned}\|S(b)f\|^2&\geqslant\|f\|^2\Big[1-\sup_{m,n}\sum_{\substack{m',n'\\(m',n')\neq(m,n)}}|\langle\psi^b_{m,n},\psi^b_{m',n'}\rangle|\Big]\\&=\|f\|^2\Big[1-\sup_{n}\sum_{\substack{m',n'\\(m',n')\neq(0,n)}}|\langle\psi^b_{0,n},\psi^b_{m',n'}\rangle|\Big]\end{aligned}\tag{4.2.26}$$

由于 $\hat{\psi}$ 的支集特性，仅 $m'=0,\pm1$ 对该数量有影响。如果 $m'=0$ 或1，对任意 n 可得到相同结果；如果 $m'=1$，该数量可能具有两种结果，则依赖于 n 为奇数还是偶数。另一方面，利用 ψ 的衰减$|\psi(x)|\leqslant C_N(1+|x|^2)^{-N}$，容易验证。当 $m'=0,\pm1$ 时，$\sum_{n'\in Z}|\psi^b_{0,n},\psi^b_{m',n'}|$收敛并且对 b 连续。于是可得式(4.2.26)右边$\|f\|^2$的系数对 b 连续；因为 $b=1$ 时它为1，而 b 在1附近则它大于0。

6. 它们满足

$$\int dx(x-2^m n)^2|\psi_{m,n}(x)|^2\leqslant 2^{2m}C$$

$$\int d\xi|\xi|^2|\hat{\psi}_{m,n}(\xi)|^2\leqslant 2^{-2m}C$$

7. 该书第一次出版后 P. Auscher 找到一个证明(书名《Iln'existe pas de bases d'ondelettes regulieres dans l'espace de ltardy $H^2(R)$》,由巴黎的 Comptes Rendus de I' Academie Scientifiqute 出版),他清楚地证明了 $\eta \in C^1$ 及 $|\eta(\xi)|+|\eta'(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-\alpha}$ 在 $\alpha>1/2$ 时不可能同时成立。

第 5 章　正交小波基与多分辨分析

在 4.2 节中，通过证明阐述了 Meyer 小波是一个正交小波基，并发现构造这样的光滑正交小波基是困难的。可幸的是，Mallat 和 Meyer 在 1986 年秋天构造了多分辨分析的公式。随着多分辨分析的出现，构造小波的困难得到了较圆满的解决。多分辨分析的公式是在实际应用中逐渐产生的，这些实际应用促进了小波理论的发展。当 Mallat 首次学习 Meyer 小波时，他正致力于图像处理的研究。当时，以不同的方式对图像进行处理并将这些处理结果进行比较的分析方法非常盛行（如 Witkin (1983)，Burt 和 Adelson (1983) 均用这种方法对图像进行处理）。在这种分析方法的发展过程中，Mallat 发现：为了对图像进行较高分辨率的处理，需要一种所谓的"增量信息"。为此，Mallat 选用正交小波基作为工具对"增量信息"进行了数学描述，这种思想最终分别由 Mallat (1989)、Meyer (1986) 发展形成了多分辨分析。

5.1　多分辨分析的基本思想

一个多分辨分析由一系列的逐次渐进空间 V_j 构成，这些闭子空间 V_j 应满足①。

$$\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \tag{5.1.1}$$

且有

$$\overline{\bigcup_{j\in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}) \tag{5.1.2}$$

$$\bigcap_{j\in \mathbf{Z}} V_j = \{0\} \tag{5.1.3}$$

如果用 P_j 表示函数在 V_j 上的正交投影算子，则由式(5.1.2)可得：$\forall f\in L^2(\mathbf{R})$ 均有 $\lim\limits_{j\to -\infty} P_j f = f$。实际上，存在许多与多分辨分析无关的阶梯型空间序列满足式(5.1.1)～式(5.1.3)。若一个空间序列 V_j 构成一个多分辨分析，则它还应满足

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot) \in V_0 \tag{5.1.4}$$

即空间序列中的每一个空间均为空间序列中心 V_0 的尺度变换。一个满足式

---

① 见本章末注 1。

(5.1.1)~式(5.1.4)的空间 V_j 的例子是

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbf{Z}: f|_{[2^jk, 2^j(k+1))} = 常数\}$$

将称之为 Haar 多分辨分析(它与一个 Haar 基相联系,见第 1 章及后面各节)。图 5.1 表示了一个函数 f 在 Haar 空间 V_0、V_{-1}上的正交投影。这个例子也表明了多分辨分析的另一重要特性:空间 V_0 在整数平移下的不变性,即

$$f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - n) \in V_0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z} \tag{5.1.5}$$

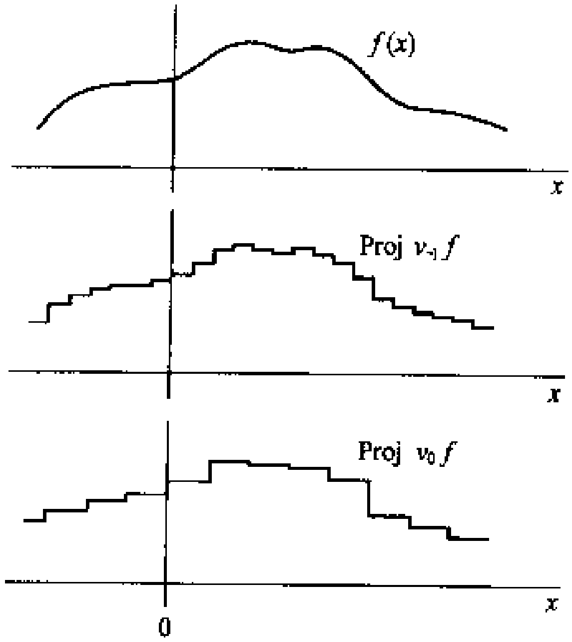


图 5.1 函数 f 及其在空间 V_{-1}和 V_0 上的投影

根据式(5.1.4),上式蕴涵:若 $f \in V_j$,则 $\forall n \in \mathbf{Z}$,有 $f(\cdot - 2^j n) \in V_j$。另外,我们常常要求存在函数 $\phi \in V_0$,使

$$\{\phi_{0,n}, n \in \mathbf{Z}\} 是 V_0 上的一个规范正交基 \tag{5.1.6}$$

其中,规定对于 $\forall j, n \in \mathbf{Z}$, $\phi_{j,n} = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - n)$。由此,式(5.1.4)和式(5.1.6)蕴涵:$\forall j \in \mathbf{Z}$, $\{\phi_{j,n}, n \in \mathbf{Z}\}$是 V_j 上的一个规范正交基。后面的分析还将发现:式(5.1.6)给出的规范正交条件还可以适当放松。对于上述 Haar 多分辨分析的例子,可选择 ϕ 为[0,1]上的特征函数或指示函数,即

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

我们通常称 ϕ 为多分辨分析的"尺度函数"①。

多分辨分析的基本思想是:当一组闭子空间 $\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 满足式(5.1.1)~式

① 见本章末注 2。

(5.1.6)时，存在一个 $L^2(\mathbb{R})$上的规范正交基$\{\psi_{j,k};j,k\in\mathbb{Z}\}$，其中 $\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j/2}-k)$。对于$\forall f\in L^2(R)$，有

$$P_{j-1}f = P_jf + \sum\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{5.1.7}$$

(P_j 为在 V_j 上的正交投影$k\in\mathbb{Z}$)。而且，小波 ψ 有显式的构造公式。

对于$\forall j\in\mathbb{Z}$，定义 W_j 为 V_j 在 V_{j-1}上的正交补，于是有

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \tag{5.1.8}$$

及

$$W_j \perp W_{j'}(j\neq j') \tag{5.1.9}$$

(事实上，假定 $j>j'$，则 $W_j\subset V_{j'}\perp W_{j'}$)。于是，当 $j<J$ 时，有

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \tag{5.1.10}$$

其中，所有这些子空间都是正交的。根据式(5.1.2)和式(5.1.3)，有

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j \tag{5.1.11}$$

上式将 $L^2(\mathbb{R})$分解为一系列相互正交的子空间 $W_j(j\in\mathbb{Z})$，而且空间 W_j 继承了 V_j 尺度特性，即

$$f\in W_j\Leftrightarrow f(2^j.)\in W_0 \tag{5.1.12}$$

式(5.1.7)可等价地表达为：对于固定的 j，$\{\psi_{j,k};k\in\mathbb{Z}\}$构成了 W_j 上的一组规范正交基。再根据式(5.1.11)和式(5.1.12)、式(5.1.13)可知：整个小波族$\{\psi_{j,k};j,k\in\mathbb{Z}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$上的一个规范正交基。

另外，$\forall j\in\mathbb{Z}$，若$\{\psi_{0,k},k\in\mathbb{Z}\}$是 W_0 上的一组规范正交基，则式(5.1.12)保证了$\{\psi_{j,k};k\in\mathbb{Z}\}$同样也是 W_j 上的一组规范正交基。因此，仅需构造 $\psi\in W_0$，并使 $\psi(\cdot-k)$为 W_0 上的一组规范正交基。

为了构造 ψ，应首先讨论 ϕ(尺度函数)和 W_0(正交补)的一些重要性质。

1. 因为 $\phi\in V_0\subset V_{-1}$，且 $\phi_{-1,n}$为 V_{-1}上的规范正交基，故有

$$\phi = \sum_n h_n\phi_{-1,n} \tag{5.1.13}$$

其中

$$h_n = \langle\phi,\phi_{-1,n}\rangle,\sum_{n\in\mathbb{Z}}|h_n|^2 = 1 \tag{5.1.14}$$

式(5.1.13)也可改写为

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2x - n) \quad (时域二尺度方程) \tag{5.1.15}$$

或

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{in\xi/2}\hat{\phi}(\xi/2) \tag{5.1.16}$$

上两式的右边求和项均在 L^2 意义下收敛。同时式(5.1.16)可改写为

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \quad (频域二尺度方程) \tag{5.1.17}$$

其中

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{in\xi} \tag{5.1.18}$$

等式(5.1.17)几乎处处(a.e.)逐点成立。如式(5.1.14)所示，m_0 是一个在 $L^2([0,2\pi])$上以 2π 为周期的函数。

2. m_0 的性质。$\phi(\cdot - k)$的规范正交性使 m_0 有一些特定的性质。事实上，$\phi(\cdot - k)$的规范正交性意味着

$$\delta_{k,0} = \int \phi(x)\overline{\phi(x-k)}dx = \int |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{ik\xi}d\xi$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{ik\xi}\sum_{l\in \mathbf{Z}}\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)^2 d\xi$$

该式蕴涵

$$\sum_l |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad (\text{a.e.}) \tag{5.1.19}$$

将式(5.1.17)代入上式，并令 $\xi = \xi/2$，可得

$$\sum_l |m_0(\xi + \pi l)|^2 |\hat{\phi}(\xi + \pi l)|^2 = (2\pi)^{-1}$$

将上式按 l 为奇数和偶数展开，并利用 m_0 的周期性和式(5.1.19)即得

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (\text{a.e.}) \tag{5.1.20}$$

3. 空间 W_0 的特征：$f\in W_0$ 等价 $f\in V_{-1}$和 $f\perp V_0$，由 $f\in V_{-1}$有

$$f = \sum_n f_n \phi_{-1,n}$$

其中 $f_n = \langle f, \phi_{-1,n}\rangle$。上式蕴涵

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n f_n e^{-in\xi/2}\hat{\phi}(\xi/2) = m_f(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \tag{5.1.21}$$

并有

$$m_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n f_n e^{-in\xi} \tag{5.1.22}$$

在上式中，m_f 是$L^2([0,2\pi])$中的以 2π 为周期的函数，且式(5.1.22)中的和式几乎处处逐点收敛。另外，约束条件 $f\perp V_0$ 蕴涵：对任意 k 均有$f\perp \phi_{0,k}$，即

$$\int \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{\phi}(\xi)}\mathrm{e}^{ik\xi}\mathrm{d}\xi = 0$$

或

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ik\xi}\sum_l \hat{f}(\xi+2\pi l)\,\overline{\hat{\phi}(\xi+2\pi l)} = 0$$

因而有

$$\sum_l \hat{f}(\xi+2\pi l)\,\overline{\hat{\phi}(\xi+2\pi l)} = 0 \tag{5.1.23}$$

上式中的级数在 $L^1([-\pi,\pi])$上绝对收敛。将式(5.1.17)和式(5.1.21)代入式(5.1.23),并按 l 为奇数和偶数分开(因为级数绝对收敛,所以这种交换和分开是允许的),再利用式(5.1.19)可得

$$m_f(\zeta)\,\overline{m_0(\zeta)} + m_f(\zeta+\pi)\,\overline{m_0(\zeta+\pi)} = 1 \qquad (\text{a.e.}) \tag{5.1.24}$$

因为$\overline{m_0(\zeta)}$和$\overline{m_0(\zeta+\pi)}$不能在非零测度上同时为零(见式(5.1.20)),故存在一个 2π 周期函数 $\lambda(\zeta)$满足

$$m_f(\zeta) = \lambda(\zeta)\,\overline{m_0(\zeta+\pi)} \qquad (\text{a.e.}) \tag{5.1.25}$$

以及

$$\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta+\pi) = 0 \qquad (\text{a.e.}) \tag{5.1.26}$$

求解该方程可得

$$\lambda(\zeta) = \mathrm{e}^{i\zeta}\nu(2\zeta) \tag{5.1.27}$$

其中,ν 以 2π 为周期。若在式(5.1.21)中代入式(5.1.27)和式(5.1.25)则得

$$\hat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\nu(\xi)\hat{\phi}(\xi/2) \tag{5.1.28}$$

4. 根据函数 $f\in W_0$ 的傅里叶变换一般表达式(5.1.28),可选择

$$\hat{\psi}(\xi) = \mathrm{e}^{i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\hat{\phi}(\xi/2) \tag{5.1.29}$$

作为一种小波。若暂不考虑收敛问题,则式(5.1.28)可改写为

$$\hat{f}(\xi) = \Big(\sum_k \nu_k \mathrm{e}^{ik\xi}\Big)\hat{\psi}(\xi)$$

或

$$f = \sum_k \nu_k \psi(\cdot - k)$$

于是,$\psi(\cdot-n)$可作为 W_0 上较理想的一种基函数。当然,还需进一步证明 $\psi_{0,k}$是 W_0 上的规范正交基。首先,根据以上的分析,m_0 和 $\hat{\psi}$ 的性质保证了式(5.1.29)所定义的是一个 $L^2(\mathbb{R})$上的函数 ψ,且有 $\psi\in V_{-1}$,$\psi\perp V_0$,因此 $\psi\in W_0$。另外,$\psi_{0,k}$的正交性是容易证明的

$$\int \psi(x)\overline{\psi(x-k)}\,\mathrm{d}x = \int |\hat{\psi}(\xi)|^2 \mathrm{e}^{ik\xi}\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ik\xi} \sum_l |\hat{\psi}(\xi+2\pi l)|^2 \mathrm{d}\xi$$

其中

$$\sum_l |\hat{\psi}(\xi+2\pi l)|^2$$
$$= \sum_l |m_0(\xi/2+\pi l+\pi)|^2 |\hat{\phi}(\xi/2+\pi l)|^2$$
$$= |m_0(\xi/2+\pi)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\xi/2+2\pi n)|^2$$
$$+ |m_0(\xi/2)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\xi/2+\pi+2\pi n)|^2$$
$$= (2\pi)^{-1}[|m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2+\pi)|^2] \quad (\text{a.e.}) \quad (由式(5.1.19))$$
$$= (2\pi)^{-1} \quad (\text{a.e.}) \quad (由式(5.1.20))$$

故有$\int \psi(x)\overline{\psi(x-k)}\mathrm{d}x = \delta_{k,0}$。为了验证 $\psi_{0,k}$确实为 W_0 上的规范正交基，仅需验证：对于任意给定的 $f\in W_0$，均可表示为

$$f = \sum_n \gamma_n \psi_{0,k}$$

式中，$\sum_n |\gamma_n|^2 < \infty$。或将上式表示为

$$\hat{f}(\xi) = \gamma(\xi)\hat{\psi}(\xi) \tag{5.1.30}$$

其中，$\gamma\in L([0,2\pi])$，并以 2π 为周期。由式(5.1.28)有 $\hat{f}(\xi)=\nu(\xi)\hat{\psi}(\xi)$，且满足 $\int_0^{2\pi}|\nu(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = 2\int_0^{\pi}|\lambda(\zeta)|^2\mathrm{d}\zeta$。再由式(5.1.22)可得

$$\int_0^{2\pi} |m_f(\zeta)|^2 \mathrm{d}\xi = \pi \sum_n |f_n|^2 = \pi \|f\|^2 < \infty$$

另一方面，根据式(5.1.25)有

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\xi\, |m_f(\xi)|^2$$
$$= \int_0^{2\pi} |\lambda(\xi)|^2 |m_0(\xi+\pi)|^2 \mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^{\pi} |\lambda(\xi)|^2 [|m_0(\xi+\pi)|^2 + |m_0(\xi)|^2]\mathrm{d}\xi \quad (用式(5.1.26))$$
$$= \int_0^{\pi} \lambda(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \quad (用式(5.1.20))$$

因此，$\int_0^{2\pi}|\nu(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = 2\pi\|f\|^2 < \infty$，而且 f 可由以 2π 为周期的平方可积函数 γ 表示成式(5.1.30)的形式。

上面的分析实际上已经证明了下述定理的正确性。

定理 5.1.1 如果在 $L^2(\mathbb{R})$上存在一组阶梯型闭子空间$\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$满足式(5.1.1)～式(5.1.6)的条件，则在 $L^2(\mathbb{R})$上存在一个伴随的正交小波基$\{\psi_{j,k};j,k\in\mathbb{Z}\}$满足

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot\,,\psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} \tag{5.1.31}$$

其中，小波 ψ 的一种可能的构造为

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\hat{\phi}(\xi/2)$$

(m_0 由式(5.1.18)和式(5.1.14)定义)，或等价地表示为

$$\psi = \sum_n (-1)^{n-1} h_{-n-1}\phi_{-1,n}$$

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^{n-1} h_{-n-1}\phi(2x-n) \tag{5.1.32}$$

(最后的级数在 L^2 收敛)。

值得注意的是：ψ 并非由式(5.1.31)的条件和多分辨分析惟一确定。若 ψ 满足式(5.1.31)，则任意 $\psi^{\#}$ 可表示为

$$\hat{\psi}^{\#}(\xi) = \rho(\xi)\hat{\psi}(\xi) \tag{5.1.33}$$

其中 ρ 以 2π 为周期，且$|\rho(\xi)|=1$ (a.e.)[①②]。特别地，可选择 $\rho(\xi)=\rho_0 e^{im\rho}$，其中 $m\in\mathbb{Z}$，$|\rho_0|=1$。不同的 m、$\rho(\xi)$对应于 ψ 的一个相位移。利用这个相位移的自由度，可重新定义 ψ 来替代式(5.1.32)所定义的 ψ

$$\psi = \sum_n g_n\phi_{-1,n} \quad g_n = (-1)^n h_{-n+1} \tag{5.1.34}$$

选择适当的 $N\in\mathbb{Z}$，有

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1+2N} \tag{5.1.35}$$

当然，只要满足式(5.1.34)和式(5.1.35)，我们还可在式(5.1.33)中选择更一般意义上的 ρ。[③]

到目前为止，每一种特定意义下的正交小波基均由一个对应的多分辨分析生成。我们也可能找到一种“病态”的小波 ψ，这种小波虽不能由多分辨分析导出，但 $\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j/2}-k)$却构成 $L^2(\mathbb{R})$上的一个规范正交基。下面举例说明这种不能由多分辨分析生成的小波，它起源于 Mallat(1989)，由 J. L. Journe 提出，首先定义小波函数

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} & 4\pi/7 \leqslant |\xi| \leqslant \pi \quad \text{或}\ 4\pi \leqslant |\xi| \leqslant 32\pi/7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.1.36}$$

明显地，$\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| = 1$，且有 $2\pi\sum_j |\hat{\psi}(2^j,\xi)|^2 = 1$(a.e.)。由 Tchamitchian

① 见本章末注 3。

② a.e. = “几乎处处”意思的缩写。

③ 见本章末注 4。

判据式(3.3.21)和式(3.3.22))可知,如果满足

$$\sum_{l=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^l\xi)\overline{\hat{\psi}(2^l(\xi+2\pi(2k+1)))}=0 \qquad (\text{a.e.}) \qquad (5.1.37)$$

则 $\psi_{j,k}$形成框架常数为 1(即 $A=B=1$)的紧框架。

容易验证:$\text{Supp}\hat{\psi}\cap[\text{supp}\hat{\psi}+(2k+1)2\pi 2^l]$对于任意 $l\geqslant 0,k\in\mathbf{Z}$,均有零测度,故式(5.1.37)成立。根据定理 3.2.1 可知:$\psi_{j,k}$构成$L^2(\mathbb{R})$上的规范正交基。

假定 ψ 可由多分辨分析生成,则式(5.1.37)和式(5.1.17)将始终包含对应的尺度函数 ϕ(在 $\hat{\psi}$ 的表达式中还可能包含附加因子$\rho(\xi)$,$|\rho(\xi)|=1$ (a.e.))。由式(5.1.20)可得

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2+|\hat{\psi}(\xi)|^2=|\hat{\phi}(\xi/2)|^2 \qquad (\text{a.e.}) \qquad (5.1.38)$$

上式蕴涵:对任意 $\xi\neq 0$,有

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2=\sum_{j=1}^{\infty}|\hat{\psi}(2^j\xi)|^2$$

于是 $\text{Supp}\hat{\phi}(\xi)=\text{Supp}\hat{\psi}(2^j\xi)$,不难验证

$$|\hat{\phi}(\xi)|=\begin{cases}(2\pi)^{-1/2} & 0\leqslant|\xi|\leqslant 4\pi/7\\ & \pi\leqslant|\xi|\leqslant 8\pi/7\\ & 2\pi\leqslant|\xi|\leqslant 16\pi/7\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

若存在一个以 2π 为周期的函数 m_0,使式(5.1.17)包含上述尺度函数 $\hat{\phi}$,则当 $0\leqslant|\xi|\leqslant 4\pi/7$ 时,有$|m_0(\xi)|=1$。再由 m_0 的周期性可知:当 $2\pi\leqslant|\xi|\leqslant 18\pi/7$ 时,也有$|m_0(\xi)|=1$。因此,当 $2\pi\leqslant|\xi|\leqslant 16\pi/7$ 时,有$|m_0(\xi)\|\hat{\phi}(\xi)|=(2\pi)^{-1/2}$。这显然与$|\hat{\phi}(2\xi)|$在对应区间上等于零相矛盾。这样一个矛盾的结论表明:"小波函数 $\hat{\psi}(\xi)$可以由多分辨分析"的假设是不成立的。特别指出,本例的小波 ψ 衰减特性非常差。能否通过使 $\hat{\psi}(\xi)$光滑化(即改善 ψ 的衰减特性①)来消除这种"病态"(使小波能由多分辨分析生成),仍是一个尚未解决的公开问题。

为了后面讨论方便起见,就 h_n 而言,可将式(5.1.20)改写为

$$\sum_n \overline{h_n h_{n+2k}}=\delta_{k,0} \qquad (5.1.39)$$

式(5.1.39)可由$|m_0(\zeta)|^2+|m_0(\zeta+\pi)|^2=1$ 的傅里叶级数展开式直接得到。

---

① 见本章末注 5。

5.2 举　例

例 1:Haar 小波基的多分辨分析生成。

根据式(5.1.39)的构造方法,对于 Haar 多分辨分析,其 Haar 小波的构造过程如下:

- 给出尺度函数:

$$\phi = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

- 计算 h_n:

$$h_n = \sqrt{2}\int \phi(x)\,\overline{\phi(2x-n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & n = 0,1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

- 构造小波 ψ:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1} = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

这就是所构造 Haar 的小波基,但不足为奇,因为早在 1.6 节中就发现这种小波基与 Haar 多分辨分析相联系。

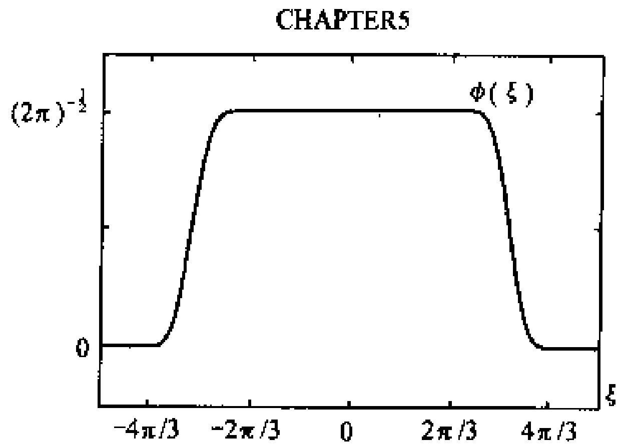


图 5.2　Meyer 多分辨分析的尺度函数波形

例 2:Meyer 小波的多分辨分析生成。

首先定义尺度函数

$$\hat{\phi}(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{-1/2} & |\xi|\leqslant 2\pi/3\\ (2\pi)^{-1/2}\cos[\frac{\pi}{2}\nu(\frac{3}{4\pi}|\xi|-1)] & 2\pi/3\leqslant|\xi|\leqslant 4\pi/3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

这里 ν 是一个满足式(4.2.4)和式(4.2.5)的光滑函数，$\hat{\phi}$ 的波形如图 5.2 所示。由式(4.2.5)不难得 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2=(2\pi)^{-1}$，该式与 $\phi(\cdot-k)$ 的规范正交性是等价的。定义 V_0 为由规范正交系 $\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\}$ 所展成的闭子空间。同理，可定义 V_j 为由规范正交系 $\{\phi_{j,k}k\in\mathbf{Z}\}$ 所展成的闭子空间，并验证当且仅当 $\phi\in V_{-1}$时，即当且仅当存在一个在$[0,2\pi]$上平方可积，并以 2π 为周期的函数 m_0，使二尺度方程

$$\hat{\phi}(\xi)=m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$$

成立时，空间序列 $\{V_j j\in\mathbf{Z}\}$ 构成一个多分辨分析。

为此，应首先构造 m_0，并验证二尺度方程成立。本例可用来 $\hat{\phi}$ 构造 m_0，即 $m_0(\xi)=\sqrt{2\pi}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\hat{\phi}(2(\xi+2\pi l))$。显然，$m_0(\xi)\in L^2([0,2\pi])$，且以 2π 为周期，并满足

$$\begin{aligned}m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)&=\sqrt{2\pi}\sum_{l\in Z}\hat{\phi}(\xi+4\pi l\ )\hat{\phi}(\xi/2)\\&=\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(\xi)\hat{\phi}(\xi/2)\\&\quad(\text{因为当 } l\neq 0 \text{ 时}，[\text{supp}\hat{\phi}(\cdot/2)] \text{ 与}\\&\quad[\text{supp}\hat{\phi}(\cdot+4\pi l)] \text{ 不相交})\\&=\hat{\phi}(\xi)\\&\quad(\text{因为当 } \xi\in\text{Supp}\hat{\phi} \text{ 时}，\sqrt{2\pi}\hat{\phi}(\xi/2)=1)\end{aligned}$$

即二尺度方程是成立的。于是，V_j 满足式(5.1.1)。另外，读者可自行验证 V_j 同样分别满足式(5.1.2)、式(5.1.3)、式(5.1.4)和式(5.1.5)。

下面的任务是利用式(5.1.29)的方法构造小波 ψ

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi)&=e^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\hat{\phi}(\xi/2)\\&=\sqrt{2\pi}e^{i\xi/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\hat{\phi}(\xi+2\pi(2l+1))\hat{\phi}(\xi/2)\\&=\sqrt{2\pi}e^{i\xi/2}[\hat{\phi}(\xi+2\pi)+\hat{\phi}(\xi-2\pi)]\hat{\phi}(\xi/2)\end{aligned}$$

（因为当 $l\neq 0,-1$ 时，两个乘积因子的紧支不相交）

容易验证(见图 5.3)：上式与式(4.2.3)是等价的。值得一提的是，相位因子 $e^{i\xi/2}$

在4.2节中是为了构造正交小波、消除冗余度而引入的,在这里却是在5.1节中所介绍的一般多分辨分析的自然结果。

在讨论小波构造的其他例子之前,需对式(5.1.6)给出的条件进行适当放宽。

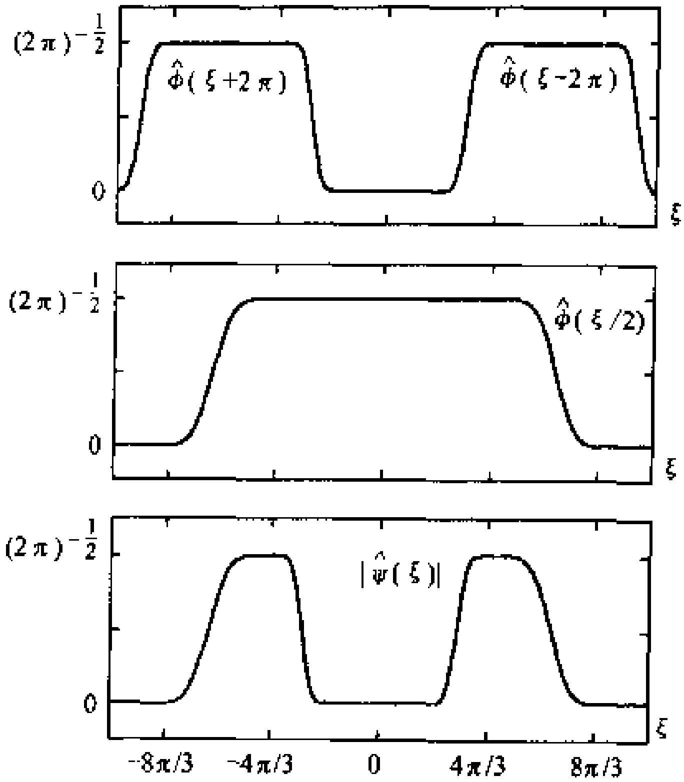


图5.3 Meyer多分辨分析中的$\hat{\phi}(\xi+2\pi)+\hat{\phi}(\xi-2\pi)$及$\hat{\phi}(\xi/2)$的图形;它们的积即为$|\hat{\psi}(\xi)|$(也可见图4.2)

5.3 放宽尺度函数的正交条件

5.3.1 尺度函数的Riesz基

式(5.1.6)给出的$\phi(\cdot-k)$的正交条件是可以适当放宽的,即:仅要求$\phi(\cdot-k)$构成一个Riesz基。下面将讨论如何由V_0的Riesz一个基$\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\}$为$V_0$构造一个规范正交基。首先定义:$\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\}$是$V_0$上的一个Riesz基,当且仅当$\{\phi(\cdot-k),k\in\mathbf{Z}\}$展成$V_0$,而且对于任意的$(C_k)_{k\in Z}\in l^2(\mathbf{Z})$均有

$$A\sum_k|C_k|^2\leqslant\|\sum_k C_k\phi(\cdot-k)\|^2\leqslant B\sum_k|C_k|^2 \qquad (5.3.1)$$

其中$A>0,B<\infty$,A、B与C_n无关(见预备知识)。

因为

$$\|\sum_k C_k\phi(\cdot-k)\|^2=\int|\sum_k C_k e^{-ik\xi}\hat{\phi}(\xi)|^2\,d\xi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_k C_k e^{-ik\xi} \right|^2 \sum_{l\in\mathbf{Z}} | \hat{\phi}(\xi + 2\pi l) |^2 d\xi$$

以及

$$\sum_k | C_k |^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left| \sum_k C_k e^{-ik\xi} \right|^2 d\xi$$

故式(5.3.1)可等价为

$$0 < (2\pi)^{-1} A \leqslant \sum_l | \hat{\phi}(\xi + 2\pi l) |^2 \leqslant (2\pi)^{-1} B < \infty \quad (\text{a.e.}) \tag{5.3.2}$$

于是可由下式定义 $\phi^{\#} \in L^2(\mathbf{R})$

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \left[\sum_l | \hat{\phi}(\xi + 2\pi l) |^2 \right]^{-1/2} \hat{\phi}(\xi) \tag{5.3.3}$$

明显地，$\sum_l | \hat{\phi}^{\#}(\xi + 2\pi l) |^2 = (2\pi)^{-1}(\text{a.e.})$。这表明 $\hat{\phi}^{\#}(\cdot - k)$是 $V_0^{\#}$ 上的规范正交基。另一方面，空间 $V_0^{\#}$ 可由 $\hat{\phi}^{\#}(\cdot - k)$展成，即

$$V_0^{\#} = \{ f; f = \sum_n f_n^{\#} \hat{\phi}^{\#}(\cdot - n), (f_n^{\#})_{n\in Z} \in l^2(\mathbf{Z}) \}$$

$$= \{ f; \hat{f} = \nu \hat{\phi}^{\#}, \nu \in L^2([0,2\pi]) \text{ 且以 } 2\pi \text{ 为周期} \}$$

$$= \{ f; \hat{f} = \nu_1 \hat{\phi}^{\#}, \nu_1 \in L^2([0,2\pi]) \text{ 且以 } 2\pi \text{ 为周期} \}$$

（根据式(5.3.2)和式(5.3.3)）

$$= \{ f; f = \sum_n f_n \hat{\phi}(\cdot - n), (fn)_{n\in\mathbf{Z}} \in L^2(\mathbf{Z}) \}$$

$$= V_0 \quad (\text{因为 } \phi(\cdot\, n) \text{ 为 } V_0 \text{ 的 Riesz 基})$$

5.3.2 由尺度函数构造多分辨分析

在5.1节中已经阐明：一个多分辨分析有满足式(5.1.1)～式(5.1.6)所给条件的一组阶梯型空间组$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$和一个特定函数 $\phi \in V_0$ 构成(其中式(5.1.6)的条件可以适当放宽，见5.3.1节)。于是，可从选择适当的尺度函数 ϕ 开始来构造一个多分辨分析。有了定义的尺度函数 ϕ，可通过 $\phi(\cdot - k)$构造 V_0，再经尺度变换可生成空间$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$。这种方法可由许多例子来加以说明。

一般地，可选择 ϕ，使其满足

$$\phi(x) = \sum_n C_n \phi(2x - n) \tag{5.3.4}$$

其中，$\sum_n | C_n |^2 < \infty$。且有

$$0 < \alpha \leqslant \sum_{l\in\mathbf{Z}} \hat{\phi}(\xi + 2\pi l) |^2 \leqslant \beta \quad (\text{a.e.}) \tag{5.3.5}$$

于是，V_j 可定义为由 $\phi_{j,k}(k\in\mathbf{Z})(\phi_{j,k} = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k))$所展成的闭子空间。

式(5.3.4)和式(5.3.5)是$\{\phi_{j,k};(k\in\mathbf{Z})\}$为 $V_j(j\in\mathbf{Z},j$ 固定)上 Riesz 基的充要条件，而且 V_j 满足式(5.1.1)给出的空间阶梯特性，即 V_j 也同时满足式(5.1.1)、式(5.1.4)、式(5.1.5)和式(5.1.6)。为了说明$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$构成一个多分辨分析，还需验证 V_j 满足式(5.1.2)和式(5.1.3)给出的条件。为此，给出下面两个定理。

定理 5.3.1 若 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$满足式(5.3.5)，并定义 $V_j=\mathrm{Span}\{\phi_{j,k},k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$

证明：

1. 由式(5.3.5)可知，$\phi_{0,k}$构成 V_0 上的一个 Riesz 基。特别地，$\phi_{0,k}$构成 V_0 上的一个框架，即存在 $A>0,B<\infty$，对任意给定的 $f\in V_0$ 有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\phi_{0,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2 \tag{5.3.6}$$

又因 V_j 和$\phi_{j,k}$分别为V_0 和 $\phi_{0,k}$在单式映射$(D_jf)(x)=2^{-j/2}f(2^{-j}x)$下的像，所以，对任意 $f\in V_j$ 有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in Z}|\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2 \tag{5.3.7}$$

其中 $A>0,B<\infty$，与式(5.3.6)中相同。

2. 设函数 $f\in\bigcap_{j\in Z}V_j$，并选择 $\epsilon>0$ 任意小，则存在一个具有紧支且连续的函数 $\tilde f$ 满足 $\|f-\tilde f\|_{L^2}\leqslant\epsilon$。若用 $P_j\tilde f$ 表示$\tilde f$ 在 V_j 上的正交投影，则

$$\|f-P_j\tilde f\|=\|P_j(f-\tilde f)\|\leqslant\|(f-\tilde f)\|\leqslant\epsilon$$

于是，$\forall j\in\mathbf{Z}$，有

$$\|f\|\leqslant\epsilon+\|P_j\tilde f\|_{L^2} \tag{5.3.8}$$

3. $\|P_j\tilde f\|\leqslant A^{-1/2}[\sum_{k\in Z}|\langle\tilde f,\phi_{j,k}\rangle|^2]^{\frac12}$。且

$$\sum_k|\langle\tilde f,\phi_{j,k}\rangle|^2\leqslant2^{-j}\sum_k[\int_{|x|\leqslant R}\mathrm{d}x\,|\tilde f(x)|\,|\phi(2^{-j}x-k)|]^2$$

(这里选择适当的 $R>0$，使区间$[-R,+R]$包含$\tilde f$ 的紧支)

$$\leqslant2^{-j}\|\tilde f\|^2_{L^\infty}\sum_k(\int_{|x|\leqslant R}\mathrm{d}x\,|\phi(2^{-j}x-k)|)^2$$

$$\leqslant2^{-j}\|\tilde f\|^2_{L^\infty}2R\sum_k\int_{|x|\leqslant R}\mathrm{d}x\,|\phi(2^{-j}x-k)|^2$$

$$=\|\tilde f\|^2_{L^\infty}2R\int_{S_{R,j}}\mathrm{d}y\,|\phi(y)|^2 \tag{5.3.9}$$

在上式中，$S_{R,j}=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}[k-2^{-j}R,k+2^{-j}R]$，这里可假定 j 足够大使 $2^{-j}R\leqslant\frac12$。

4. 式(5.3.9)可改写为

$$\sum_k|\langle\tilde f,\phi_{j,k}\rangle|^2\leqslant2R\|\tilde f\|^2_{L^\infty}\int_R\chi_j(y)\,|\phi(y)|^2\mathrm{d}y \tag{5.3.10}$$

其中，χ_j 为区间$S_{R,j}$上的特征函数或指示函数，即有

$$\chi_j(y)=\begin{cases}1 & y\in S_{R,j}\\ 0 & y\notin S_{R,j}\end{cases}$$

对于 $y\notin \mathbf{Z}$，显然有：当 $j\to\infty$时，$\chi_j(y)\to 0$。于是由控制收敛定理可得：当 $j\to\infty$时，式(5.3.10)趋于零。特别地，一定存在 $j\in\mathbf{Z}$，使式(5.3.9)$\leqslant\varepsilon^2 A$，即 $\|P_j\tilde{f}\|\leqslant\varepsilon$。将其代入式(5.3.8)即得 $\|f\|\leqslant 2\varepsilon$。又因为 $\varepsilon>0$ 无限小，故 $f=0$。 ■

这就证明了$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$满足式(5.1.3)。为了证明它同样满足式(5.1.2)，还需对尺度函数附加两个条件，即：$\hat{\phi}$ 是有界的且 $\int\phi(x)\,dx\neq 0$。

定理 5.3.2 假定 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$满足式(5.1.3)，且 $\hat{\phi}(\xi)$对所有的 ξ 均有界，$\hat{\phi}(\xi)$在 $\xi=0$ 附近连续且 $\hat{\phi}(0)\neq 0$，V_j 的定义如前所述，则$\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(\mathbb{R})$。

证明：

1. 由于将再次利用式(5.3.7)，故重写如下

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2\leqslant B\|f\|^2$$

其中，$A>0,B<\infty$，且均与 j 无关。

2. 取函数 $f\in(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V)_j^{\perp}$(正交补)，选择 $\varepsilon>0$ 为任意小，则存在一个具有紧支集的函数 $\tilde{f}\in C^\infty$满足 $\|f-\tilde{f}\|_{L^2}\leqslant\varepsilon$。因此，对于任意的 $J=-j\in\mathbf{Z}$ 均有

$$\begin{aligned}\|P_{-J}\tilde{f}\|&=\|P_j\tilde{f}\|=\|P_j(\tilde{f}-f)\|\quad(\text{因为 }P_jf=0)\\&\leqslant\varepsilon\end{aligned}\tag{5.3.11}$$

另一方面，由式(5.3.7)可得

$$\|P_{-J}\tilde{f}\|^2\geqslant B^{-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle\tilde{f},\phi_{-J,k}\rangle|^2\tag{5.3.12}$$

3. 利用标准技巧(见第 3 章)可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle\tilde{f},\phi_{-J,k}\rangle|^2\\&=2\pi\int|\hat{\phi}(2^{-J}\xi)|^2|\hat{\tilde{f}}(\xi)|^2d\xi+R\end{aligned}\tag{5.3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}|R|&\leqslant 2\pi\sum_{l\neq 0}\int d\xi\,|\hat{\tilde{f}}(\xi)\|\hat{\tilde{f}}(\xi+2^J2\pi l)\|\hat{\phi}(2^{-J}\xi)\|\hat{\phi}(2^{-J}\xi+2\pi l)|\\&\leqslant\|\hat{\phi}\|_{L_\infty}^2\sum_{l\neq 0}\int d\xi\,|\hat{\tilde{f}}(\xi)\|\hat{\tilde{f}}(\xi+2^J2\pi l)|\end{aligned}$$

由于 $\tilde{f}\in C^\infty$，可找到常数 C 满足

$$|\hat{\tilde{f}}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|^2)^{-3/2}\tag{5.3.14}$$

于是有

$$|R|\leqslant C^2\|\hat{\phi}\|_{L_\infty}^2\sum_{l\neq 0}\int d\xi(1+|\xi+2^J\pi l|^2)^{-3/2}(1+|\xi-2^J\pi l|^2)^{-3/2}$$

$$\leqslant C' \| \hat{\phi} \|_{L^\infty}^2 \sum_{l \neq 0} (1 + \pi^2 l^2 2^{2J})^{-1/2} \int d\zeta (1 + |\zeta|^2)^{-1}$$

（两次利用：$\sup(1+y^2)[1+(x-y)^2]^{-1}[1+(x+y)^2]^{-1} < \infty$）

$$\leqslant C'' 2^{-J} \tag{5.3.15}$$

4. 由式(5.3.12)、式(5.3.13)、式(5.3.14)和式(5.3.15)联合可得

$$2\pi \int d\xi \, | \hat{\phi}(2^{-J}\xi) |^2 \, | \hat{\tilde{f}}(\xi) |^2 \leqslant B\epsilon^2 + C'' 2^{-J} \tag{5.3.16}$$

因为 $\hat{\phi}(\xi)$一致有界，也在 $\xi=0$ 处连续，所以式(5.3.16)的左端项当 $J\to\infty$时收敛于 $2\pi|\hat{\phi}(0)|^2 \|\tilde{f}\|_{L^2}^2$（根据控制收敛定理）。于是有

$$\| \tilde{f} \|_{L^2}^2 \leqslant | \hat{\phi}(0) |^{-1} C\epsilon \tag{5.3.17}$$

其中 C 与 ϵ 无关。又因为 $\| f - \tilde{f} \|_{L^2} \leqslant \epsilon$，由式(5.3.17)可得

$$\| f \|_{L^2} \leqslant \epsilon + \| \tilde{f} \|_{L^2} \leqslant (1 + C \, | \hat{\phi}(0) |^{-1}) \epsilon$$

由于 ϵ 为无穷小的常数，所以 $f=0$。 ■

注意：

1. 若对尺度函数 ϕ 加上稍强的条件，则定理 5.3.1 和定理 5.3.2 的证明将更简单。例如：Micchelli(1990)证明了与定理 5.3.1 和定理 5.3.2 相同的结论。其证明条件是：ϕ 连续且满足 $|\phi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$；$\sum_{l\in \mathbf{Z}} \phi(x-l) = 常数 \neq 0$，它们蕴涵 $\phi \in L^1$ 以及 $\int \phi(x) dx \neq 0$。

2. 定理 5.3.2 中“$\hat{\phi}(\xi)$在 $\xi=0$ 处连续”的条件不是必需的。例如在下面的多分辨分析的例子中，尺度函数不要求是绝对可积的。设 V_j^M，ϕ^M，ψ^M 分别是多分辨空间，尺度函数和 Meyer 小波基组成的小波，且有 $\nu \in C^\infty$(见 5.2 节)。又设 H 为 Hilbert 变换，即

$$(Hf)^\wedge(\xi) = \begin{cases} \hat{f}(\xi) & \xi \geqslant 0 \\ -\hat{f}(\xi) & \xi < 0 \end{cases}$$

并定义 $V_j = HV_j^M$，$\phi = H\phi^M$。由于 Hilbert 变换为单式变换且对于尺度变化和对 x 的平移可交换，所以 V_j 仍构成一个多分辨分析，$\phi_{0,k}$为 V_0 上的规范正交基。然而 $\hat{\phi}(\xi)$在 $\xi=0$ 处并不连续。又因为 $0 \notin \mathrm{Supp}(\hat{\psi}^M)$，$\psi = (H\psi^M)^\wedge$是$C^\infty$且具有紧支的函数，所以 ψ 本身是C^∞的且有快的衰减。因此 ψ 是一个具有良好衰减特性的光滑小波，并与一个由衰减特性较差的尺度函数 ϕ① 所生成的多分辨分析相联系。需要注意的是：ϕ^M 和 ϕ 均满足二尺度方程(式(5.1.17))，且包含相同的因子 m_0；式(5.3.4)中的 c_n(对应 m_0)并不惟一确定 ϕ，而且 c_n 在$|n|\to\infty$的衰减特性并不

---

① 见本章末注 6。

能说明 ϕ 有衰减特性①。

3.以下的讨论将表明:在定理 5.3.2 中,若 $\hat{\phi}$ 有界且在 $\xi=0$ 处连续,则条件 $\hat{\phi}(0)\neq 0$ 是必需的。设 $f\in L^2(\mathbb{R})$, $f\neq 0$, 且 $\mathrm{Supp}\hat{f}\subset[-R,+R]$, $R<+\infty$。若 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L^2(\mathbb{R})$,则 $f=\lim\limits_{J\to\infty}P_{-J}f$。然而,正如在式(5.3.13)中一样,有

$$\|P_{-J}f\|^2\leqslant A^{-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\phi_{-J,k}\rangle|^2$$

$$\leqslant A^{-1}[2\pi\int\|\hat{\phi}(2^{-J}\xi)\|^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi+R]$$

因为 $\hat{\phi}$ 连续,故由控制收敛定理可知:上式中的第一项当 $J\to 0$ 时趋于 $A^{-1}2\pi|\hat{\phi}(0)|^2\|f\|^2$;而第二项有式(5.3.15)的界,因此第二项在 $J\to\infty$ 时趋于零。于是有

$$\|f\|^2=\lim_{J\to\infty}\|P_{-J}f\|^2\leqslant 2\pi A^{-1}|\hat{\phi}(0)|^2\|f\|^2$$

若 $\|f\|\neq 0$,则上式蕴涵:$\hat{\phi}(0)\neq 0$。

4.定理 5.3.2 证明过程中的第 3、4 步同样可用于证明 $|\hat{\phi}(0)|^2\leqslant B/2\pi$。事实上

$$B\|f\|^2\geqslant B\|P_{-J}f\|^2\geqslant\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\langle f,\phi_{-J,k}\rangle|^2$$

$$=2\pi\int|\hat{\phi}(2^{-J}\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi+R$$

这里 $|R|$ 对 f 以 $C2^{-J}$ 为界,而第一项趋于 $2\pi|\hat{\phi}(0)|^2\|f\|^2$。再根据注意 3 有 $A/2\pi\leqslant|\hat{\phi}(0)|^2\leqslant B/2\pi$。特别地,若 $\phi_{0,k}$ 正交,则 $A=B$,于是 $|\hat{\phi}(0)|^2=(2\pi)^{-1/2}$。

5.条件 $\hat{\phi}\in L^\infty$ 和 $\hat{\phi}(0)\neq 0$($\hat{\phi}$ 在 $\xi=0$ 处连续)蕴涵着对 c_n 的限制。因为式(5.3.4)可改写为(频域二尺度方程)

$$\hat{\phi}(\xi)=m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)\tag{5.3.18}$$

其中,$m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum_n c_n e^{in\xi}$。特别地,$\hat{\phi}(0)=m_0(0)\hat{\phi}(0)$,即 $m_0(0)=1$(由 $\hat{\phi}(0)\neq 0$),于是有

$$\sum_n c_n=2\tag{5.3.19}$$

而且,式(5.3.18)同样蕴涵。除了 $\hat{\phi}(\xi)$ 的零点附近外,m_0 连续。特别地,m_0 在 $\xi=0$处连续。另外,若进一步有 $|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-1/2-\epsilon}$,则 $\hat{\phi}$ 的连续性也蕴涵 $\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$ 连续。这样 $\phi^\#$(定义见 5.3.1 节)也是连续的。因而,由 $m_0(\xi)=\hat{\phi}^\#(2\xi)/\hat{\phi}(\xi)$ 可得 $m_0^\#(0)=1$。又因为 $|m_0^\#(\xi)|^2+|m_0^\#(\xi+\pi)|^2=1$,

① 见本章末注 7。

所以 $m_0^{\#}(\pi)=0$。又根据 $m_0^{\#}(\xi)=m_0(\xi)[\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2]^{1/2}[\sum_l|\hat{\phi}(2\xi+2\pi l)|^2]^{-1/2}$,故有 $m_0(\pi)=0$, 或

$$\sum_n c_n(-1)^n=0 \qquad (5.3.20)$$

由式(5.3.19)和(5.3.20)可得: $\sum_n c_{2n}=\sum_n c_{2n+1}=1$。这与 ψ 的容许条件是一致的[①]。值得注意的是:若 ϕ 连续,且 $|\phi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$,则 $\sum_n c_{2n}=1=\sum_n c_{2n+1}$ 与 Micchelli(1990)条件 $\sum_l \phi(x-l)=$ 常数 $\neq 0$ 是等价的[②]。

综上所述,一个新的规范正交小波基的构造步骤可归纳如下:

- 选择 ϕ 并使之满足

(1) ϕ 和 $\hat{\phi}$ 有足够好的衰减特性;

(2) 满足式(5.3.4)和式(5.3.5);

(3) $\int\phi(x)\mathrm{d}x\neq 0$。

(若以上条件满足,则由定理 5.3.1 和定理 5.3.2 可知 V_j 构成一个多分辨分析)。

- 若有必要,应进行正交化处理

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi)=\hat{\phi}(\xi)[2\pi\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2]^{-1/2}$$

- 最后,构造正交小波基

$$\hat{\psi}(\xi)=\mathrm{e}^{j\xi/2}\,\overline{m_0^{\#}(\xi/2+\pi)}\,\hat{\phi}^{\#}(\xi/2)$$

其中

$$m_0^{\#}(\xi)=m_0(\xi)[\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2]^{-1/2}[\sum_l|\hat{\phi}(2\xi+2\pi l)|^2]^{-1/2}$$

或等价于

$$\psi(x)=\sum_n(-1)^n h_{-n+1}^{\#}\phi^{\#}(x-n)$$

上式中,$m_0^{\#}(\xi)$可表示为:$m_0^{\#}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n^{\#}\mathrm{e}^{-in\xi}$。

5.4 更多的例子:Battle-Lemarie 小波族

Battle-Lemarie 小波族与由样条函数空间构成的多分辨分析相联系。对每种情况均选择具有整数结点 B-样条作为原始尺度函数。

---

① 见本章末注 8。

② 见本章末注 9。

若选择 ϕ 为一个分段常值样条

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则由它构造的是一个 Haar 基。

第二个例子是选用一个分段线性样条为尺度函数

$$\phi(x)=\begin{cases}1-|x| & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其波形如图 5.4(a)所示，且 ϕ 满足

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\phi(2x+1)+\phi(2x)+\frac{1}{2}\phi(2x-1)$$

这个展开过程可用图 5.4(b)来说明。$\phi(x)$的傅里叶变换为

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^2$$

且有 $2\pi\sum_{l\in Z}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cos\xi=\frac{1}{3}(1+2\cos^2\xi/2)$ ①。

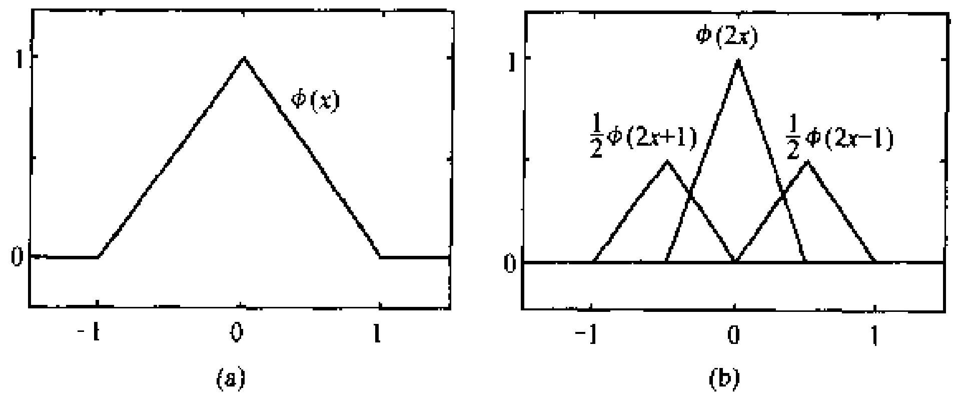


图 5.4　分段线性 B－样条函数 ϕ 的图形；它满足

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\phi(2x+1)+\phi(2x)+\frac{1}{2}\phi(2x-1)$$

显然，上式满足式(5.3.4)和式(5.3.5)，且 $\phi\in L^1$，$\int\phi(x)\mathrm{d}x=1\neq0$。故 V_j 构成一个多分辨分析(该多分辨分析由结点为 $2^j\mathbf{Z}$ 的逐段线性函数构成)。因为 ϕ 对 x 做平移后并不正交，所以需要用式(5.3.3)的方法进行正交化处理

$$\hat{\phi}^{\#}(\xi)=\sqrt{3}(2\pi)^{-1/2}(4\sin^2\xi/2)/(\xi^2(1+2\cos^2\xi/2)^{1/2})$$

与 ϕ 不同，$\hat{\phi}^{\#}$不是紧支的，其波形如图 5.5(a)所示。为了绘制 $\hat{\phi}^{\#}$ 的波形，最简单

① 见本章末注 10。

的方法是通过对$(1+2\cos^2\xi/2)^{-1/2}$的傅里叶系数进行数值计算

$$(1+2\cos^2\xi/2)^{-1/2}=\sum_n c_n e^{-in\xi}$$

并写出 $\phi^{\#}(x)$的表达式:$\phi^{\#}(x)=\frac{3}{2}\sum_n c_n\phi(x-n)$。对应的 $m_0^{\#}$ 表示为

$$m_0^{\#}(\xi)=\cos^2\xi/2[(1+2\cos^2\xi/2)/(1+2\cos^2\xi)]^{1/2}$$

从而可构造出正交小波

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{i\xi/2}\sin^2\xi/4[(1+2\cos^2\xi/4)/(1+2\cos^2\xi/2)]^{1/2}\hat{\phi}^{\#}(\xi/2)=$$

$$\sqrt{3}e^{i\xi/2}\sin^2\xi/4[(1+2\sin^2\xi/4)/[(1+2\cos^2\xi/2)(1+2\cos^2\xi/4)]]^{1/2}\hat{\phi}(\xi/2)$$

于是又可通过计算$[(1-\sin^2\xi/4)(1+\cos^2\xi/2)^{-1}(1+\cos^2\xi/4)^{-1}]^{1/2}$的傅里叶系数 d_n 来写出小波的时域形式

$$\psi(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_n(d_{n+1}-2d_n+d_{n-1})\phi(2x-n)$$

其波形如图 5.5(b)所示。

第三个例子是选择 ϕ 为一个分段为二次多项式的 B-样条

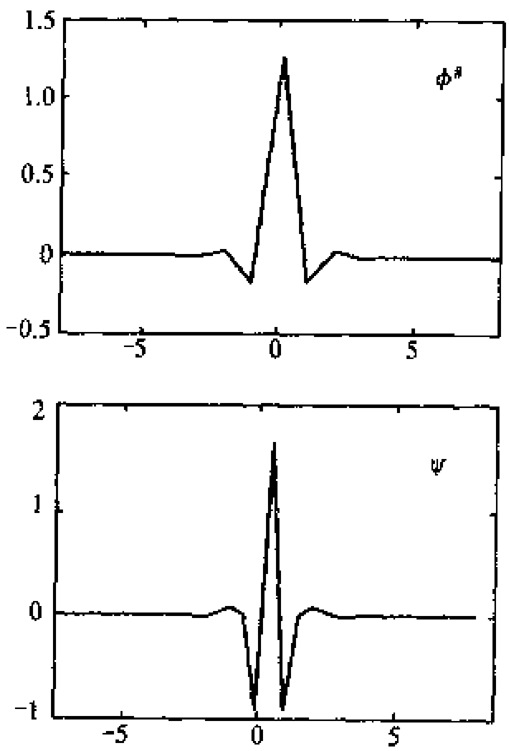


图 5.5　Battle-Lemarie 族中的尺度函数与小波波形

$$\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{3}{4}-(x-\frac{1}{2})^2 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其波形如图 5.6(a)所示，同时 ϕ 可展成(见图 5.6(b))

$$\phi(x)=\frac{1}{4}\phi(2x+1)+\frac{3}{4}\phi(2x)+\frac{3}{4}\phi(2x-1)+\frac{1}{4}\phi(2x-2)$$

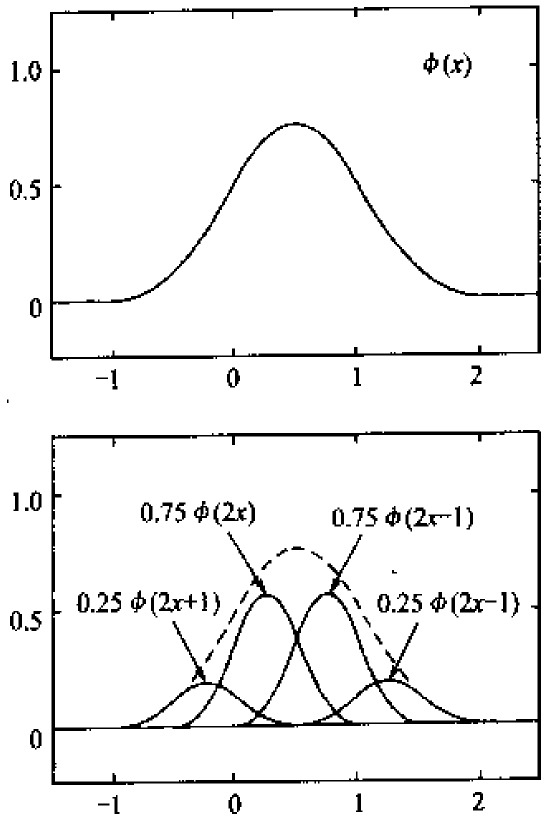


图 5.6　二次 B－样条函数 ϕ 的图形，

经过平移使它的结点在整数点。它满足关系：$\phi(x)=\frac{1}{4}\phi(2x+1)$

且有

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}e^{-i\xi/2}\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^3$$

以及

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2&=\frac{11}{20}+\frac{13}{30}\cos\xi+\frac{1}{60}\cos2\xi\\&=\frac{8}{15}+\frac{13}{30}\cos\xi+\frac{1}{30}\cos^2\xi\end{aligned}$$

与第二个例子一样，$\phi(x)$满足式(5.3.4)和式(5.3.5)，且 $\phi\in L^1$，$\int\phi(x)\mathrm{d}x\neq 0$。然而 $\phi(\cdot-k)$并不正交，需在构造小波之前利用式(5.3.3)进行正交化处理，以寻求 $\hat{\phi}^{\#}$和 $m_0^{\#}$。关于 $\phi^{\#}$和 ψ 的具体构造过程在这里不做详细推导，而仅给出它们的波形，如图 5.7 所示。

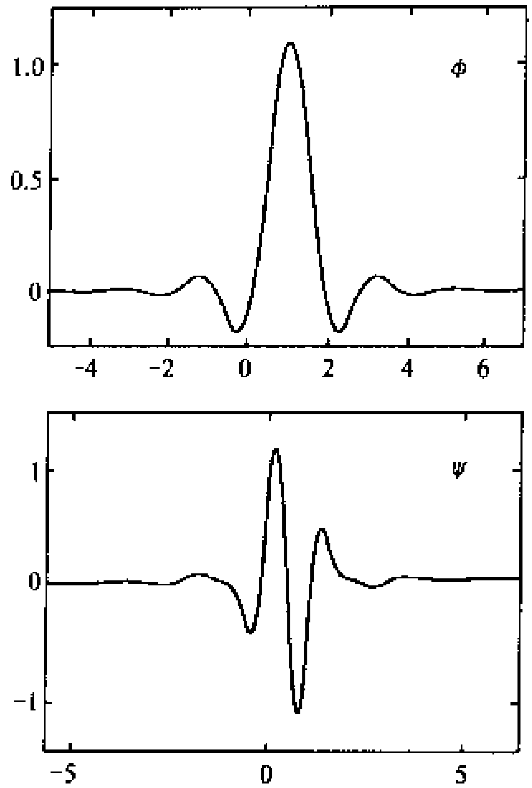


图 5.7　二次 B－样条下 Battle－Lemarie 族中的尺度函数与小波波形

一般地，若 ϕ 是一个N 次 B－样条，则

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{iK\xi/2}\left(\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\right)^{N+1}$$

其中

$$K=\begin{cases}0 & N\ \text{为奇数}\\ 1 & N\ \text{为偶数}\end{cases}$$

且 ϕ 满足$\int\phi(x)\mathrm{d}x=1$，以及

$$\phi(x)=\begin{cases}2^{-2M}\sum\limits_{j=0}^{2M+1}\binom{2M+1}{j}\phi(2x-M-1+j) & N=2M\\ 2^{-2M-1}\sum\limits_{j=0}^{2M+2}\binom{2M+2}{j}\phi(2x-M-1+j) & N=2M+1\end{cases}$$

对于任意给定的 N，可写出 $\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$ 的显式表达式，例如见 Chui

(1992),而且 ϕ 均满足式(5.3.4)和式(5.3.5)。若 N 为偶数,则 ϕ 以 $x=\frac{1}{2}$ 为对称轴,对于奇数 N 则以 $x=0$ 为对称轴,而且除了 $N=0$,$\phi(\cdot-k)$ 均不正交,需用式(5.3.3)进行正交化处理,其结果是:对于所有的 Battle - Lemarie 小波族均满足:$\mathrm{Supp}\phi^{\#}=\mathbb{R}=\mathrm{Supp}\psi$;正交的 $\phi^{\#}$ 与非正交的 ϕ 有相同的对称轴,小波 ψ 的对称轴均为 $x=\frac{1}{2}$(若 N 为奇数,则 ψ 对于对称轴对称,若 N 为偶数,则 $\phi^{\#}$ 对于对称轴反对称)。尽管 $\mathrm{Supp}\phi^{\#}$ 和 $\mathrm{Supp}\psi$ 延伸至整个 x 轴,但 $\phi^{\#}$ 和 ψ 均有非常好(指数型)的衰减性。为说明这一点,我们有如下定理。

定理 5.4.1 设 ϕ 具有指数型衰减特性:$|\phi(x)|\leqslant Ce^{-\gamma|x|}$,且对给定的 $\alpha:0<\alpha\leqslant\gamma$:,有

$$\sup_{|\beta|\leqslant\alpha}|(e^{\beta}\phi)\wedge(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-1-\varepsilon} \tag{5.4.1}$$

并假定 $0<a\leqslant\sum_{l}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$。定义 $\phi^{\#}:\hat{\phi}^{\#}(\xi)=\hat{\phi}(\xi)[2\pi\sum_{l}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2]^{-1/2}$,则 $\phi^{\#}$ 也有指数型的衰减特性。

证明:

1. 函数 ϕ 有界:$|\phi(x)|\leqslant Ce^{-\alpha|x|}$ 蕴涵:$\hat{\phi}(\xi)$ 有到带形区域 $|\mathrm{Im}\xi|<\alpha$ 的解析延拓,且对所有的 $|\xi_2|<\alpha$,有 $\hat{\phi}(\cdot+i\xi_2)\in L^2(\mathbb{R})$。同样有 $\overline{\hat{\phi}(\xi)}=\hat{\bar{\phi}}(-\xi)$。

2. 对固定的 ξ_2,定义 $F_{\xi 2}(\xi_1)=\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2)\hat{\bar{\phi}}(-\xi_1-i\xi_2)$,则

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}|F_{\xi_2}(\xi_1+2\pi l)|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{l}|\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2+2\pi l)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{l}|\hat{\bar{\phi}}(-\xi_1-i\xi_2-2\pi l)|^2\Big)^{1/2}$$

及

$$\begin{aligned}
&\sum_{l}|\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2+2\pi l)|^2\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2\pi}\int d\xi_1|\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2)|^2+2\int d\xi_1|\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2)||\hat{\phi}'(\xi_1+i\xi_2)|\\
&\quad\leqslant\frac{1}{2\pi}\int dx e^{2\xi_2 x}|\phi(x)|^2+2\Big[\int dx e^{2\xi_2 x}|\phi(x)|^2\Big]^{1/2}\\
&\qquad\cdot\Big[\int dx e^{2\xi_2 x}x^2|\phi(x)|^2\Big]^{1/2}<\infty
\end{aligned}$$

(这里利用了不等式:$\sum_{l}|f(x+2\pi l)|\leqslant(2\pi)^{-1/2}\int dx|f(x)|+\int dx|f'(x)|$)。[①] 因此,若 $|\mathrm{Im}\xi_2|<\gamma$,则 $\sum_{l}|F_{\xi_2}(\xi_1+2\pi l)|$ 绝对收敛。根据控制收敛定理,由

① 见本章末注 11。

$\sum_l |F_{\xi_2}(\xi_1+2\pi l)|$ 的有界性可知：对于 $|\mathrm{Im}\xi|<\gamma$，$\sum_l |F_{\xi_2}(\xi_1+2\pi l)|$ 在 $\xi=\xi_1+i\xi_2$ 处是解析的。

3. 对于 $|\mathrm{Im}\xi|<\gamma$，函数 $G(\xi)=\sum_l |\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$ 也可作解析延拓。因为 G 以 2π 为周期，且 $G|_{\mathbb{R}}\geqslant a>0$，所以存在 $\bar{\alpha}$，可能 $\bar{\alpha}<\gamma$，使 $|\mathrm{Im}\xi|<\bar{\alpha}$ 对 $\mathrm{Re}G(\xi)\geqslant a/2$。故 $G^{-1/2}$ 可定义为 $|\mathrm{Im}\xi|<\bar{\alpha}$ 上的解析函数。这就意味着：对于 $|\mathrm{Im}\xi|<\bar{\alpha}$，$\hat{\phi}^{\#}=G^{-1/2}\hat{\phi}$ 可延拓为一致有界解析函数。

4. 另一方面，式(5.4.1)蕴涵：当 $|\xi_2|\leqslant\alpha$ 时，有

$$|\hat{\phi}(\xi_1+i\xi_2)|\leqslant C(1+|\xi_1|)^{-1-\epsilon}$$

于是，若 $|\mathrm{Im}\xi|=\min(\bar{\alpha},\alpha)$，则 $\phi^{\#}$ 是解析的，且是有界的，即

$$|\hat{\phi}^{\#}(\xi)|\leqslant C(1+|\mathrm{Re}\xi|)^{-1-\epsilon}$$

从而有

$$\begin{aligned}|\phi^{\#}(x)| &= \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\left|\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{i\xi x}\hat{\phi}^{\#}(\xi)\right| \\ &= \lim_{R\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\left|\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{i\xi_1 x}\mathrm{e}^{-\xi_2 x}\hat{\phi}^{\#}(\xi_1+i\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\right. \\ &\quad+\int_0^{\xi_2}\mathrm{e}^{-\xi_1 R}\mathrm{e}^{-sx}\phi^{\#}(-R+is)\mathrm{d}s- \\ &\quad\left.\int_0^{\xi_2}\mathrm{e}^{i\xi_1 R}\mathrm{e}^{-sx}\phi^{\#}(R+is)\mathrm{d}s\right|\leqslant C\mathrm{e}^{-\xi_2 x}\qquad \text{当 } |\xi_2|<\min(\bar{\alpha},\alpha)\end{aligned}$$

■

推论5.4.2 所有 Battle－Lemarie 小波 ψ 与对应的标准正交尺度函数 $\phi^{\#}$ 均有指数型衰减性。

证明：

1. 若 B－样条的次数 $N=0$，则对应的是 Haar 小波，该结论无须证明。现假定 $N\geqslant1$，则 $|\hat{\phi}(\xi)|=|(2(\sin\xi/2)/\xi)|^{N+1}$，因此

$$|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N-1}$$

2. 设 γ 任意大，条件 $|\phi(x)|\leqslant Ce^{-\gamma|x|}$ 成立是平凡的。可构造 $f_\beta(x)\in S(\mathbb{R})$，$0\leqslant|\beta|\leqslant\alpha$，使 $\mathrm{Sup}_{\xi\in\mathbb{R}}\mathrm{Sup}_{0\leqslant|\beta|\leqslant\alpha}|(1+|\xi|)^M\hat{f}_\beta(\xi)|=C'_M<\infty$，对所有的 $M\in\mathbb{N}$ 及 $f_\beta=\mathrm{e}^{\beta x}$ 在 $\mathrm{Supp}(\phi)$ 上均成立，于是

$$\begin{aligned}|(\mathrm{e}^{\beta}\phi)\wedge(\xi)| &= |(f_\beta\phi)\wedge(\xi)|=|(\hat{f}_\beta*\hat{\phi})(\xi)| \\ &\leqslant C\int\mathrm{d}\zeta(1+|\zeta-\xi|)^{-M}(1+|\zeta|)^{-N-1} \\ &\leqslant C'(1+|\xi|)^{-N-1}\qquad (M\text{ 足够大})\end{aligned}$$

即：当 α 任意大时，式(5.4.1)是满足的。

3. 由于 $\phi^{\#}$ 的衰减特性完全由 $\mathrm{Re}[\sum_l\hat{\phi}(\xi+2\pi l)\hat{\phi}(-\xi-2\pi l)]$ 中最靠近实轴

的复零点所决定，所以 $\phi^{\#}$ 有指数型的衰减特性。

4. 因为 $\phi^{\#}$ 指数衰减：$|\phi^{\#}(x)|\leqslant C_{\#}\mathrm{e}^{-\gamma_{\#}|x|}$，所以

$$|h_n^{\#}|\leqslant\sqrt{2}\int|\phi^{\#}(x)||\phi^{\#}(2x-n)|\mathrm{d}x\leqslant C\mathrm{e}^{-\gamma_{\#}|n|/2}$$

$$(\text{利用 } |x+a|+|x-a|\geqslant 2\max(|x|,|a|))$$

于是

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &\leqslant\sqrt{2}\sum_n|h_{-n+1}||\phi^{\#}(2x-n)| \\ &\leqslant C\sum_n \mathrm{e}^{-\gamma^{\#}|n|/2}\mathrm{e}^{-\gamma_{\#}(2x-n)} \\ &\leqslant C_{\epsilon}\mathrm{e}^{-\gamma_{\#}|x|(1-\epsilon)} \quad ■\end{aligned}$$

注意：

Battle 对 Battle－Lemarie 小波族的构造方法与我们已介绍的方法是完全不同的。他的研究采用了量子场理论的相关方法。有兴趣的读者可阅读 Battle(1992) 的有关文献。

关于较光滑的正交小波基，可作如下的比较：

- Meyer 小波是 C^{∞} 的，衰减性优于任何多项式的倒数(但未达到指数衰减)；
- Battle－Lemarie 小波可以是 C^k 的，k 有限(即 $N\geqslant k+1$)，且有指数衰减特性(k 增大时，衰减变慢)。

在后面的讨论中将会发现：一个正交小波基不可能既是 C^{∞} 的又具有指数衰减特性(应当注意：一个小波框架却没有这样的限制，例如墨西哥草帽状函数)。

5.5 正交小波的正则性

对于小波基(无论正交与否，见第 8 章)，ψ 正则性与 $\hat{\psi}$ 在 $\xi=0$ 处的零点阶数之间存在着一种内在联系，这便是如下的定理。为了以后应用方便起见，我们给出该定理一般意义上的描述和证明。

定理 5.5.1 设两个函数 $f,\tilde{f}$ 不恒为常数，且

$$\langle f_{j,k},\tilde{f}_{j',k'}\rangle=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$$

其中，$f_{j,k}=2^{-j/2}f(2^{-j}x-k)$，$\tilde{f}_{j,k}=2^{-j/2}\tilde{f}(2^{-j}x-k)$。并假定 $|\tilde{f}(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-\alpha}$，$\alpha>m+1$。又 $f\in C^m$ 且当 $l\leqslant m$ 时，$f^{(l)}$ 有界。则 $\tilde{f}$ 有 $0\sim m$ 阶零矩，即

$$\int x^l\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (l=0,1,2,\cdots,m) \tag{5.5.1}$$

证明：

1. 证明的基本思想非常简单。选择 j、k、j'、k'，使 $f_{j,k}$ 相当分散，而 $\tilde{f}_{j',k'}$ 又非

常集中(例如假定 $\tilde{f}$ 具有紧支),在 $\tilde{f}_{j',k'}$ 小的紧支范围内,通过 $\tilde{f}_{j',k'}$"观察"到的 $f_{j,k}$ 的部分可用适当项数(m 项)的 Taylor 多项式代替。而由 $\int \overline{f_{j,k}(x)}\tilde{f}_{j',k'}(x)\mathrm{d}x = 0$,即 $\tilde{f}$ 与一个 m 阶多项式乘积的积分为零。然后,通过改变 k' 移动 $\tilde{f}_{j',k'}$ 的位置,并重复上述过程,可以得到一族乘以 $\tilde{f}$ 后积分为零的 m 阶多项式。这一 m 阶多项式族对下面的进一步讨论是至关重要的。

2. 为了证明式(5.5.1),对 l 进行归纳。下面的工作对初始步与归纳步同样有效。设对于 $n\in\mathbb{N}, n<l(l\neq0)$,有 $\int x^n\tilde{f}(x)\mathrm{d}x = 0$。因为 $f^{(l)}$ 连续($l\leqslant m$),又有理数 $2^{-j}k(j,k\in\mathbf{Z})$ 在 $\mathbf{R}$ 上稠密。故存在 J,K 满足 $f^{(l)}(2^{-J}K)\neq0$(不然,若 $f^{(l)}\equiv0$,则当 $l=0,1$ 时,$f\equiv$常数;或者,当 $l\geqslant2$ 时,f 为一个 $l-1(\geqslant1)$ 阶多项式,也就是说,f 是无界的,这与定理的假定条件是不一致的)。另外,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使下式成立

$$|f(x)-\sum_{n=0}^{l}(n!)^{-1}f^{(n)}(2^{-J}K)(x-2^{-J}K)^n|\leqslant\varepsilon|x-2^{-J}K|^l$$

设 $|x-2^{-J}K|<\delta$,取 $j>J, j>0$,则

$$\begin{aligned}0 &= \int\mathrm{d}x f(x)\,\overline{\tilde{f}(2^jx-2^{j-J}K)}\\ &= \sum_{n=0}^{l}(n!)^{-1}f^{(n)}(2^{-J}K)\int\mathrm{d}x(x-2^{-J}K)^n\overline{\tilde{f}(2^jx-2^{j-J}K)}\\ &\quad+\int\mathrm{d}x[f(x)-\sum_{n=0}^{l}(n!)^{-1}f^{(n)}(2^{-J}K)(x-2^{-J}K)^n]\overline{\tilde{f}(2^jx-2^{j-J}K)}\end{aligned}\tag{5.5.2}$$

因为($n<l$),$\int x^n\tilde{f}(x)\mathrm{d}x = 0$ 所以第一项等于

$$(l!)^{-1}f^{(l)}(2^{-J}K)2^{-(l+1)j}\int x^l\,\overline{\tilde{f}(x)}\mathrm{d}x\tag{5.5.3}$$

利用 $f^{(n)}$ 的有界性可知,第二项按下式有界

$$\begin{aligned}&\varepsilon\int_{|y|<\delta}\mathrm{d}y\,|y|^l\,|\tilde{f}(2^jy)|+C'\int_{|y|>\delta}\mathrm{d}y(1+|y|^l)\,|\tilde{f}(2^jy)|\\ &\leqslant 2\varepsilon C2^{-j(l+1)}\int_0^{2^j\delta}\mathrm{d}t\,t^l(1+t)^{-\alpha}+2C'C\int_\delta^\infty\mathrm{d}t(1+t)^l(1+2^jt)^{-\alpha}\\ &\leqslant C_1\varepsilon2^{-j(l+1)}+C_22^{-j\alpha}\delta^{-\alpha}(1+\delta)^{l+1}\end{aligned}\tag{5.5.4}$$

在上式中,已在第一项中用 ∞ 作为积分上限,而在第二项中采用了不等式 $(1+2^jt)^{-1}\leqslant\frac{1+\delta}{1+2^j\delta}(1+t)^{-1}\leqslant2^{-j}\frac{1+\delta}{\delta}(1+t)^{-1}\quad(t\geqslant\delta)$。其中的 C_1、C_2 仅与 C、α 和 l 有关,而与 ε、δ 和 j 关。由式(5.5.2)、式(5.5.3)和式(5.5.4)联合可得

$$\left|\int x^l \overline{\tilde{f}(x)}\mathrm{d}x\right| \leqslant (l!) \mid f^{(l)}(2^{-J}K) \mid^{-1}[\epsilon C_1 + \delta^{-\alpha}(1+\delta)^{l+1}2^{-j(\alpha-l1)}C_2]$$

其中 ϵ 可任意小,而且对于对应的 δ,可以选择 j 足够大,使得第二项也任意小,于是有

$$\int x^l \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (l = 0,1,2,\cdots,m) \qquad ■$$

当用于正交小波时,定理 5.5.1 有如下的推论。

推论 5.5.2 若 $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j/2} - k)$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的规范正交系,$|\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-m-1-\epsilon}$;$f \in C^m$;且当 $l \leqslant m$ 时,$f^{(l)}$ 有界。则

$$\int x^l \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (l = 0,1,2,\cdots,m) \qquad ■$$

证明:

假设 $\psi = f = \tilde{f}$,则由定理 5.5.1 直接有

$$\int x^l \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (l = 0,1,2,\cdots,m) \qquad ■$$

注意:

1. 其他证明方法可参见 Meyer(1990)、Battle(1989)的相关文献。与此地不同的是他们在证明中都利用了傅里叶变换。在小波出现前,关于 Calderon – Zygmund 算子中,零矩和正则关系的研究造就了一大批优秀理论家;

2. 在定理 5.5.1 和推论 5.5.2 的证明过程中并未引用多分辨分析的方法,甚至连 $\psi_{j,k}$ 是否构成基都未作要求,惟一用到的东西是正交性。Battle 的证明也仅利用了小波的正交性,Meyer 的证明则利用了多分辨分析的全部框架。

推论 5.5.3 设 $\psi_{j,k}$ 是规范正交的,则除非 $\psi = 0$,不可能同时使 $\psi(x)$ 既有指数衰减性,又有 $\psi \in C^\infty$,而且 $\psi(x)$ 的各阶导数 $\psi^{(l)}(x)$ $(l = 0,1,2,\cdots,m)$ 均有界。

证明:

1. 设 $\psi \in C^\infty$,则由定理 5.5.1 有 $\int x^l \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (l \in \mathbb{N})$,于是

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\hat{\psi}\Big|_{\xi=0} = 0 \qquad l \in \mathbb{N}$$

2. 若 ψ 又有指数衰减特性,则 $\hat{\psi}$ 在某些频带($|\mathrm{Im}|\xi < \lambda$)上是解析的。又因 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\hat{\psi}\big|_{\xi=0} = 0 \quad (l \in \mathbb{N})$,所以 $\psi \equiv 0$。 ■

上述推论得知一种选择小波的折衷方案,即:对于小波频域和时域的指数衰减特性,只能选择其一,而不能兼而有之。在实际应用中,小波具有时域衰减性的要求多于频域。

定理 5.5.1 的最后一个推论表明了多分辨分析中 m_0 的因子化。

推论 5.5.4 设 $\psi_{j,k}$ 为规范正交小波基,且与某个多分辨分析相联系。又设

$|\phi(x)|, |\psi(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-m+1-\varepsilon}$, $\psi \in C^m$，且当 $l \leqslant m$ 时，$\psi^{(l)}$有界。则 m_0（定义式见式(5.1.14)和(5.1.18)）可因子化为

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^{m+1} \mathscr{L}(\xi) \tag{5.5.5}$$

其中，$\mathscr{L} \in C^m$，且以 2π 为周期。

证明：

1. 由推论 5.5.2 有 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l} \hat{\psi}|_{\xi=0} = 0 \quad (l < m)$；

2. 另一方面，因为 $\hat{\psi}(\xi) = \mathrm{e}^{i\xi/2}\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\hat{\phi}(\xi/2)$，且 $\psi, \hat{\phi} \in C^m$，$\hat{\phi}(0) \neq 0$，而 $\hat{\psi}(0) = 0$（见 5.3.2 节的注：3.），于是有：$m_0(\pi) = 0$，同理，m_0 在 $\xi = \pi$ 处的 m 个导数值均等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l} m_0(\xi)|_{\xi=\pi} = 0 \quad (l \leqslant m)$$

3. 以上的分析表明：m_0 在 $\xi = \pi$ 处有 $(m+1)$ 阶零点，即在满足推论条件时，m_0 可因子化为

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^{m+1} \mathscr{L}(\xi)$$

其中，$\mathscr{L} \in C^m$，且以 2π 为周期。 ■

关于小波的正则性将在第 7 章中作进一步的讨论。

5.6 与子带滤波方法的联系

多分辨分析非常自然地引出了对函数小波系数的一种逐级地快速计算格式。如果对于已经给定的小尺度①，已计算出（或给定）了函数 f 与 $\phi_{j,k}$ 的内积，那么，利用多分辨分析可对给定函数的小波系数进行系统且快速的计算。为了便于改变函数 f 的尺度，可首先假定已给小尺度的标记为 $j=0$，并由此容易求得 $j \geqslant 1$ 时的内积 $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$。首先见式(5.1.34)

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n}$$

其中，$g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle = (-1)^n h_{-n+1}$，因而有

$$\begin{aligned}\psi_{j,k}(x) &= 2^{-j/2}\psi(2^{-j/2} - k) \\ &= 2^{-j/2}\sum_n g_n 2^{1/2}\phi(2^{-j+1}x - 2k - n)\end{aligned}$$

① 见本章末注 12。

$$= \sum_n g_n \phi_{j-1,2k+n}(x) = \sum_n g_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x) \qquad (5.6.1)$$

于是得

$$\langle f, \psi_{1,k} \rangle = \sum_n \overline{g_{n-2k}} \langle f, \phi_{0,n} \rangle$$

这说明:$\langle f, \psi_{1,k} \rangle$可通过求序列$((\langle f, \Phi_{0,n} \rangle))_{n\in \mathbf{Z}}$与序列$(\bar{g}_{-n})_{n\in \mathbf{Z}}$作卷积,并保留卷积中偶数采样值而得到。类似地,有

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{g_{n-2k}} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \qquad (5.6.2)$$

在上式中,若$\langle f, \phi_{j-1,n} \rangle$已知,则可通过卷和运算和抽样来求取$\langle f, \psi_{j,k} \rangle$。而由式(5.1.5)

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j/2} - k) = \sum_n h_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x) \qquad (5.6.3)$$

因而有

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_n \overline{h_{n-2k}} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \qquad (5.6.4)$$

由此可见,函数 f 的小波变换求解如下。

首先计算$\langle f, \phi_{0,n} \rangle$,然后由式(5.6.2)求$\langle f, \psi_{1,k} \rangle$,由式(5.6.4)求$\langle f, \phi_{1,k} \rangle$。接着由$\langle f, \phi_{1,n} \rangle$又分别由式(5.6.2)和式(5.6.4)计算$\langle f, \psi_{2,k} \rangle$和$\langle f, \phi_{2,k} \rangle$,…,并不断地重复上述计算过程。在每一步计算时,不但求取了第 j 尺度层空间上的小波变换系数$\langle f, \psi_{j,k} \rangle$,而且也求得了第 j 层上的尺度变换系数$\langle f, \phi_{j,k} \rangle$,这种尺度变换系数可用于求解下一尺度层上的小波变换系数。

考虑到函数 f 在相邻尺度层上的"信息"差别,上述计算过程也可认为是函数 f 的逐次逼近过程。基于这种观点,从 f 的一个较小好的尺度近似 $f^0 = P_0 f$ 开始计算(P_j 为空间 V_j 上的正交投影算符,同时引入 Q_j 为正交补空间 W_j 的投影算符),并将 $f^0 \in V_0 = V_1 \oplus W_1$ 分解为 $f^0 = f^1 + \delta^1$,其中 $f^1 = P_1 f^0 = P_1 f$ 为该多分辨分析上的下一级粗略近似,$\delta^1 = f^0 - f^1 = Q_1 f^0 = = Q_1 f$ 为 $f^0 \to f^1$ 变换过程的"信息损失"。因为在所有的空间 V_j、W_j 上分别存在规范正交基$(\phi_{j,k})_{k\in \mathbf{Z}}$,$(\psi_{j,k})_{k\in \mathbf{Z}}$所以

$$f^0 = \sum_n c_n^0 \phi_{0,n}, f^1 = \sum_n c_n^1 \phi_{1,n}, \delta^1 = \sum_n d_n^1 \psi_{1,n}$$

式(5.6.2)、式(5.6.4)表明了在 V_0 上作正交基变换$(\phi_{0,n})_{n\in \mathbf{Z}} \to (\phi_{0,n}, \psi_{1,n})_{n\in \mathbf{Z}}$时,正交变换系数的影响

$$c_k^1 = \sum_n \overline{h_{n-2k}} c_n^0 \quad d_k^1 = \sum_n \overline{g_{n-2k}} c_n^0 \qquad (5.6.5)$$

若引入记号 $a = (a_n)_{n\in \mathbf{Z}}, \bar{a} = (\bar{a}_{-n})_{n\in \mathbf{Z}}, (Ab)_k = \sum_n a_{2k-n} b_n$,则上式可改写为

$$c^1 = \bar{H} c^0 \qquad d^1 = \bar{G} c^0$$

f 的粗略近似$f_1 \in V_1 = V_2 \oplus W_2$ 又可分解为 $f^1 = f^2 + \delta^2, f^2 \in V_2, \delta^2 \in W_2$,且

$$f^2 = \sum_n c_n^2 \phi_{2,n}, \quad \delta^2 = \sum_n d_n^2 \psi_{2,n}$$

于是又有

$$c^2 = \overline{H}c^1 \qquad d^2 = \overline{G}c^1$$

⋮

⋮

以上的分解过程可以图示为图 5.8。

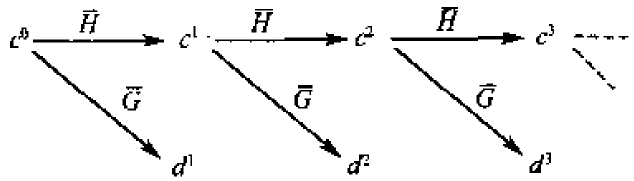


图 5.8　式(5.6.5)的图形表示

在实际应用中,逼近过程将在有限多个尺度层以后停止。这意味着函数 f 在尺度变换 $((\langle f, \phi_{0,n}\rangle))_{n\in\mathbf{Z}} = c^0$ 中的"信息"已分解为 $d^1, d^2, d^3, \cdots, d^J$ 以及一个最终的粗略近似 c^J,即:$((\langle f, \psi_{j,k}\rangle))_{k\in\mathbf{Z}}(j=1,2,\cdots,J)$ 以及 $((\langle f, \phi_{J,k}\rangle))_{k\in\mathbf{Z}}$。因为我们所作的是逐级的正交基变换,故其逆运算可用一个伴随矩阵表示。显然

$$\begin{aligned} f^{j-1} &= f^j + \delta^j \\ &= \sum_k c_k^j \phi_{j,k} + \sum_k d_k^j \psi_{j,k} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} c_n^{j-1} &= \langle f^{j-1}, \phi_{j-1,n}\rangle \\ &= \sum_k c_k^j \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n}\rangle + \sum_k d_k^j \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n}\rangle \\ &= \sum_k [h_{n-2k}c_k^j + g_{n-2k}d_k^j] \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

(利用式(5.6.1)和式(5.6.3))

在电子工程中,式(5.6.5)和式(5.6.6)是一种可实现信号精确重建的子带滤波格式的分析及综合过程。在双通道子带滤波方案中,输入序列 $(c_n^0)_{n\in\mathbf{Z}}$ 分别与低通滤波器和高通滤波器求卷积,并对卷积的结果进行二次抽样,即仅将偶(或奇)结点采样值保留。该过程可用式(5.6.5)精确表示。为了便于读者理解,这里先对"滤波"的概念进行简略介绍。实际上,任何一个可和序列 $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 均可表示为一个紧支带限信号 $\gamma(\mathrm{Supp}\hat{\gamma}\subset[-\pi,+\pi])$ 的采样值序列(见第 2 章),

$$\gamma(x) = \sum_n c_n \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$$

或

$$\hat{\gamma}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n}c_n\,\mathrm{e}^{-in\xi}$$

滤波运算对应于 $\hat{\gamma}$ 与一个 2π 周期函数的乘法运算。如

$$\hat{\alpha}(\xi)=\sum_{n}a_n\mathrm{e}^{-in\xi} \tag{5.6.7}$$

其运算结果 $\alpha*\gamma$ 也是一个带限信号,即

$$(\alpha*\gamma)\wedge(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n}\mathrm{e}^{-in\xi}\sum_{m}a_{n-m}c_m$$

或

$$(\alpha*\gamma)(x)=\sum_{n}\left(\sum_{m}a_{n-m}c_m\right)\frac{\sin\pi(x-n)}{(x-n)}$$

若$\hat{\alpha}|_{[-\pi,+\pi]}$几乎集中于$[-\pi/2,+\pi/2]$,则滤波器是低通的;若$\hat{\alpha}|_{[-\pi,+\pi]}$几乎集中于$\{\xi;\pi/2\leqslant|\xi|\leqslant\pi\}$,则滤波器是高通的,如图 5.9 所示。若满足

$$\hat{\alpha}_L(\xi)=\begin{cases}1 & |\xi|\leqslant\pi/2\\ 0 & \pi/2\leqslant|\xi|\leqslant\pi\end{cases}\qquad \hat{\alpha}_H(\xi)=\begin{cases}0 & |\xi|\leqslant\pi/2\\ 1 & \pi/2\leqslant|\xi|\leqslant\pi\end{cases}$$

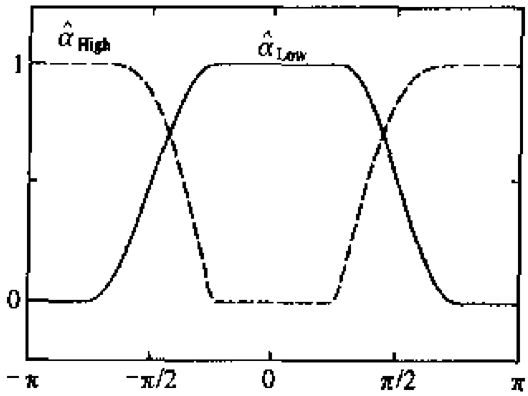


图 5.9　低通滤波器(实线)和高通滤波器(虚线)

则滤波器是理想滤波器。对应式(5.6.7),a_n 可表示为

$$a_n^L=\begin{cases}1/2 & n=0\\ 0 & n=2k(k\neq 0)\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

$$a_n^H=\begin{cases}1/2 & n=0\\ 0 & n=2k(k\neq 0)\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\pi} & n=2k+1\end{cases}$$

当该理想低通滤波器用于 γ 时,其输出是一个紧支集为$[-\pi/2,+\pi/2]$的带限信号,且完全由它在 $2\mathbf{Z}$ 结点上采样值决定,于是有(见式(2.1.2))

$$(\alpha_L * \gamma)(x) = \sum_n \Big(\sum_m a^L_{2n-m}c_m\Big)\frac{\sin[\pi(x-2n)/2]}{\pi(x-2n)/2}$$

同理,当该理想高通滤波器用于 γ 时,其输出相当于一个紧支集为$[-\pi/2,+\pi/2]$的带限信号做频移平移,且该带限信号也由它在 $2\mathbf{Z}$ 结点上采样值确定,即

$$\begin{aligned}(\alpha_H * \gamma)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}\leqslant|\xi|\leqslant\pi} e^{ix\xi}\sum_n\Big(\sum_m a^L_{2n-m}c_m\Big)e^{-2in\xi}d\xi \\ &= \sum_n\Big(\sum_m a^H_{2n-m}c_m\Big)\frac{\sin[\pi(x-2n)/2]}{\pi(x-2n)/2}\{2\cos[\pi(x-2n)/2]-1\}\end{aligned}$$

因为 a^L_n, a^H_n 与 c_n 卷积后的偶结点值输入足以完全表征 $\alpha_L * \gamma$ 和 $\alpha_H * \gamma$,所以仅需在卷和后保留这些值。这就是在子带滤波方案中采用的 2 因子取样(称为"亚样")的基本原理。另外,利用两个被滤波和抽样的序列

$$c^L_n = \Big(\sum_m a^L_{2n-m}c_m\Big) \qquad c^H_n = \Big(\sum_m a^H_{2n-m}c_m\Big) \tag{5.6.8}$$

来重建原始序列 c_m 也是很容易的,即

$$\begin{aligned}c_m &= \gamma(m) \\ &= (\alpha_L * \gamma)(m) + (\alpha_H * \gamma)(m) \\ &\quad (\text{因为 } \hat{\alpha}_L + \hat{\alpha}_H = 1) \\ &= \sum_k \frac{\sin[\pi(m-2k)/2]}{\pi(m-2k)/2}\{c^L_k + c^H_k 2\cos[\pi(m-2n)/2]-1\}\end{aligned}$$

当分别按 m 取偶数和奇数考察上式可得

$$c_{2m} = c^L_m + c^H_m$$

$$c_{2m+1} = \sum_l \frac{2(-1)^l}{\pi(2l+1)}(c^L_{m-l} - c^H_{m-l})$$

利用 a_n 的表达式可将上两式统一为

$$c_m = 2\sum_n (a^L_{m-2n}c^L_n + a^H_{m-2n}c^H_n) \tag{5.6.9}$$

上式的运算可分解为以下三个步骤:

- 在 c^L_n 和 c^H_n 两个序列中均交替插入零(即构造一个奇结点取值为零,偶结点取值为给定序列 c^L_n 和 c^H_n 的值的新序列);
- 将被插值(这种插值又称为"上抽样")的两个序列与滤波器 a^L, a^H 分别求卷积;
- 将两个卷积序列相加。

为直观起见,式(5.6.8)和式(5.6.9)可用图 5.10 来图示。

理想低通滤波器和理想高通滤波器 a^L、a^H 的衰减系数 a^L_n 和 a^H_n 衰减很慢,所以它们是不实用的。在实际应用中,人们提出了如图 5.10 所示的子带滤波方案,

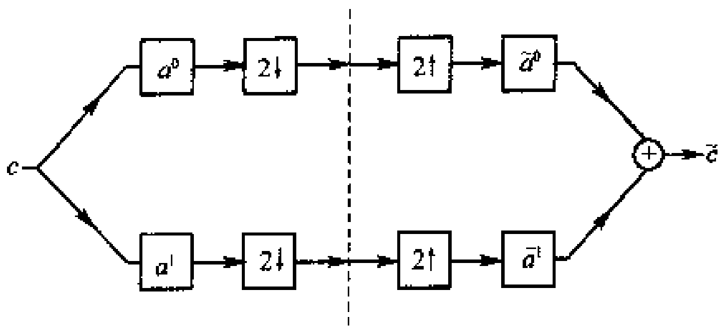


图 5.10　信号分解和重建过程的图形表示

(子带滤波方案中信号分解和重建过程示意图(用虚线分离分解和重建两部分)中的符号($a^0, a^1, \cdots$)表示与对应序列的卷和;2↓表示"亚抽样";2↑表示"上抽样"。在理想情况下,即:$a^0=a^L, a^1=a^H, \tilde{a}^0=2a^L, \tilde{a}^1=2a^H$,其输出与输入相等,即:$\tilde{c}=c$。)

即选用了滤波器 a^0、a^1、$\tilde{a}^0$、$\tilde{a}^1$,以加速滤波器的衰减,为满足这种衰减的需要,该方案要求对应的 2π 周期函数 α^0、α^1、$\tilde{\alpha}^0$、$\tilde{\alpha}^1$ 比 α^L 和 α^H 有更好的光滑度。这样做的结果将会在输出中产生"混叠"现象,因为 $|\alpha^0|$、$|\alpha^1|$ 好像是"实际"(而非理想)的 α^L、α^H(见图 5.9),也就是说最高频率为 $\pi/2$ 为带限函数,也不再相当于对 γ 的抽样,而像是产生了"混叠"(与 2.1 节中介绍的情况类似)。在信号的重建过程中,必须对这种"混叠"现象进行校正,即要求 $\tilde{a}^0$、$\tilde{a}^1$ 与 a^0、a^1 匹配,以消除信号分解后所产生的"混叠"。然而只有当 a^0 和 a^1 以某种方式相匹配时,才可能有 $\tilde{a}^0$, $\tilde{a}^1$ 与 a^0, a^1 之间的匹配。为了寻找这些滤波器间的匹配条件,可引入符号 z 将一个序列 $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ 表示为 $a(z)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} a_n z^n$ 的级数形式(Z 变换)。若 $z=\mathrm{e}^{-i\xi}$ 在单位圆上,则前式变为傅里叶级数。有时,为了使用方便,常认为 $Z\in\mathbf{C}$,而不要求 $|z|=1$,于是图 5.10 所示的子带滤波方案的图解过程可重新表示为

$$c^0(z^2)=\frac{1}{2}[a^0(z)c(z)+a^0(-z)c(-z)]$$

$$c^1(z^2)=\frac{1}{2}[a^1(z)c(z)+a^1(-z)c(-z)]$$

其中 $a^0(z)c(z)$ 是 a^0 与 c 卷和的 Z 变换;$\frac{1}{2}[b(z)+b(-z)]$ 等价于 $\sum\limits_n b_{2n}z^{2n}$,即在 $b(z)$ 中去掉奇数结点的输入(减抽样)。

信号的重建过程可表示为

$$\tilde{c}(z)=\tilde{a}^0(z)c^1(z^2)+\tilde{a}^1(z)c^2(z^2)$$

其中,$c^j(z^2)$ 为 c^j"上抽样"序列的 z 变换(即已插入零值;$c^j(z^2)=\sum\limits_n c_n^j z^{2n}$),总输出为

$$\tilde{c}(z)=\frac{1}{2}[\tilde{a}^0(z)a^0(z)+\tilde{a}^1(z)a^1(z)]c(z)$$

$$+\frac{1}{2}[\tilde{a}^0(z)a^0(-z)+\tilde{a}^1(z)a^1(-z)]c(-z) \tag{5.6.10}$$

在上式中，第二项表明了“混叠”现象。因为 $c(-z)$ 对应与傅里叶级数 $\sum\limits_n c_n e^{in\xi}$ 做 π 的频移，即“混叠”现象的产生是因为采样频率仅为 Nyquist 采样率的一半。为了消除“混叠”现象，必须要求

$$\tilde{a}^0(z)a^0(-z)+\tilde{a}^1(z)a^1(-z)=0 \tag{5.6.11}$$

第一个无“混叠”的子带滤波方案要追溯到 Esteban 和 Galand(1977)，在他们的工作中，与在注释中介绍的其他方案一样，所有的序列均为实序列，并选取

$$\begin{aligned} a^1(z) &= a^0(-z) \\ \tilde{a}^0(z) &= a^0(z) \\ \tilde{a}^1(z) &= -a^0(-z) \end{aligned} \tag{5.6.12}$$

于是，式(5.6.11)得以满足，而式(5.6.10)则简化为

$$\tilde{c}(z)=\frac{1}{2}[a^0(z)^2-a^0(-z)^2]c(z)$$

若 a^0 是对称的，即：$a^0_{-n}=a^0_n$，因为 $a^1(\xi)=\sum\limits_n a^0_n(-1)^n e^{-in\xi}=a^0(\pi-\xi)$，则 $a^1(\xi)=\sum\limits_n a^1_n e^{-in\xi}$ 与 $a^0(\xi)$ 关于频率“半带”值 $\xi=\pi/2$ 成镜像对称。因此式(5.6.12)所表示的滤波器被称为“镜像正交滤波器”(QMF：quadrature mirror filter)。在实际应用中，人们选用有限脉冲响应(FIR：finite impluse response)滤波器(仅有限个 a_n 为非零)。遗憾的是，根本不存在 FIRa^0 使 $a^0(z)^2-a^0(-z)^2=2$，于是在该方案中 $\tilde{c}$ 不可能等于 c。但可选择适当的 a^0 使 $a^0(z)^2-a^0(-z)^2$ 接近于 2，从而使 $\tilde{c}\approx c$。目前，关于 QMF 设计的文献很多，读者可参阅近 15 年来的“issues of IEEE Trans. Acoust. speech signal process.”。也有人在方案中增加信号通道数(大于 2)将 QMF 的设计推广(如 GQMF，即推广的 QMF)。

Mintzer(1985)，Smith 和 Barnwell(1986)，Vetterli(1986)分别提出了不同于式(5.6.12)的滤波方案

$$\begin{aligned} a^1(z) &= z^{-1}a^0(-z^{-1}) \\ \tilde{a}^0(z) &= a^0(z^{-1}) \\ \tilde{a}^1(z) &= a^1(z^{-1}) = za^0(-z) \end{aligned} \tag{5.6.13}$$

容易验证上式满足式(5.6.11)，且式(5.6.10)可写成

$$\tilde{c}(z)=\frac{1}{2}[a^0(z)a^0(z^{-1})+a^0(-z)a^0(-z^{-1})]c(z)$$

对于 $z=e^{i\xi}$ 和实序列 a^0_n，上式的方括号部分可表示为

$$\frac{1}{2}[|a^0(e^{-i\xi})|^2+|a^0(-e^{-i\xi})|^2]=\frac{1}{2}[|a^0(\xi)|^2+|a^0(\xi+\pi)|^2]$$

于是存在 a^0 的 FIR 选择使上式恰好为 1，故可在上述子带滤波格式中实现信号的精确重建。Smith 和 Barnwell(1986)将式 a^0[①] 表示的滤波器命名为“共轭正交滤波器(CQF：conjugate quadrature filter)”，但是“CQF”还不像“QMF”那样被众人所认识。

必须指出的是，分解和重建当然不是子带滤波的惟一目的。不然的话，用一根简单的导线代替图 5.10 所示的方案不是更简单、更有效吗？我们必须清楚地认识到：采用滤波方案的目的是在分解和重建过程中实现信号的压缩和处理。在许多应用场合(如图像处理)，经子带滤波后再进行压缩处理将更为方便。当然，经压缩(量化)后的信号是不可能精确重建的[②]，但借助特殊设计的滤波器，则有望在获取有效压缩比的情况下使量化失真最小。对此，将在下一章中作简要介绍。

现在再回到正交小波基。式(5.6.5)和式(5.6.6)的结构分别与式(5.6.8)和式(5.6.9)完全相同。在多分辨分析中，信号的分解和重建过程当然也可图示化为图 5.11。这里，$(\tilde{h})_n = \overline{h_{-n}}$，$(\tilde{g})_n = \overline{g_{-n}}$(如前所述)。若 h_n 为实序列，并考虑 $g_n = (-1)^n h_{-n+1}$，则在选择

$$a^0(z) = h(z^{-1}) \qquad \tilde{a}^0(z) = h(z)$$
$$a^1(z) = g(z^{-1}) = -z^{-1}h(-z) \qquad \tilde{a}^1(z) = g(z) = -zh(-z)^{-1}$$

后，图 5.11 与图 5.10 是一致的。而且只要在 a^1 与 $\tilde{a}^1$ 中稍作符号变化，上式刚好与式(5.6.13)相对应。这表明与多分辨分析相联系的规范正交基均对应一个 CQF 滤波器对，即对应一个可实现精确信号重建的于带滤波方案。然而，这种运算的逆运算过程却不是正确的，因为在多分辨分析的正交基构造中必有 $a^0(1) = \sum_n h_n = 2^{1/2}$(见 5.3.2 节的注：5.)，而在 CQF 中仅存在 $a^0(1)$ 接近但不等于 $2^{1/2}$。另外，目前所讨论的正交小波基均对应一个有无限支集的 $\phi^\#$，因此，h_n 为无限序列。而从应用的角度看，FIR 滤波器是最合适的。问题的关键在于：能否构造正交小波基使之对应有限滤波器？这些滤波器对应怎样的小波基(如：正则小

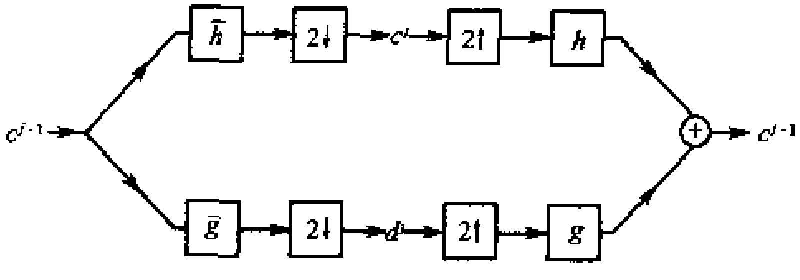


图 5.11 多分辨分析中子带滤波方案的信号分解和重建

---

① 见本章末注 13。

② 见本章末注 14。

波)? 怎样的小波才可用于滤波? 所有这些问题均将在下一章中讨论。

注:

1. 在这里选择一个与 Sobolev 阶梯形空间相同的嵌套的序号(下标越负,空间越大)。这种序号取自由 Grossmann 和 J. Morlet 引入的非正交小波基的记号。尽管它不够标准(Meyer(1990)采用的是与之相反的序号),但与在调和分析中所形成的习惯却是一致的。而且,Beylkin, Coifman 和 Rokhlin(1990)发现:这种序号在数值分析中也最为适用。

2. 在这里,与 Meyer(1990)不一样,未给尺度函数 ϕ 事先规定正则性和衰减性。

3. 方程(5.1.33)表征了所有可能的 $\psi^{\#}$,这一点可参见第 8 章中的引理 8.1.1。

4. 若 ϕ 具有紧支,人们常常喜欢要求 ψ 具有同样的紧支,则式(5.1.35)是惟一可能的选择。

5. 通常,若 ψ 连续,则不会出现这种"病态"。请读者试着找出其他克服这种"病态"的方法。在本书编写快结束的时候,我听说 Lemarie(1990)已证明:若 ψ 是紧支的(不管连续与否),则它必然与一个多分辨分析相联系。他从根本上解决了这一公开的难题。

6. 值得注意的是:$\phi^{\#}$ 与 ϕ 不同,只要 $\phi^{\#}\in V_0$,则 $\phi^{\#}_{j,k}$ 为 V_0 上的规范正交基;且 $\phi^{\#}\in L^1(\mathbb{R})$。另外,只要使 $\hat{\phi}^{\#}(\xi)=\lambda(\xi)\hat{\phi}(\xi)$(其中,$\lambda$ 以 2π 为周期,且对于所有的 $|\xi|\leqslant\pi$, $\lambda(\xi)=\mathrm{Sign}(\xi)e^{i\xi/2}$),$\hat{\phi}^{\#}$ 就是一个 Schwartz 函数。这种 Hilbert 变换方法可用于其他多分辨分析,如 Battle-Lemarie 小波族或下一章将介绍的紧支小波 ψ 的构造中。

7. 若规定 $\hat{\phi}$ 在 $\xi=0$ 处连续。则 m_0 由 $\hat{\phi}$ 惟一确定。

8. $\hat{\phi}$ 连续且 $\hat{\phi}(0)\neq 0$ 蕴涵:$m_0(0)=1$ 且 m_0 在 $\xi=0$ 处连续。于是 $m_0^{\#}$ 在 $\xi=0$ 处也连续。又因为 $|m_0^{\#}(\xi)|^2+|m_0^{\#}(\xi+\pi)|^2=1$,所以 $|m_0^{\#}|$ 在 $\xi=\pi$ 处连续。因此,$|\hat{\psi}(\xi)|=|\overline{m_0^{\#}(\xi/2+\pi)}||\hat{\phi}(\xi/2)|$ 在 $\xi=0$ 处连续(因为 ψ 满足容许条件);这又蕴涵 $m_0^{\#}(\pi)=0$,故 $m_0(\pi)=0$。这给出了式(5.3.20)的另一种推导。

9. 我们证明:若 ϕ 连续且 $|\phi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$,则 $\sum_n c_{2n}=1=\sum_n c_{2n+1}$ 与 $\sum_l \phi(x-l)=$ 常数 $\neq 0$ 等价。

$\Rightarrow$ 定义:$f(x)=\sum_l \phi(x-l)$,ϕ 的衰减性和连续性保证 f 是有定义的且为连续的,于是有

$$f(x)=\sum_l\sum_n c_n\phi(2x-2l-n)=\sum_l\sum_m c_{m-2l}\phi(2x-m)$$
$$=\sum_m\Big(\sum_j c_{m-2j}\Big)\phi(2x-m)=\sum_m \phi(2x-m)=f(2x)$$

所以,f 是连续的以 1 为周期的周期函数,而且有

$$f(x)=f(2x)=\cdots=f(2^n x)=\cdots$$

于是 f 只能为常数。

$\Leftarrow$ $\sum_l \phi(x-l)=C$,蕴涵 $\hat{\phi}(2\pi n)=\delta_{n,0}(2\pi)^{-1/2}C$,然而 $\hat{\phi}(\xi)=m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$,因此

$$0=\hat{\phi}(2\pi(2n+1))=m_0(\pi(2n+1))\hat{\phi}(\pi(2n+1))=m_0(\pi)\hat{\varphi}\pi(2n+1)$$

若 $m_0(\pi)\neq 0$,则对所有的 $n\in\mathbb{Z}$,均有 $\hat{\phi}(\pi(2n+1))=0$,这与条件 $\sum_n|\hat{\phi}(\pi(2n+1))|^2>0$ 相矛盾。故 $m_0(\pi)=0$ 或

$$\sum_n c_{2n}=1=\sum_n c_{2n+1} \qquad \blacksquare$$

10. 一种计算 $\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$ 的傅里叶系数的简单方法是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi' \mathrm{e}^{in\xi}\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\zeta \mathrm{e}^{in\xi}|\hat{\phi}(\xi)|^2$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\phi(x)\overline{\phi(x-n)}$$

11. 证明：

因为 $f(y)=f(x)+\int_x^y f'(z)\mathrm{d}z$，所以，对于 $0\leqslant y\leqslant 2\pi$，有

$$2\pi f(y+2\pi l)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}xf+(x-2\pi l)+\int_0^y\mathrm{d}x\int_x^y\mathrm{d}zf'(z+2\pi l)-\int_y^{2\pi}\mathrm{d}x\int_y^x\mathrm{d}z\, f'(z+2\pi l)$$

于是

$$|f(y+2\pi l)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{2\pi(l+1)}\mathrm{d}x\,|f(x)|+\int_{2\pi}^{2\pi(l+1)}\mathrm{d}z\,|f'(z)|$$

故

$$\sum_l|f(y+2\pi l)|\leqslant(2\pi)^{-1}\int\mathrm{d}x\,|f(x)|+\int\mathrm{d}x\,|f'(x)| \qquad \blacksquare$$

12. 如果仅给定 f 的抽样形式，即仅知道 f 的样值 $f(n)$，则在 $f\in V_0$（即 f 中与 V_0 正交的分量不能恢复）的假定下，内积 $\langle f,\phi_{0,n}\rangle$ 可以通过卷积（滤波）运算来进行。因为 $f=\sum_k\langle f,\phi_{0,k}\rangle\phi_{0,k}$，所以 $f(n)=\sum_k\langle f,\phi_{0,k}\rangle\phi(n-k)$。故有

$$\sum_n f(n)\mathrm{e}^{-in\xi}=\left(\sum_k\langle f,\phi_{0,k}\rangle\phi\mathrm{e}^{-in\xi}\right)\left(\sum_m\phi(m)\mathrm{e}^{-im\xi}\right)$$

也就是说，$\langle f,\phi_{o,k}\rangle$ 是 $\left(\sum_n f(n)\mathrm{e}^{-in\xi}\sum_m\phi(m)\mathrm{e}^{-im\xi}\right)^{-1}$ 的傅里叶系数。由此可得

$$\langle f,\phi_{o,k}\rangle=\sum_n a_{k-n}f(n)$$

其中

$$a_m=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\mathrm{e}^{im\xi}\left(\sum_l\phi(l)\mathrm{e}^{-il\xi}\right)^{-1}$$

13. 为了使用方便，不同于式(5.6.13)，对于 $N\in\mathbf{O}$，选择 $a^1(z)=z^{2N-1}a^0(-z^{-1})$，$\tilde{a}^0(z)=z^{2N}a^0(-z^{-1})$，$\tilde{a}^1(z)=za^0(-z)$，故所有的 $a^j,\tilde{a}^j$ 均为 z 的多项式（不含有负次幂项）。由此可得输出：$\tilde{c}(z)=z^{2N}c(z)$，这表明在信号重建时，信号中包含一个延迟。

14. 这是 Esteban－Galand 型 QMF 滤波器的理论基础：这些滤波器不能实现信号的精确重建，但是可以使重建偏差与量化误差相比小许多。

第 6 章　紧支撑小波的标准正交基

除了 Haar 基，前章的关于标准正交小波基的例子均是无穷支撑的，这是标准正交化的结果（见式 5.3.3）。在构造 ψ 是紧支撑的标准正交小波基时，从 m_0（或等效地，从于带滤波技术——见 5.6 节）而不是从 ϕ 或 V_j 出发是有意义的。在6.1 节中，将讨论如何构造 m_0，使得对某些 $N>0$，式(5.1.20)、式(5.5.5)成立（使 ψ 有正则性的必要条件）。然而，正如 6.2 节和 6.3 节中指出的并不是每一个 m_0 都与标准正交小波基有关。这两节的主要结果归纳总结在 6.3 节中的定理 6.3.6 中。6.4 节包括了一些紧支撑小波产生标准正交基的例子。一般地说，这样获得的标准正交小波基不能写成闭的解析形式。它们的图通过一个称为"级连算法"的算法可计算到任意高的精度，这个算法实际上是计算机辅助设计中所用的"精细算法"。所有这些将在 6.5 节中讨论。

这里的许多材料要追溯到 Daubechies(1988b)；因为后来发现了许多针对这些结果的更好、更简单及一般的证明，我很欣赏这些新的方法。这些不同的方法主要来自于 Mallat(1989)，Cohen(1990)，Lawton(1990，1991)，Meyer(1990)，以及 Cohen、Daubechies 和 Feauveau(1992)；对于与精细方程有关的参考资料则来自于 Cavaretta，Dahmen，和 Micchelli(1991)、以及 Dyn 和 Levin(1990)，以及这些作者的早期论文（见 6.5 节）。

6.1　m_0的构造

本章主要讨论构造紧支小波 ψ 的方法。对小波 ψ，保证其紧支的最简单的方法是选择具有紧支（在它的正交形式中）的尺度函数 ϕ。那么从 h_n 的定义中可以得出

$$h_n=\sqrt{2}\int \mathrm{d}x\phi(x)\overline{\phi(2x-n)}$$

其中仅仅有有限多个 h_n 是非零的，从而 ψ 成为紧支函数的有限线性组合（见式(5.1.34)），因此它也是紧支的。选择 ϕ 和 ψ 两者都有紧支是有好处的，这种好处在于它对相应的于带滤波方法仅使用 FIR 滤波器（见 5.6 节）。

对于紧支撑的 ϕ，2π 周期函数

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-in\xi}$$

变成一三角多项式。正如在第5章中所示(见式(5.1.20)),$\phi_{0,n}$的标准正交化表明

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1 \tag{6.1.1}$$

此处取消了式(6.1.1)“几乎处处”成立的限制,是因为m_0是连续的,如果它几乎处处成立,则式(6.1.1)必须对所有的ξ成立。

我们也对使ϕ和ψ具有合理的正则性感兴趣。由推论5.5.4,这意味着m_0应为如下的形式

$$m_0(\xi)=\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N\widetilde{L}(\xi) \tag{6.1.2}$$

$N\geqslant 1$,$\widetilde{L}$为一三角多项式。注意,甚至在没有正则约束时,也需要式(6.1.2)至少在N为1时成立[①]。合并式(6.1.1)、式(6.1.2),可知需要寻找一个$\cos\xi$的多项式,

$$M_0(\xi)=|m_0(\xi)|^2 \tag{6.1.3}$$

满足

$$M_0(\xi)+M_0(\xi+\pi)=1 \tag{6.1.4}$$

和

$$M_0(\xi)=\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right)^N\widetilde{L}(\xi) \tag{6.1.5}$$

此处$L(\xi)=|\widetilde{L}(\xi)|^2$也是一个$\cos\xi$的多项式。为了我们的目的,将$L(\xi)$写成$\sin^2\frac{\xi}{2}=(1-\cos\xi)/2$形式的多项式是方便的,即

$$M_0(\xi)=\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right)^N p\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right) \tag{6.1.6}$$

在项p中,约束式(6.1.4)变成

$$(1-y)^N p(y)+y^N p(1-y)=1 \tag{6.1.7}$$

这将对所有的$y\in[0,1]$成立,从而对所有的$y\in\mathbb{R}$成立。为了从式(6.1.7)中解出p,利用Bezout定理[②]。

定理6.1.1 如果p_1,p_2为没有共同零点,次数分别为n_1,n_2的两个多项式,那么存在着次数分别为(应为“不大于”,译者注)n_2-1,n_1-1的惟一多项式q_1、q_2,使得

$$p_1(x)q_1(x)+p_2(x)q_2(x)=1 \tag{6.1.8}$$

---

① 见本章末注1。

② 见本章末注2。

证明：

1. 首先证明存在性，惟一性稍后再证。我们假设 $n_1 \geqslant n_2$。因为 degree(p_2) $\leqslant$degree(p_1)，可以找到 degree(a_2) = degree(p_1) − degree(p_2)，degree$(b_2) \leqslant$degree(p_2)的多项式 $a_2(x), b_2(x)$，使得

$$p_1(x) = a_2(x)p_2(x) + b_2(x)$$

2. 类似地，可找到 degree(a_3) = degree(p_2) − degree(b_2)，degree$(b_3) <$ degree(b_2)的多项式 $a_3(x), b_3(x)$，使得

$$p_2(x) = a_3(x)b_2(x) + b_3(x)$$

继续这个过程，在这个最后方程中，用 b_{n-1}代替 p_2，以及用 b_n 代替 b_2，有

$$b_{n-1}(x) = a_{n+1}(x)b_n(x) + b_{n+1}(x)$$

因为 degree(b_n)是严格递减且非负的，所以存在 N 使得 $b_N \neq 0, b_{N+1} = 0$。

$$b_{N-1}(x) = a_{N+1}(x)b_N(x)$$

3. 因为 $b_{N-2} = a_N b_{N-1} + b_N$，从而 b_N 整除b_{N-2}。归纳可得 b_N 整除所有前面的 b_n 和 p_2，于是 b_N 整除 p_1 和 p_2。因为 p_1 和 p_2 没有共同零点，这就得出 b_N 是一个不为零的常数。

4. 现在有

$$\begin{aligned} b_N &= b_{N-2} - a_N b_{N-1} = b_{N-2} - a_N(b_{N-3} - a_{N-1}b_{N-2}) \\ &= (1 + a_N a_{N-1})b_{N-2} - a_N b_{N-3} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

归纳可得

$$b_N = \tilde{a}_{N,k}b_{N-k} + \tilde{\tilde{a}}_{N,k}b_{N-k-1}$$

其中

$$\tilde{a}_{N,1} = -a_N, \tilde{\tilde{a}}_{N,1} = 1, \tilde{a}_{N,k+1} = \tilde{\tilde{a}}_{N,k} - \tilde{a}_{N,k}, \tilde{\tilde{a}}_{N,k+1} = \tilde{a}_{N,k}$$

再一次引用归纳法，得出

$$\text{degree}(\tilde{a}_{N,k}) = \text{degree}(b_{N-k-1}) - \text{degree}(b_{N-1})$$
$$\text{degree}(\tilde{\tilde{a}}_{N,k}) = \text{degree}(b_{N-k}) - \text{degree}(b_{N-1})$$

对 $k = N-1$，发现

$$b_N = \tilde{a}_{N,N-1}p_2 + \tilde{\tilde{a}}_{N,N-1}p_1$$

其中

$$\text{degree}(\tilde{a}_{N,N-1}) = \text{degree}(p_1) - \text{degree}(b_{N-1}) < \text{degree}(p_1)$$
$$\text{degree}(\tilde{\tilde{a}}_{N,N-1}) = \text{degree}(p_2) - \text{degree}(b_{N-1}) < \text{degree}(p_2)$$

(利用了 degree$(b_{N-1}) \geqslant 1$；如果 degree(b_{N-1})为 0，那么 b_N 就为 0。)由此得到 $q_1 = \tilde{\tilde{a}}_{N,N-1}/b_N$，$q_2 = \tilde{a}_{N,N-1}/b_N$ 满足式(6.1.8)且满足所需次数条件。

5. 现在证明惟一性。假设 q_1、q_2 和 $\tilde{q}_1$、$\tilde{q}_2$、是式(6.1.8)的两个解对，两者都

满足次数约束,那么

$$p_1(q_1-\tilde{q}_1)+p_2(q_2-\tilde{q}_2)=0$$

因为 p_1,p_2 没有共同零点,这暗示着 p_2 的每个零点都是 $q_1-\tilde{q}_1$ 的零点,且具有至少相同的重数。如果 $q_1\neq\tilde{q}_1$,那么这意味着 $\deg(q_1-\tilde{q}_1)\geqslant\deg(p_2)$,这是不可能的,因为 $\deg(q_1)$。$\deg(q_2)<\deg(p_2)$所以 $q_1=\tilde{q}_1$,于是立即可得出 $q_2=\tilde{q}_2$。

注意:

1. 为了后面使用方便(第 8 章),我们以更一般的方式叙述 Bezout 定理而不仅限于本章所需。事实上,在更一般的条件下它也成立,即:如果 p_1 和 p_2 有共同的零点,那么当式(6.1.8)的右边项可被 p_1、p_2 的最大公因子整除时,式(6.1.8)仍可解。证明仍然相同,只是现在 b_N 是 p_1、p_2 的最大公因子,而非常数。证明中的讨论是由欧几里德算法构造最大公因子;它不仅用于多项式(在任何分次环中,在代数术语中),还常用于非多项式的框架中。

2. 从 p_1、p_2 的构造中,可明显看出,如果 p_1 和 p_2 是有理系数的,则 q_1 和 q_2 也一样。这个结论在第 8 章中将用到。 □

现在将其应用到式(6.1.7)。由定理 6.1.1,存在着惟一的多项式 q_1、q_2,其次数小于或等于 $N-1$,使得

$$(1-y)^N q_1(y)+y^N q_2(y)=1 \tag{6.1.9}$$

用$(1-y)$替代式(6.1.9)中的 y,则得

$$(1-y)^N q_2(1-y)+y^N q_1(1-y)=1$$

q_1、q_2 的惟一性说明 $q_2(y)=q_1(1-y)$。由此得出 $p(y)=q_1(y)$是式(6.1.7)的解。在这种情况下,甚至不用欧几里德算法便可找到 q_1 的显式

$$\begin{aligned} q_1(y) &= (1-y)^N[1-y^N q_1(1-y)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k}y^k+O(y^N) \end{aligned}$$

这里写出了$(1-y)^{-N}$的泰勒展开式的前N 项。因为 $\text{degree}(q_1)\leqslant N-1$,所以 q_1 等于它的泰勒展开式的前 N 项,即

$$q_1(y)=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N+k-1}{k}y^k$$

这给出了式(6.1.7)的一个显式解(很幸运地,对于 $y\in[0,1]$,它是正的,所以它是$|\tilde{L}(\xi)|^2$ 的一个很好的候选者)。这是惟一的最低次数解,我们用 P_N 来表示[①]。然而存在着许多更高次的解。对于任意一个这样的高阶解,有

$$(1-y)^N[P(y)-P_N(y)]+y^N[P(1-y)-P_N(1-y)]=0$$

---

① 见本章末注 3。

这说明 $P-P_N$ 可被 y^N 整除

$$P(y)-P_N(y)=y^N\tilde{P}(y)$$

且

$$\tilde{P}(y)+\tilde{P}(1-y)=0$$

即,$\tilde{P}$是关于$\frac{1}{2}$反对称的。现将所有的结论总结如下。

命题 6.1.2 形如

$$m_0(\xi)=\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N\tilde{L}(\xi) \tag{6.1.10}$$

的三角多项式 m_0 满足式(6.1.1),当且仅当 $L(\xi)=|\tilde{L}(\xi)|^2$ 能够写成

$$L(\xi)=P(\sin^2\xi/2)$$

其中

$$P(y)=P_N(y)+y^NR\left(\frac{1}{2}-y\right) \tag{6.1.11}$$

$$P_N(y)=\sum_{k=1}^{N-1}\binom{N-1+k}{k}y^k \tag{6.1.12}$$

且 R 是奇多项式,并选择 $y\in[0,1]$时保证 $P(y)\geqslant 0$。

这个命题完全表示了$|m_0(\xi)|^2$ 的特征。然而这里需要的是 m_0 的本身,而不是$|m_0|^2$。所以,如何从 L 中求出平方根呢? Riesz 的一条引理(见 Polya 和 Szego (1971))对我们有帮助。

引理 6.1.3 若 A 为在$\xi\to-\xi$ 的替换下是不变的一个正三角多项式;A 必取

$$A(\xi)=\sum_{m=0}^{M}a_m\cos m\xi,\quad a_m\in\mathbb{R}$$

的形式,那么存在着一个阶数为 M 的三角多项式B

$$B(\xi)=\sum_{M=0}^{M}b_m e^{im\xi},\quad b_m\in\mathbb{R}$$

使得$|B(\xi)|^2=A(\xi)$。

证明:

1. 我们将 $A(\xi)$写成 $A(\xi)=P_A(\cos\xi)$,此处 P_A 是阶数为M 的实系数多项式,这个多项式可以因式分解

$$p_A(c)=\alpha\prod_{j=1}^{M}(c-c_j)$$

其中 p_A 的零点c_j 或是复数对$c_j,\bar{c}_j$ 或单实数。还能写出

$$A(\xi)=e^{+iM\xi}P_A(e^{-i\xi})$$

此处 P_A 是阶为 $2M$ 的多项式。对 $|Z|=1$,有

$$P_A(z)= z^M\alpha\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}-c_j\right)$$

$$=\alpha\prod_{j=1}^{M}\left(\frac{1}{2}-c_jz+\frac{1}{2}z^2\right) \tag{6.1.13}$$

所以式(6.1.13)左边和右边的多项式在 $\mathbb{C}$ 上一致。

2. 如果 c_j 是实数,那么 $\frac{1}{2}-c_jz+\frac{1}{2}z^2$ 的零点为 $c_j\pm\sqrt{c_j^2-1}$。对于 $|c_j|\geqslant 1$,这是 r_j, r_j^{-1} 形式的两个实根(如果 $c_j=\pm 1$,则退化了)。对于 $|c_j|<1$,这两个零点是复共轭的,其模为 1,即它们是 $e^{i\alpha_j}, e^{-i\alpha_j}$ 形式的。由于 $|c_j|<1$,这些零点对应于 A 的实际零点(即,对应于 $A(\xi)=0$ 的值 ξ)。为了不引起与 $A\geqslant 0$ 相矛盾,这些零点必须是偶数重的。

3. 如果 c_j 不是实数,那么把它与 $c_k=\bar{c}_j$ 一起考虑。多项式 $\left(\frac{1}{2}-c_jz+\frac{1}{2}z^2\right)\times\left(\frac{1}{2}-\bar{c}_jz+\frac{1}{2}z^2\right)$ 具有四个零点,$c_j\pm\sqrt{c_j^2-1}$ 和 $\bar{c}_j\pm\sqrt{\bar{c}_j^2-1}$。很容易检验这四个零点各不相同,并构成一组四个根 $z_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j, \bar{z}_j^{-1}$。

4. 因此有

$$P_A(z)=\frac{1}{2}a_M\left[\prod_{j=1}^{J}(z-z_j)(z-\bar{z}_j)(z-z_j^{-1})(z-\bar{z}_j^{-1})\right]$$

$$\cdot\left[\prod_{k=1}^{k}(z-e^{i\alpha k})^2(z-e^{-i\alpha k})^2\right]\cdot\left[\prod_{l=1}^{L}(z-r_l)(z-r_c^{-1})\right]$$

这里,我们重新组合了两组不同类型的零点。

5. 对于单位圆上的 $z=e^{-i\xi}$,有

$$|(e^{-i\xi}-z_0)(e^{-i\xi}-\bar{z}_0^{-1})|=|z_0|^{-1}|e^{-i\xi}-z_0|^2$$

因此

$$A(\xi)=|A(\xi)|=|P_A(e^{-i\xi})|$$

$$=\left[\frac{1}{2}|a_M|\prod_{j=1}^{J}|z_j|^{-2}\prod_{k=1}^{K}|r_k|^{-1}\right]\left|\prod_{j=1}^{J}(e^{-i\xi}-z_j)(e^{-i\xi}-\bar{z}_j)\right|^2$$

$$\cdot\left|\prod_{k=1}^{K}(e^{-i\xi}-e^{i\alpha_k})(e^{-i\xi}-e^{-i\alpha_k})\right|^2\cdot\left|\prod_{l=1}^{L}(e^{-i\xi}-r_l)\right|^2$$

$$=|B(\xi)|^2$$

这里

$$B(\xi)=\left[\frac{1}{2}|a_M|\prod_{j=1}^{J}|z_j|^{-2}\prod_{k=1}^{K}|r_k|^{-1}\right]$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{J}(e^{-2i\xi}-2e^{-i\xi}\mathrm{Re}z_j+|z_j|^2)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{K}(e^{-2i\xi}-2e^{-i\xi}\cos\alpha_j+1)\cdot\prod_{l=1}^{L}(e^{-i\xi}-r_l)$$

很明显是一阶数为 M 的实系数三角多项式。 ■

注意:

1. 这个证明是构造性的。它用到次数为 M 的多项式的因子分解,然而,必须用数值法来求解,并且,如果 M 很大且一些零点相距很近,则可能出问题。注意,在这个证明中,需要分解一个次数仅为 M 的多项式,不像一些其他的过程,它们直接因式分解 P_A,即次数为 $2M$ 的多项式。

2. 这个"求平方根"的过程,在工程文献中也称为谱分解。

3. 多项式 B 是非惟一的! 例如,对于 M 为奇数时,P_A 可能有$\frac{M-1}{2}$组四个一组的复零点和一对实零点。在每四个一组的复零点中,我们既然能选择 $z_j,\bar{z}_j$,也能选择 $z_j^{-1},\bar{z}_j^{-1}$ 来形成 B,而在每个数偶对中,我们既能选择 r_l,也能选择 r_l^{-1}。这就已经有 $2^{(M+1)/2}$种不同的 B。此外,总可用 $e^{in\xi}$乘上 B(n 为 Z 中的任意值)。 □

命题 6.1.2.和引理 6.1.3 告诉我们如何构造所有可能的满足式(6.1.1)和式(6.1.2)的三角多项式 m_0。然而,是否任何一个这样的 m_0 都能导出一个标准正交小波基还不清楚。事实上,许多都不能够。这将在下两节中讨论。读者也可以跳过大部分细节而在 6.3 节的后部分中找到主要结果,它们归纳在定理 6.3.6 中。

6.2 与标准正交小波基一致

从推导一个求待定尺度函数 ϕ 的公式着手,一旦这样做好之后,将检查什么时候这个候选量确实定义了真正的多分辨分析。

如果一个三角多项式 m_0 像 5.1 节中那样与多分辨分析相联系,且如果相应的尺度函数 ϕ 在 $L^{-1}(\mathbb{R})$中,那么知道,对所有的 ξ

$$\hat{\phi}(\xi)=M_0(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2) \tag{6.2.1}$$

(见式(5.1.17)。$\hat{\phi}$和 m_0 的连续性可以去掉"a.e.")。并且,从命题 5.3.2 后的附注知$\hat{\phi}(0)\neq 0$,所以,$m_0(0)=1$。由于式(6.1.1),于是 $m_0(\pi)=0$,由此得出,对所有的 $k\in\mathbb{Z},k\neq 0$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(2k)\pi &= \hat{\phi}(2\,2^l(2m+1)\pi)(\text{对某些 } l\geqslant 0, m\in\mathbb{Z})\\ &= [\prod_{j=1}^{l} m_0(2^{l+1-j}(2m+1)\pi)]m_0((2m+1)\pi\,\hat{\phi}(2m+1)\pi)\\ &= m_0(\pi)\,\hat{\phi}((2m+1)\pi)=0\end{aligned}$$

因为 $\sum_l |\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}$(见式(5.1.19)),这确定了 ϕ 的规范化:$|\hat{\phi}_0|=(2\pi)^{-1/2}$或 $\left|\int dx\phi(x)\right|=1$。我们可方便地选择 ϕ 的位相,使得 $dx\phi(x)=1$。考虑所有这些情况,从式(6.2.1)可得出

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}\xi) \tag{6.2.2}$$

这个无穷乘积是有意义的:因为 $\sum_n |h_n||n|<\infty|$,且 $m_0(0)=1$,$m_0(\xi)=2^{-1/2}\sum_n h_n e^{-in\xi}$ 满足

$$|m_0(\xi)|\leqslant 1+|m_0(\xi)-1|\leqslant 1+\sqrt{2}\sum_n |_n||\sin n\xi/2|$$

$$\leqslant 1+C|\xi|\leqslant e^{C|\xi|}$$

所以

$$\prod_{j=1}^{\infty}|m_0(2^{-j}\xi)|\leqslant \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}C|2^{-j}\xi|\right)\leqslant e^{c|\xi|}$$

因此式(6.2.2)的右边的无穷乘积在紧集中是一致绝对收敛的①。

所有的这些都是可行的,只要 $\phi\in L^1$,且 h_n 具有足够衰减。在目前的情形下,m_0 是一三角多项式(h_n 只有有限多项非零),且只是寻找具有紧支撑的 ϕ。显然地 $\phi\in L^2$,ϕ 的紧支撑意味着 $\phi\in L^1$,于是以上的讨论是可行的。这就得出式(6.2.2)是与在 6.1 节中构造的三角多项式 m_0 相联系的尺度函数的惟一选择(在允许可差一个常数相位因子的意义下)。下面将验证 ϕ 满足一个尺度函数的一些基本要求。

首先,ϕ 是平方可积的。

引理 6.2.1(Mallat(1989))　如果 m_0 是满足式(6.1.1)的以 2π 为周期的函数,且如果 $(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j\xi})$ 几乎处处逐点收敛,那么它的极限$\hat{\phi}(\xi)$在 $L^2(\mathbb{R})$ 中,且 $\|\phi\|_{L^2}\leqslant 1$。

证明:

1. 定义 $f_k(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\left[\prod_{j=1}^{k}m_0(2^{-j\xi})\right]\chi_{[-\pi,\pi]}(2^{-k}\xi)$,

这里

$$\chi_{[-\pi,\pi]}(\zeta)=\begin{cases}1, & |\zeta|\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

那么 $f_k\to\hat{\phi}$几乎处处逐点成立。

2. 此外

① 见本章末注 4。

$$\int d\xi\,|f_k(\xi)|^2 = (2\pi)^{-1}\int_{-2^k\pi}^{2k\pi} d\xi \prod_{j=1}^{k} |m_0(2^{-j}\xi)|^2$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_0^{2^{k+1}\pi} d\xi \prod_{j=1}^{k} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 (\text{由 } m_0 \text{ 的 } 2\pi \text{ 周期性})$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_0^{2^k\pi} d\xi \Big[\prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2\Big]\big[|m_0(2^{-k}\xi)|^2$$

$$+ |m_0(2^{-k}\xi+\pi)|^2\big]$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_0^{2^k\pi} d\xi \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 = \|f_{k-1}\|^2 \quad (\text{由式}(6.1.1))$$

3. 由此得出，对所有的 k

$$\|f_k\|^2 = \|f_{-1}\|^2 = \cdots = \|f_0\|^2 = 1$$

接着，由 Fatou 引理

$$\int d\xi\,|\hat{\phi}(\xi)|^2 \leqslant \limsup_{k\to\infty}\int d\xi\,|f_k(\xi)|^2 \leqslant 1 \qquad \blacksquare$$

第二，因为 m_0 是一三角多项式，以下从 Deslauriers 和 Dubuc(1987)处借鉴来的引理证明 ϕ 是紧支的。

引理 6.2.2 如果 $\Gamma(\xi) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n e^{-in\xi}$，$\sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n = 1$，那么 $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)$ 是一个指数型的整函数。特别地，它是支撑在$[N_1, N_2]$的分布的傅里叶变换。

证明：由 Paley-Wiener 分布函数定理，只需证明 $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)$ 是以

$$\Big|\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)\Big| \leqslant C_1(1+|\xi|^{M_1}\exp(N_1 \mathrm{Im}\xi)) \qquad \text{对 } \mathrm{Im}\xi \leqslant 0$$

$$\Big|\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)\Big| \leqslant C_2(1+|\xi|^{M_2}\exp(N_2 \mathrm{Im}\xi)) \qquad \text{对 } \mathrm{Im}\xi \geqslant 0$$

(对某些 C_1, C_2, M_1, M_2)为界的指数型整函数。

我们仅证第一个界，第二个界的情况完全类似。定义

$$\Gamma_1(\xi) = e^{iN_1\xi}\Gamma(\xi) = \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{n+N_1} e^{-in\xi}$$

那么

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi) = e^{-iN_1\xi}\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi)$$

所以仅需证明 $\mathrm{Im}\xi \leqslant 0$ 时 $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi)$ 有多个多项式有界。

对于 $\mathrm{Im}\zeta \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}|\Gamma_1(\zeta)-1| &\leqslant \sum_{n=0}^{N_2-N_1}|\gamma_{n+N_1}||e^{-in\zeta}-1|\\ &\leqslant 2\sum_{n=0}^{N_2-N_1}|\gamma_{n+N_1}|\min(1,n|\zeta|)\\ &\leqslant C\min(1,|\zeta|)\end{aligned}$$

任取 ξ,其虚部 $\mathrm{Im}\xi\leqslant 0$。如果$|\xi|\leqslant 1$,那么

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma_1(2^{-j}\xi)\right|\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}[1+C2^{-j}]\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}\exp(2^{-j}C)\leqslant e^{C} \tag{6.2.3}$$

如果$|\xi|\geqslant 1$,那么有 $j_0\geqslant 0$ 使得 $2^{j_0}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j_0+1}$,及

$$\begin{aligned}\left|\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma_1(2^{-j}\xi)\right| &\leqslant\prod_{j=1}^{j_0+1}(1+C)\left|\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma_1(2^{-j}2^{-j_0-1}\xi)\right|\\ &\leqslant(1+C)^{j_0+1}e^{C}\\ &\leqslant e^{C}(1+C)\exp[n(1+C)\ln|\xi|/\ln 2]\\ &\leqslant(1+C)e^{C}|\xi|^{\ln(1+C)/\ln 2}\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

合并对$|\xi|\leqslant 1$ 的式(6.2.3)和$|\xi|\geqslant 1$ 式(6.2.4),则建立起所需的多项式界。

到目前为止,所有这些都是好的。但所有这些都不足以定义一个真正的尺度函数。一个反例是

$$m_0(\xi)=\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)(1-e^{-i\xi}+e^{-2i\xi})=\left(\frac{1+e^{-3i\xi}}{2}\right)=e^{-3i\xi/2}\cos\frac{3\xi}{2}$$

它满足式 (6.1.1)以及 $m_0(0)=1$。把它代入式(6.2.2),得到①

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}e^{-3i\xi/2}\frac{\sin 3\xi/2}{3\xi/2}$$

或

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & 0\leqslant x\leqslant 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

这不是一个“好的”尺度函数:尽管 m_0 满足式(6.1.1),但 $\phi_{0,n}(x)=\phi(x-n)$不是标准正交的。另一方面,式(5.1.19)也不满足

$$\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\cos\xi+\frac{2}{9}\cos 2\xi\right]$$

注意,这意味着 $\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=0$,对 $\xi=\frac{2\pi}{3}$,使得甚至式(5.3.2)也不能满足:$\phi_{0,n}$甚至不是它们所张的空间的 Riesz 基②。

---

① 见本章末注 5。

② 见本章末注 6。

为了避免这个缺陷,必须给 m_0 附加另外的条件以保证 ϕ 产生一个真正的多分辨分析。这些条件保证对所有的 ξ,有

$$\sum_l |\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \tag{6.2.5}$$

成立。一旦式(6.2.5)得到满足,那么一切都解决了:空间 $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}; n\in\mathbb{Z}\}$ 构成一个多分辨分析(由 5.3.2 节);在每一个 V_j 中,$(\phi_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$构成一个标准正交基。定义 ψ

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^n \overline{h_{-n+1}}\phi(2x-n) \tag{6.2.6}$$

因为 ϕ 是紧支撑以及因为仅有有限多项 h_n 不等于零,所以 ψ 也是紧支撑的。那么$(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$构成一个 $L^2(\mathbb{R})$上的紧支撑的标准正交小波基。

在深入讨论加于 m_0 上式(6.2.5)成立的条件之前,指出一个有趣的结论:即使式(6.2.5)不满足,由式(6.2.6)定义的函数 ψ 仍然产生一个紧框架,证明见 Lawton(1990)。

命题 6.2.3 令 m_0 为满足式(6.1.1)的一个三角多项式,且 $m_0(0)=1$,又令 ϕ,ψ 为由式(6.2.2)、式(6.2.6)定义的紧支撑 L^2 函数,如通常一样,定义

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$$

那么,对于所有的 $f\in L^2(\mathbb{R})$

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|^2$$

即,$(\psi_{j,k}; j,k\in\mathbb{Z})$构成 $L^2(\mathbb{R})$的一个紧框架。

证明:

1. 首先,式(6.1.1)可以写成

$$\sum_m h_m \overline{h_{m+2k}} = \delta_{k,0} \tag{6.2.7}$$

(见式(5.1.39))。

2. 取 $f\in C^\infty$且为紧支撑。那么,对于所有的 j , $\sum_k |\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2$ 收敛

$$\begin{aligned}\sum_k |\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2 &\leqslant 2^{-j}\sum_k \left[\int dx\, |f(x)|\,|\phi(2^{-j}x-k)|\right]^2 \\ &\leqslant \|f\|_\infty^2 \,|\text{supp}(f)|\, 2^{-j}\sum_k \int_{x\in\text{supp}(f)} dx\, |\phi(2^{-j}x-k)|^2 \\ &\leqslant \|f\|_\infty^2 \,|\text{supp}(f)| \sum_k \int_{y\in 2^{-j}\text{supp}(f)} dy\, |\phi(-k)|^2 \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

选择 K 使得如果$k\geqslant K$,$2^{-j}\text{supp}(f)\cap[2^{-j}\text{supp}(f)+k]$是空集。那么

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{y\in 2^{-j}\text{supp}(f)} dy\,|\phi(y-k)|^2$$

$$= \sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{l=0}^{K-1}\int_{y\in 2^{-j}\mathrm{supp}(f)} \mathrm{d}y\,|\,\phi(y-mK-l)\,|^2$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{K-1}\int \mathrm{d}y\,|\,\phi(y-l)\,|^2$$

（因为，对每一 l，集$(2^{-j}\mathrm{supp}(f)+l+mK)_{m\in\mathbf{Z}}$不重叠）

$$\leqslant K\,\|\phi\|^2$$

同样地，对所有的 j，$\sum_K |\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2$ 收敛。

3. 因为 $\phi=\sum_n h_n\phi_{-1,n}$，$\psi=\sum_n(-1)^n\overline{h_{-n+1}}\phi_{-1,n}$，有

$$\sum_k[\,|\langle f,\phi_{0,k}\rangle|^2+|\langle f,\psi_{0,k}\rangle|^2]$$

$$= \sum_k\sum_{m,n}[h_{n-2k}\overline{h_{m-2k}}+(-1)^{n+m}\overline{h_{-n+1+2k}}h_{-m+1+2k}]\cdot\langle f,\phi_{-1,n}\rangle\langle\phi_{-1,m},f\rangle \tag{6.2.9}$$

很容易检验式(6.2.9)右边是绝对可加的（利用仅有有限多项 h_n 非零），于是可以交换求和的顺序。

4. 如 n,m 是偶数，$n=2r$，$m=2s$，有

$$\sum_k[h_{2r-2k}\overline{h_{2s-2k}}+\overline{h_{-2r+2k+1}}h_{-2s+2k+1}]$$

$$=\sum_k h_{2r-2k}\overline{h_{2s-2k}}+\sum_k\overline{h_{2s-2l+1}}h_{2r-2l+1}\quad（替换\ k=s+r-l）$$

$$=\sum_p h_{2r-p}\overline{h_{2s-p}}=\delta_{r,s}=\delta_{n,m}（由式(6.2.7)）$$

类似地，对 $n=2r+1$，$m=2s+1$ 两者都为奇数时

$$\sum_k[h_{2r+1-2k}\overline{h_{2s+1-2k}}+\overline{h_{-2r+2k}}h_{-2s+2k}]=\delta_{r,s}=\delta_{n,m}$$

5. 如果 $n=2r$ 为偶数，$m=2s+1$ 为奇数，那么

$$\sum_k[h_{2r-2k}\overline{h_{2s+1-2k}}-\overline{h_{-2r+2k+1}}h_{-2s+2k}]$$

$$=\sum_k h_{2r-2k}\overline{h_{2s+1-2k}}-\sum_k\overline{h_{2s+1-2l}}h_{2r-2l}\quad（替换\ k=s+r-l）$$

$$=0=\delta_{n,m}$$

6. 对所有的 m,n，这就证明了

$$\sum_k[h_{n-2k}\overline{h_{m-2k}}+(-1)^{n+m}\overline{h_{-n+1+2k}}h_{-m+1+2k}]=\delta_{m,n}$$

于是对所有的 m,n，有

$$\sum_k[\,|\langle f,\phi_{0,k}\rangle|^2+|\langle f,\psi_{0,k}\rangle|^2]=\sum_m|\langle f,\phi_{-1,m}\rangle|^2$$

通过“嵌套”，有

$$\sum_{j=-J+1}^{J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2=\sum_k|\langle f,\phi_{-J,k}\rangle|^2-\sum_k|\langle f,\phi_{J,k}\rangle|^2 \tag{6.2.10}$$

7. 用上面命题 5.3.1 证明中的 3、4 点中的同样的估计表明，对固定的连续和紧支撑函数 f，对任意小的 ϵ 只要 J 足够大（J 依赖于 f 和 ϵ），则 $\sum_k|\langle f,\phi_{J,k}\rangle|^2\leqslant\epsilon$。类似地，由命题 5.3.2 的证明中的第三点的估计可知

$$\sum_k|\langle f,\phi_{-J,k}\rangle|^2=2\pi\int d\xi\,|\hat{\phi}(2^{-J}\xi)|^2|\hat{f}(\xi)|^2+R \tag{6.2.11}$$

其中 J 足够大时 $|R|\leqslant\epsilon$。因为 $\hat{\phi}$ 在 $\xi=0$ 连续，且 $\hat{\phi}(0)=(2\pi)^{-1/2}$，当 $J\to\infty$ 时，式(6.2.11)的右边第一项收敛于 $\int d\xi\,|\hat{f}(\xi)|^2$（由控制收敛定理：对所有的 ξ，因为由式(6.1.1)知 $|m_0|\leqslant1$，所以 $|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant(2\pi)^{-1/2}|$）。将以上各项代入式(6.2.10)，则对所有的紧支撑 C^∞ 函数 f，有

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2=\|f\|^2$$

因为这些在 L^2 中形成一个稠密集，所以这个结果可通过标准的稠密性论断延拓到整个 $L^2(\mathbb{R})$。 ■

因此无需对 m_0 附加条件，已经有了一个框架常数为 1 的紧框架。由命题 3.2.1，当且仅当 $\|\psi\|=1$，或等价地，对所有 $k\in\mathbb{Z}$，如 $\int dx\psi(x)\psi(x-k)=\delta_{k,0}$ 时，这个框架是标准正交基[①]（利用 $\|\psi_{j,k}\|=\|\psi\|,j,k\in\mathbb{Z}$）。这与条件 $\sum_l|\hat{\psi}(\xi+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}$ 等价 。利用 $|\hat{\psi}(\xi)|=|m_0(\xi/2+\pi)||\hat{\phi}(\xi/2)|$（式(6.2.6)的必然结果），这可写成

$$|m_0(\xi/2+\pi)|^2\alpha(\xi/2)+|m_0(\xi/2)|^2\alpha(\xi/2+\pi)=1 \tag{6.2.12}$$

其中 $\alpha(\zeta)=2\pi\sum_l|\hat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2$。这等效于

$$|m_0(\zeta)|^2\alpha(\zeta+\pi)+|m_0(\zeta+\pi)|^2[\alpha(\zeta)-1]=0 \tag{6.2.13}$$

有 $m_0(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=N_1}^{N_2}h_n e^{-in\zeta}$，$h_{N_1}\neq0\neq h_{N_2}$，使得 $|m_0(\zeta)|^2$ 为一次数为 N_2-N_1 的 $\cos\xi$ 的多项式。另一方面，$\alpha(\zeta)=\sum_l\alpha_l e^{-il\zeta}$，当 $l\geqslant N_2-N_1$ 时，$a_l=(2\pi)^{-1}\int d\xi e^{il\xi}|\hat{\phi}(\xi)|^2=(2\pi)^{-1}\int dx\phi(x)\overline{\phi(x-l)}=0$，因为 $\mathrm{suup}\phi\subset[N_1,N_2]$。由此得出 $\alpha(\zeta)-1$ 是次数为 N_2-N_1-1 的 $\cos\xi$ 的多项式。然而，由式(6.2.13)，

① 见本章末注 7。

当 $|m_0(\zeta)|$ 为零时，$\alpha(\zeta)-1$ 是零($|m_0(\zeta)|^2$ 和 $|m_0(\zeta+\pi)|^2$ 没有共同零点)，于是这个多项式至少具有 N_2-N_1 个零点(计算时重数在内)。因为它是 N_2-N_1-1 次的，因而它必须恒等于零，即 $\alpha(\zeta)\equiv 1$，或 $\sum_l |\hat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}$。这是得到式(6.2.5)是 $\psi_{j,k}$ 构成一标准正交基的充分必要条件的另一种方法。

在上面的非标准正交例子中，当 $m_0(\epsilon)=\frac{1}{2}(1+e^{-3i\epsilon})$，由求 ψ 的式(6.2.6)得出

$$\psi(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 0\leqslant x<\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

在这种情况下，ψ 不是标准的，$\|\psi\|=3^{-1/2}$。如果定义 $\tilde{\psi}=\|\psi\|^{-1}\psi$，那么 $\tilde{\psi}_{j,k}$ 是标准的，且构成一个框架常数为 3 的紧框架：框架的“冗余因子”是 3。对这一点，一旦认识到 $(\tilde{\psi}_{j,k})_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 族可以看成三个扩展的 Haar 基的平移的组合也就不足为奇了。即

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{j,3k} &= D_3\psi_{j,k}^{\text{Haar}}\\ (\tilde{\psi}_{j,3k+1})(x) &= (D_3\psi_{j,k}^{\text{Haar}})(x-1/3)\\ (\tilde{\psi}_{j,3k+2})(x) &= (D_3\psi_{j,k}^{\text{Haar}})(x-2/3)\end{aligned}$$

此处 $(D_3f)(x)=3^{1/2}f(3x)$。

但是，现回到条件式(6.2.5)

$$\sum_l |\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}$$

或它的等价形式

$$\int dx\phi(x)\overline{\phi(x-n)}=\delta_{n,0} \tag{6.2.14}$$

对应于加在 m_0 上的不同条件以保证式(6.2.5)和式(6.2.14)成立，已经提出了几个方法。这些方法中的大部分都要证明引理 6.2.1 中引入的截断函数 f_k(或一些其他的截断族)不仅是逐点的，而且是在整个 $L^2(\mathbb{R})$ 上收敛于 $\hat{\phi}$。因为对每一固定 k，不难证明 $\{f_k(.-n);n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交的，由这个 L^2 收敛即可自然得出式(6.2.14)。为了保证 f_k 能 L^2 收敛面加与于 m_0 上的充分条件有

$$\cdot \inf_{|\xi|\leqslant\pi/2}|m_0(\xi)|>0 \qquad \text{(Mallat(1989))} \tag{6.2.15}$$

或

$$\cdot\ m_0(\xi)=\left(\frac{1+e^{i\xi}}{2}\right)^N \quad \mathscr{L}(\xi)$$

其中

$$\sup_{\xi} | \mathscr{L}(\xi) | \leqslant 2^{N-1/2}(\text{Daubechies}(1988b)) \tag{6.2.16}$$

这两个条件都不是必要的，但两者都包含了许多有趣的例子。比式(6.2.16)更好的$|\mathscr{L}|$的界将导致 ϕ 和 ψ 的饿正则性；这将在第 7 章中详细讨论。因而，便找到了 m_0 的充分必要条件。我们将在下节详细讨论这个问题。

6.3 标准正交的充分必要条件

Cohen(1990)找到了第一个保证 f_k 的 L^2 收敛的关于 m_0 的充分必要条件。Cohen 的条件包括 m_0 的零集的构造。在开始介绍他的结果之前，先介绍一个新的概念。

定义：设集合 K 满足

1. $|K|=2\pi$；

2. 对在$[-\pi,\pi]$中所有的 ξ，存在 $l\in\mathbf{Z}$，使得 $\xi+2\pi l\in K$，则紧集 K 称作为与区间$[-\pi,\pi]\mathrm{mod}2\pi$ 同余。

特别地，这样一个与$[-\pi,\pi]$同余的 K 可看作$[-\pi,\pi]$上一些"剪切和粘贴"的结果。图 6.1 中给出了一个例子。我们现在提出和证明 Cohen 定理。

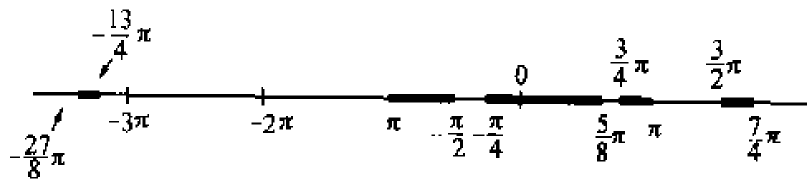


图 6.1 $k=\left[-\frac{27}{8}\pi,-\frac{13}{4}\pi\right]\cup\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{4}\pi,\frac{5}{8}\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$是一个与区间$[-\pi,\pi]\mathrm{mod}2\pi$ 同余的紧集，它可看作从$[-\pi,\pi]$中割出$\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$和$\left[\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$以及将第一项向右移动 4π 后的结果

定理 6.3.1 (Cohen(1990))假设 m_0 为满足式(6.1.1)的一个三角多项式，且 $m_0(0)=1$，又如式(6.2.2)中所示定义 ϕ，那么下列两条等价

1.
$$\int \mathrm{d}x\phi(x)\overline{\phi(x-n)}=\delta_{n,0} \tag{6.3.1}$$

2. 存在一个与区间$[-\pi,\pi]\mathrm{mod}2\pi$ 同余且包含 0 的一个邻域在内的紧集 K，使得

$$\inf_{K>0}\inf_{\xi\in K}|m_0(2^{-k}\xi)|>0 \tag{6.3.2}$$

注意：条件式(6.3.2)可以看作为一个小技巧，实际上很难证明。然而记住 K 是紧支的，因而有界：$K\subset[-R,R]$。由 $m_0(0)=1$ 和 m_0 的连续性，得出：当 k 比

某个 k_0 大时，$|m_0(2^{-k}\xi)|>\frac{1}{2}$，对所有 $|\xi|\leqslant R$ 是一致成立的。这意味着式(6.3.2)可归结为要求 k_0 个函数 $m_0(\xi/2),\cdots,m_0(2^{-k0}\xi)$ 在 K 中无零点，或等价地说，m_0 在 $K/2,K/4,\cdots,2^{-k0}K$ 中无零点。这是很容易达到的。

定理 6.3.1 的证明：

1. 首先证明(1) ⇒ (2)

设式(6.3.1)成立，或等价地，$\sum_l|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2=(2\pi)^{-1}$。那么，对所有的 $\xi\in[-\pi,\pi]$，存在着 $l_\xi\in\mathbb{N}$，使得对在这个邻域中的所有 ζ，

$$\sum_{|l|\leqslant l_\xi}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2\geqslant(4\pi)^{-1}$$

因为$\hat{\phi}$是连续的，有限和 $\sum_{|l|\leqslant l_\xi}|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$ 也是连续的。因而对在$[-\pi,\pi]$中的每一个 ξ，存在着一个邻域$\{\zeta;|\zeta-\xi|\leqslant R_\xi\}$，使得对在这个邻域中的所有 ζ

$$\sum_{|l|\leqslant l_\xi}|\hat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2\geqslant(8\pi)^{-1}$$

因为$[-\pi,\pi]$是紧的，所以存在一个区间$\{\zeta;|\zeta-\xi|\leqslant R_\xi\}$族的有限子集仍然覆盖$[-\pi,\pi]$。令 l_0 为与这个有限覆盖有关的 l_{ξ_j} 的最大值，那么，对于所有的 $\zeta\in[-\pi,\pi]$

$$\sum_{|l|\leqslant l_0}|\hat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2\geqslant(8\pi)^{-1} \tag{6.3.3}$$

2. 由此得出对每一 $\xi\in[-\pi,\pi]$，存在着 $-l_0$ 到 l_0 之间的 l，使得 $|\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|\geqslant[8\pi(2l_0+1)]^{-1/2}=C$。现在，定义集合 $S_l,-l_0\leqslant l\leqslant l_0$

$$S_0=\{\xi\in[-\pi,\pi];|\hat{\phi}(\xi)|\geqslant C\}$$

$$S_l=\{\xi\in[-\pi,\pi];\backslash(\bigcup_{k=-l_0}^{l-1}S_k\cup S_0);|\hat{\phi}(\xi+2\pi)|\geqslant C\},l\neq0$$

集合 $S_l,-l_0\leqslant l\leqslant l_0$ 构成了$[-\pi,\pi]$的一个部分。因为$|\hat{\phi}_{(0)}|=2(\pi)^{-1/2}>C$，又因为$\hat{\phi}$是连续的，所以 S_0 包含零的一个邻域，现定义

$$K=\bigcup_{l=-l_0}^{l_0}\overline{(S_l+2\pi l)}$$

那么 K 很明显是紧的且 mod2π 与区间$[-\pi,\pi]$同余。由构造过程知，在 K 上 $|\hat{\phi}(\xi)|\geqslant C$，且 K 包含零的一个邻域。

3. 其次指出 K 满足式(6.3.2)，正如在此定理证明之前的注意中所指出的那样，只需验证对于 $K\leqslant k\leqslant k_0$ 的有限多个 k，$\inf_{\xi\in K}|m_0(2^{-k}\xi)|>0$。对 $\xi\in K$，有

$$|\hat{\phi}(\xi)| = (\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)|)|\hat{\phi}(2^{-k}\xi)| \tag{6.3.4}$$

有不为零的下界。因为$|\hat{\phi}|$也是有界的,因而式(6.3.4)右边的第一项因子在紧集 K 上就没有零点。作为连续函数的一个有限积,它自身是连续的,所以对 $\xi\in K$

$$\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \geqslant C_1 > 0$$

因为$|m_0\leqslant 1|$,因而,对任意 k,$1\leqslant k\leqslant k_0$,有

$$|m_0(2^{-k}\xi)| \geqslant \prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \geqslant C_1 > 0$$

这证明式(6.3.2)是满足的,从而完成了(1) ⇒ (2)的证明。

4. 现在证明(2)⇒(1)。定义

$$\mu_k(\xi) = (2\pi)^{-1/2}[\prod_{j-1}^{k} m_0(2^{\ j}\xi)]\cdot\chi_K(2^{-k}\xi)$$

此处,χ_K 是K 上的示性函数

$$\chi_K(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi\in K \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

因为 K 包含零的一个邻域,所以,对 $k\to\infty$,$\mu_k\to\hat{\phi}$逐点成立。

5. 由假设,对于 $k\geqslant 1$ 和 $\xi\in K$,$|m_0(2^{-k}\xi)|\geqslant C>0$。另一方面,对任意的 ξ,还有,$|m_0(\xi)-m_0(0)|\leqslant C'|\xi|$;所以$|m_0(\xi)|\geqslant 1-C'|\xi|$。因为 K 是有界的,可找到 k_0 使得当 $\xi\in K$ 和 $k\geqslant k_0$ 时,$2^{-k}C'|\xi|<\frac{1}{2}$。利用当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时,$1-x\geqslant e^{-2x}$,因此发现,对 $\xi\in K$

$$\begin{aligned}|\hat{\phi}(\xi)| &= (2\pi)^{-1/2}\prod_{k=1}^{k_0} |m_0(2^{-k}\xi)| \prod_{k=k_0+1}^{\infty} |m_0(2^{-k}\xi)| \\ &\geqslant 2(\pi)^{-1/2}C^{k_0}\prod_{k=k_0+1}^{\infty}\exp[-2C'2^{-k}|\xi|] \\ &\geqslant (2\pi)^{-1/2}C^{k_0}\exp[-2C'2^{-k_0+1}\max_{\xi\in K}|\xi|] \\ &= C'' > 0\end{aligned}$$

也可将它另外描述为 $\chi_K(\xi)\leqslant|\hat{\phi}(\xi)|/C''$。这蕴涵了

$$\begin{aligned}|\mu_R(\xi)| &= (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{k} |m_0(2^{-j}\xi)|\chi_K(2^{-k}\xi) \\ &\leqslant (C'')^{-1}(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{k} |m_0(2^{-j}\xi)||\hat{\phi}(2^{-k}\xi)|\end{aligned}$$

$$= (C'')^{-1}(2\pi)^{-1/2} |\hat{\phi}(\xi)| \tag{6.3.5}$$

利用控制收敛定理并总结得出在 L^2 中，$\mu_k \to \hat{\phi}$。

6. $K \bmod 2\pi$ 与区间 $[-\pi,\pi]$ 同余意味着对任意 2π 周期函数 f，$\int_{\xi\in K} d\xi \cdot f(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cdot f(\xi) = \int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)$。特别地

$$\begin{aligned}
\int d\xi\, |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} &= (2\pi)^{-1}2^k \int_{\zeta\in K} d\zeta \prod_{l=0}^{K-1} |m_0(2^l\zeta)|^2 e^{-in2^k\zeta} \\
&= (2\pi)^{-1}2^k \int_0^{2\pi} d\zeta \cdot e^{-in2^k\zeta}\Big[\prod_{l=1}^{K-1} |m_0(2^l\zeta)|^2\Big] |m_0(\zeta)|^2 \\
&= (2\pi)^{-1}2^k \int_0^{\pi} d\zeta \cdot e^{-in2^k\zeta}\Big[\prod_{l=1}^{K-1} |m_0(2^l\zeta)|^2\Big]\Big[|m_0(\zeta)|^2 \\
&\quad + |m_0(\zeta+\pi)|^2\Big] \\
&= (2\pi)^{-1}2^k \int_0^{\pi} d\zeta \cdot e^{-in2^k\zeta} \prod_{l=1}^{K-1} |m_0(2^l\zeta)|^2 \\
&= (2\pi)^{-1}2^{k-1} \int_0^{2\pi} d\xi \cdot e^{-in2^{k-1}\xi} \prod_{l=0}^{K-2} |m_0(2^l\xi)|^2 \\
&= \int d\xi\, |\mu_{k-1}(\xi)|^2 e^{-in\xi}
\end{aligned}$$

因为

$$\int d\xi\, |\mu_1(\xi)|^2 e^{-in\xi} = (2\pi)^{-1}2\int_0^{\pi} d\zeta \cdot e^{-2in\zeta} = \delta_{n,0}$$

于是对所有的 k

$$\int d\xi\, |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} = \delta_{n,0}$$

所以

$$\int d\xi\, |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} = \lim_{k\to\infty}\int |\mu_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} = \delta_{n,0}$$

(因为 μ_k 逐点收敛于 $\hat{\phi}$，以及利用式(6.3.5))。这与式(6.2.5)等价，从而与式(6.3.1)也等价。 ■

注意："截断"函数 μ_k 与在引理 6.2.1 的证明中所引用的截断函数 f_k 不一样，但是下面的讨论表明 μ_k 的 L^2 收敛将蕴涵 f_k 的 L^2 收敛。首先，K 包含零的一个邻域，即对某个 α，$0<\alpha<\pi$，$K \supset [-\alpha,\alpha]$。定义：$\upsilon_k = (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{k} m_0(2^{-j}\xi)\chi_{[-\alpha,\alpha]}(2^{-k}\xi)$。因为 $\chi_{[-\alpha,\alpha]} \leqslant \chi_k$，所以可以运用与 μ_k 相同的控制收敛变量以及在 L^2 中，$\upsilon_k \to \hat{\phi}$。因此，对 $k\to\infty$，$\|\mu_k - \upsilon_k\|_{L^2} \to 0$。利用 $K \bmod 2\pi$ 与区间 $[-\pi,$

π]同余，可得 $\| \mu_k - v_k \|_{L^2} = \| f_k - v_k \|_{L^2}$。因此，当 $k \to \infty$ 时，$\| f_k - \hat{\phi} \|_{L^2} \leqslant \| f_k - v_k \|_{L^2} + \| v_k - \hat{\phi} \|_{L^2} \to 0$。 □

注意到，只要 Mallat 条件式(6.2.15)得到满足，就可简单地取 $K = [-\pi, \pi]$，那么 Cohen 条件就自然得到满足，且 $\hat{\phi}_{0,n}$ 就是标准正交的。下面的推论给出了如何应用 Cohen 条件的另一个例子。

推论 6.3.2(Cohen(1990)) 假设 $m_0(0) = 1$ 是满足式(6.1.1)的一个三角多项式，并如式(6.2.2)所示定义 ϕ，如果 m_0 在$[-\pi/3, \pi/3]$没有零点，则 $\phi_{0,n}$ 是标准正交的。

证明：我们只需构造一个满意紧集 K。因为 m_0 在 $\pi/3 < |\xi| \leqslant \pi/2$ 中可能有零点，$K = [-\pi, \pi]$就不再是一个好的选择。但是可以以这种选择作为出发点，并"去掉"这些零点。更精确地说，假设 m_0 的零点在 $\pi/3 < \xi \leqslant \pi/2$ 中且 $\xi_1^+ \leqslant \cdots \leqslant \xi_{L_+}^+$(因为 m_0 是三角多项式，因而这些零点的数目必有限)。同样，有 m_0 在 $-\pi/2 < \xi \leqslant -\pi/3$ 中的零点为 $\xi_{L_-}^- \leqslant \cdots \leqslant \xi_1^-$。对每一 l，取 $I_l^\pm$ 为含 $\xi_l^\pm$ 的一个小开区间与$[-\pi, \pi]$的交，这个小区间足够小，使得 $I_l^\pm$ 相互之间或它们与$[-\pi/3, \pi/3]$不会相交，并使得 $|m_0|_{I_l^\pm} < \frac{1}{2}$(如果 $\xi_{L_+}^+ = \pi/2$，那么 $I_l^\pm$ 将是$[\pi/2 - \varepsilon, \pi/2]$的形式)。定义 K 时从$[-\pi, \pi]$中切去区间 $2I_l^\pm$，并在重新包括他们之前将它们左移或右移 2π，那么

$$K = [-\pi, \pi] \setminus \left\{ \left(\bigcup_{l=1}^{L_+} 2I_l^+ \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{L} 2I_l^- \right) \right\} \cup \cdot \left\{ \bigcup_{l=1}^{L_+} \overline{(2I_l^+ - 2\pi)} \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=1}^{L_-} \overline{(2I_l^- + 2\pi)} \right\} \tag{6.3.6}$$

上式如图 6.2 所示。

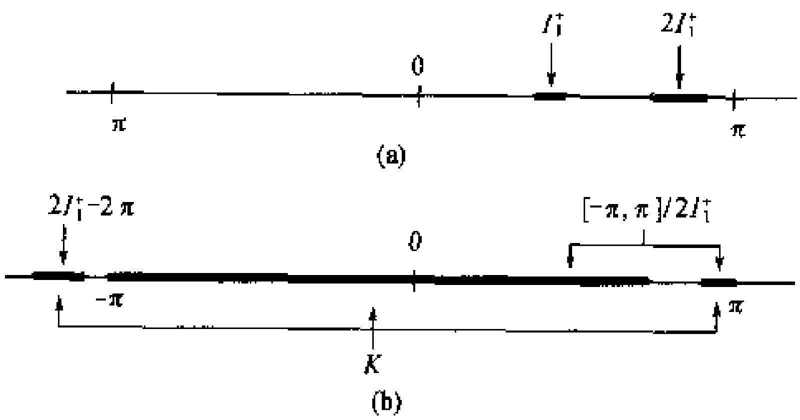


图 6.2 这个图假设 m_0 在 $\pi/3 < |\xi| \leqslant \pi/2$ 仅有一个零点，即 $\xi_1^+ = \frac{5\pi}{12}$，选择 $I_1^+ = \left[\frac{9\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}\right]$；所以 $2I_1^+ = \left[\frac{9\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$。根据式(6.3.6)，紧集 K 为

$$\left[-\frac{15\pi}{12}, -\frac{13\pi}{12}\right] \cup \left[-\pi, \frac{19\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$$

现在,检查 m_0 是否在 $K/2,K/4,\cdots$上有零点。将 K 写成 $K_0\cup K_1$,此处 K_0 是移去了 $2I_l^{\pm}$ 的$[-\pi,\pi]$,K_1 是其余的。由构造知,m_0 在 $K_0/2$ 上无零点。另一方面

$$K_1/2=\left[\bigcup_{l=1}^{L_+}\overline{(I_l^+-\pi)}\right]\cup\left[\bigcup_{l=1}^{L_-}\overline{(I_l^-+\pi)}\right]$$

因为对 $\xi\in\overline{I_l^{\pm}}$,$|m_0(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}$,且 m_0 满足式(6.1.1),对 $\xi\in I_l^{\pm}$,$|m_0(\xi\pm\pi)|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 m_0 在 $K_1/2$ 上也无零点。对所有的 $n\geqslant2$,下面的讨论表明,$2^{-n}K\subset[-\pi/3,\pi/3]$,所以 m_0 在 $2^{-n}K$ 上无零点,这就表明了 K 满足式(6.3.2)。通过构造,K 的"最左边"项是$\overline{2I_1^+ +2\pi}$,"最右边"项是$\overline{2I_1^- +2\pi}$。但是,$I_1^+\subset[\pi/3,\pi/2]$,因而$\overline{2I_1^+}\subset\left[-\frac{4\pi}{3},-\pi\right]$及 $2^{-n}K\subset[-2^{-n+2}\pi/3,2^{-n+2}\pi/3]$。 □

推论 6.3.2 在下列意义下是最优的:不可能找到 $\alpha<\frac{1}{3}$使得 m_0 在$[-\alpha\pi,\alpha\pi]$上没有零点能保证 $\phi_{0,n}$的标准正交性(这点由上面讨论的反例 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{-3i\xi})$说明了)。点 $\xi=\pm\frac{\pi}{3}$起着一个特殊的作用,因为:$m_0\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=0$ 表明对所有的 $k\in\mathbb{Z}$, $\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=0$,与式(6.2.5)相矛盾。这点可检验如下。任取 $k\in\mathbb{N}$(负的 k 可同样处理),那么 k 可用二进制表为:$k=\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j2^j$,其中 $\varepsilon_j=0$ 或 1;为方便,可在 $k=\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_1\varepsilon_0$ 的前部加一对零,便能假设 $\varepsilon_n=\varepsilon_{n-1}=0$。如果 k 是偶数$k=2l$,那么

$$\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=m_0\left(\frac{\pi}{3}+2l\pi\right)\hat{\phi}\left(\frac{\pi}{3}+2l\pi\right)=0。(\text{因为 } m_0\left(\frac{\pi}{3}\right)=0)$$

因而仅仅需要检查 k 是奇数($k=2l+1$)时,或 $\varepsilon_0=1$ 时会发生什么,这时$\frac{2\pi}{3}+2k\pi=\frac{8\pi}{3}+4l\pi$;所以

$$\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=m_0\left(\frac{4\pi}{3}\right)m_0\left(\frac{2\pi}{3}+l\pi\right)\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+l\pi\right)$$

如果 l 是奇数,即 $\varepsilon_1=1$,那么 $m_0\left(\frac{2\pi}{3}+l\pi\right)=m_0\left(\frac{5\pi}{3}\right)=m_0\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$。由此得出只需进一步考察当 $\varepsilon_1=0$ 或 l 为偶数时会发生什么。现继续进行,发现只有二进制表示为 0101…01 的 K 不一定满足$\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=0$。但是如果向后推得足够远,那么将发现 $\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}=00$,使得确实有$\hat{\phi}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)=0$。

这里的整个讨论利用了 m_0 的零点集包含有 $\left\{\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right\}=$

$\left[\left\{\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right\}+\pi\right](\mathrm{mod}2\pi)$以及$\left\{\frac{2\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}\right\}$是在运算 $\xi\to2\xi(\mathrm{mod}\ 2\pi)$下的不变循环,这个运算将$[-\pi,\pi]$映到自身。Th. Cohen(1990b)在他的博士论文中证明了这样一些不变循环是这个问题的根本。

定理 6.3.3 假设 m_0 是满足式(6.1.1)及 $m_0(0)=1$ 的一个三角多项式,并如在式(6.2.2)中所示定义 ϕ,那么在定理 6.3.1. 中的条件(1)和(2)与下述(3)也等价。

(3) 对运算 $\xi\to2\xi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$,在$[-\pi,\pi]$中不存在非平凡环$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$,使得对所有 $j=1,\cdots,n$, $|m_0(\xi_j)|=1$。

注意:

1. 由于式(6.1.1), $|m_0(\xi_j)|=1$ 与 $|m_0(\xi_j+\pi)|=1$ 当然等价。
2. 非平凡指与$\{0\}$不同,$\{0\}$总是一个不变循环。
3. 在以上的例子中,$\xi_1=\frac{2\pi}{3}$, $\xi_2=-\frac{2\pi}{3}$。 ■

对于这个定理和有关结果的证明,可参考 Cohen(1990b)的论文;两个推论中的一个实际上在下面的定理 6.3.5 的证明中的第 6 步得到了证明。

导出加在 m_0 上、保证式(6.2.5)成立的条件的一个完全不同的方法由 Lawton(1990)提出,假设 m_0 是以下的形式

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}h_n e^{-in\xi} \tag{6.3.7}$$

即对于 $n<0$ 或 $n>N$, $h_n=0$; m_0 常可通过乘上 $e^{iN_1\xi}$而得到这种形式,这与 ϕ 经过N_1 的平移相对应。定义 $\alpha_l=\int dx\phi(x)\overline{\phi(x-l)}$。因为 $\mathrm{supp}(\phi)\subset[0,N]$,如果$|l|\geqslant N$, $\alpha_l=0$,则可以重组非平凡的 α_l, $|l|<N$ 为一个$(2N-1)$维向量$(\alpha_{-N+1},\cdots,\alpha_0,\cdots,\alpha_{N-1})$。因为 $\phi(x)=\sqrt{2}\sum_n h_n\phi(2x-n)$,所以 α_l 满足

$$\begin{aligned}\phi(x)&=2\sum_{n,m=0}^{N}h_n\overline{h_m}\int dx\phi(2x-n)\overline{\phi(2x-2l-m)}\\&=\sum_{n,m=0}^{N}h_n\overline{h_m}\alpha_{2l+m-n}\\&=\sum_{k=-N+1}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N}h_n\overline{h_{k-2l+n}}\right)\alpha_k\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

由此得出,如果由

$$A_{lk}=\sum_{n=0}^{N}h_n\overline{h_{k-2l+n}},\qquad -N+1\leqslant l,k\leqslant N-1 \tag{6.3.9}$$

定义$(2N-1)\times(2N-1)$矩阵 A(此处蕴涵着 $m<0$ 或 $m>N$ 时 $h_m=0$),那么

$$A\alpha=\alpha \tag{6.3.10}$$

即 α 是 A 的特征值为 1 的特征向量。注意,1 总是 A 的一个特征值;如果定义 $\beta=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$(1 在中间位置),或 $\beta_l=\delta_{l,0}$,那么由式(6.2.7)

$$(A\beta)_l = \sum_k A_{lk}\delta_{k,0} = \sum_n h_n \overline{h_{n-2l}} = \delta_{l,0} = \beta_l$$

即 $A\beta=\beta$。如果 A 的特征值 1 是非退化的,那么 α 必定是 β 的倍数,即对某些 $\gamma\in\mathbb{C}$, $\int dx\phi(x)\overline{\phi(x-l)}=\gamma\delta_{l,0}$,这说明 $\sum_k|\hat{\phi}(\xi+2\pi k)|^2=(2\pi)^{-1}\gamma$;因为由定义,当 $k\neq0$ 时,$|\hat{\phi}(2\pi k)|=0$(6.2 节的开始部分)及 $\hat{\phi}(0)=(2\pi)^{-1/2}$,由此得出 $\gamma=1$,从而 $\int dx\phi(x)\overline{\phi(x-l)}=\delta_{l,0}$。因而有一非常简单有效的关于 $\phi_{0,n}$ 标准正交性的判据。

定理 6.3.4 (Lawton(1990)) 假定 m_0 是满足式(6.1.1)及 $m_0(0)=1$,且是形如式(6.3.7)的一个三角多项式,又如式(6.2.2)中一样定义 ϕ,如果由式(6.3.9)定义的 $(2N-1)\times(2N-1)$ 矩阵 A 的特征值 1 是非退化的,那么 $\phi_{0,n}$ 是标准正交的。

只有在 A 的特征方程在 1 处有重零点时,$\phi_{0,n}$ 的标准正交性才不成立。这意味着在所有可能的,h_n, $n=0,\cdots,N$(保持 N 不变)的选择中,不好的选择(导致非标准正交的 $\phi_{0,n}$)仅构成一个很"小"的集合(Lawton(1990)对此作了更为精确的描述)。例如对于 $N=3$,其惟一的非标准正交选择(除去一个相因子不计)是 $h_0=h_3=\frac{1}{2}$, $h_1=h_2=0$。

Lawton 条件可通过三角多项式重述。按以前的定义,$M_0(\xi)=|m_0(\xi)|^2$,并且定义如下的作用于以 2π 为周期的函数 f 上的算子 P_0

$$(P_0f)(\xi) = M_0(\xi/2)f(\xi/2) + M_0(\xi/2+\pi)f(\xi/2+\pi)$$

显然,根据式(6.1.1),常值数多项式 1 在 P_0 作用下是不变的。其各部分的傅里叶系数如下

$$M_0(\xi) = \sum_k\Big(\sum_n h_n\overline{h_{n-k}}\Big)e^{-ik\xi}$$

$$M_0(\xi)f(\xi) = \sum_l\Big(\sum_{k,n} h_n\overline{h_{n-k}}f_{l-k}\Big)e^{-ik\xi}$$

所以

$$(P_0f)(\xi) = \sum_l\Big(\sum_{k,n} h_n\overline{h_{n-k}}f_{l-k}\Big)e^{-ik\xi}$$

或

$$(P_0f)l = \sum_{k,n} h_n\overline{h_{n-k}}f_{2l-k} = \sum_m\Big(\sum_n h_n\overline{h_{n-2l+m}}\Big)f_m$$

从本质上讲,上式和式(6.3.8)是相同的(这里并没有假定当 $|m|>N$ 时 $f_m=0$,所以不完全相同)。因此,如果知道 P_0 作用下不变的三角多项式只有常数,Lawton

条件就得到了满足。

现在还不清楚 Lawton 条件是否能成为判定矩阵 A 的特征值 1 是否有不同于 β 的特征向量 α 存在的可能性。但在 1990 年春，Cohen 和 Lawton 分别独立地证明，他们的条件是相互等价的(参考 Cohen、Daubechies、Feauveau(1992)定理 4.3；还可以参考 Lawton(1991))。这蕴涵了 Lawton 条件是充分的。

定理 6.3.5 设 m_0 是个满足式(6.1.1)的三角多项式且 $m_0(0)=1$，如果存在一个紧支集 $K \bmod 2\pi$ 与$[-\pi,\pi]$同余，且包含 0 的一个邻域在内，使得 $\inf_{k\geq 0}\inf_{\xi\in K}|m_0(2^{-k}\xi)|>0$，那么 P_0 作用下不变的三角多项式只能是常数。

注意：只需证明其等价就可以了。如果以(L)代表 Lawton 条件，(C)代表 Cohen 条件，通过 p_0 表示的 Lawton 条件用(P)代替，以(O)表示 $\phi_{0,n}$ 的标准正交性条件，由于知道

$$(P)\Rightarrow(L)\Rightarrow(O)\Rightarrow(C)$$

故只需推导出$(C)\Rightarrow(P)$就可以证明上述四条件是相互等价的。 □

定理 6.3.5 的证明：

1. 将证明，存在一个非常量的三角多项式 f 在 P_0 作用下不变与存在一个具备所有期望特性的紧支集 K 是相互矛盾的。设 f 是一个这样的非常量三角多项式，它在 P_0 作用下不变。定义 $f_1(\xi)=f(\xi)-\min_\zeta f(\zeta)$，$f_2(\xi)=-f(\xi)+\max_\zeta f(\zeta)$。因 f 不是常量，则在 f_1,f_2 中至少存在一个 $f_j(0)\neq 0$，取出使 $f_j(0)\neq 0$ 的 j，并定义 $f_0=f_j$，则 f_0 是非负的，$f_0(0)\neq 0$，f_0 至少存在一个零点，并且 f_0 在 P_0 作用下不变。

2. 下面探求 f_0 的零点集合，它有一个独特结构。若 $f_0(\xi)=0, 0\neq\xi\in[0,2\pi]$，则

$$0=f_0(\xi)=(P_0f_0)(\xi)=M_0(\xi/2)f_0(\xi/2)+M_0(\xi/2+\pi)f_0(\xi/2+\pi)$$

这里 m_0,f_0 都是非负的，并且根据式(6.1.1)，$M_0(\xi/2)$、$M_0(\xi/2+\pi)$不能同时为 0，所以 $f_0(\xi/2)$、$f_0(\xi/2+\pi)$只有一个等于 0。先找到 f_0 的一个零点，$0\neq\xi_1\in[0,2\pi]$，则可以找到$[0,2\pi]$内与之相联系的零点链 $\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots$，并且有性质 ξ_{j+1}或者等于$\dfrac{\xi_j}{2}$，或者等于$\dfrac{\xi_j}{2}+\pi$，或等价于 $\xi_j=\tau\xi_{j+1}$，其中 τ 是$[0,2\pi]$内 $\xi\to 2\xi \bmod (2\pi)$的变换，它将$[0,2\pi]$映射到$[0,2\pi]$本身。作为一个三角多项式，f_0 只有有限多的零点，因此其零点链不会无限延伸下去。注意到链中至少有两个元素存在，因为 $\xi_2=\xi_1$，将意味着 $\xi_1=0$，令 r 是递归刚开始出现时的下标，例如，$\xi_r=\xi_k$，对于某 $k<r$ 时成立，则必有 $k=1$，因为 $k>1$ 将导致 $\xi_1=\tau^{k-1}\xi_k=\tau^{k-1}\xi_r=\xi_{r-k}+1, 1<r-k+1<r$，故 r 不会是递归刚开始出现处的下标。接下来是一个零点的循环，$\xi_1,\cdots,\xi_{r-1}$，满足当 $j=1,\cdots,r-2$ 时，$\tau\xi_{j+1}=\xi_j$ 以及 $\tau\xi_1=\xi_{r-1}$。同时对该循环中的任一零点有 $\tau^{r-1}\xi_j=\xi_j$。

3. 如果这个零点循环没有用完零点集合中除 0 以外的所有零点,那么,可以找到 $0\neq\zeta_1\neq\xi_j,j=1,\cdots,r-1$,使 $f_0(\zeta_1)=0$,这可以重新作为一个零点序列 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_l,\cdots$,这个新序列中的每一个零点必须不同于所有的 ξ_j,这是因为若 $\zeta_l=\xi_j$ 将意味着 $\zeta_1=\tau^{l-1}\zeta_l=\tau^{l-1}\xi_j$。亦即,$\zeta_1$ 将等于某个 ξ_k。由上面同样的讨论,ζ_1 就会产生一个 f 的零点循环,在 τ 下不变并且与第一个零点循环不相交。可以持续产生这样的零点序列直到用完 f_0 有限的零点集为止,这样 f_0 的零点集合就是由对 τ 不变的有限的零点循环集的并行包成。

4. 如果 $f_0(\xi)=0$,则必有 $f_0(\xi+\pi)\neq0$,事实上,因为 $\tau\xi=\tau(\xi+\pi)$,在 $f_0(\xi)=0=f(\xi+\pi)$的条件下,ξ 和 $\xi+\pi$ 将属于同一个零点循环,如果此循环的长度为 n,则有 $\xi=\tau^n\xi=\tau^{n-1}\tau\xi=\tau^{n-1}\tau(\xi+\pi)=\xi+\pi$,这是不可能的。

5. 最后说明,如果 $f_0(\xi)=0$,则 $M_0(\xi+\pi)=0$。事实上,对于任意 $\xi,f_0(\xi)=0$,$\tau\xi$ 同样是f_0 的一个零点,并且它满足

$$0=f_0(\tau\xi)=(P_0f)(\tau\xi)=M_0(\xi)f(\xi)\neq M_0(\xi+\pi)f(\xi+\pi)$$

因为 $f_0(\xi)=0$ 且 $f_0(\xi+\pi)\neq0$,这意味着 $M_0(\xi+\pi)=0$,因而 $m_0(\xi+\pi)=0$。因此 f_0 的存在蕴涵了循环 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的存在,对于 τ,有 $\xi_j=\tau\xi_{j+1},j=1,\cdots,n-1$, $\xi_1=n\xi_n$,故 $M_0(\xi_j+\pi)=0$ 对所有 j 成立。因 $f_0(0)\neq0$,所以有 $\xi_j\neq0$。

6. 现在指出,m_0 的零点 $\xi_j+\pi$ 的存在与 k 的存在是不相容的。因为 $\tau\xi_{j+1}=\xi_j,\tau\xi_n=\xi_1$,并且特别地 $\xi_j=\tau^n\xi_j$,有 $\xi_j=2\pi\chi_j,\chi_j\in[0,1]$。其二进制表示形式如下

$$\begin{aligned}
x_1 &= .d_1d_2\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots(d_j=0\text{ 或 }1)\\
x_2 &= .d_2\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots\\
&\vdots\\
x_n &= \qquad .d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots
\end{aligned}$$

因 $\xi_1\neq0$,因此并非所有 d_j 都为 0,仅从这一点出发,对于 $d=0$ 或 $d=1$ 定义 $\bar{d}=1-d$。则 $\xi_j+\pi=2\pi y_j$, mod2π,其中 y_j 给定如下:

$$\begin{aligned}
y_1 &= .\bar{d}_1d_2d_3\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots\\
y_2 &= .\bar{d}_2d_3\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots\\
&\vdots\\
y_n &= \qquad .\bar{d}_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n
\end{aligned}$$

我们有 $m_0(2\pi y_j)=0,j=1,\cdots n$。假如紧支集 K 存在并且有所有所期望的特性,则将有整数 l 存在,其二进制展开形式至多含有预先规定的数字个数 L(L 仅由K 的大小决定)。因此 $2\pi y=2\pi(2y_1+l)$将满足 $m_0(2\pi2^{-k}y)\neq0$ 所有的 $k\geq0$,有

$$y=e_L\cdots e_2e_1\cdot d_2d_3\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots$$

其中 $e_j=1$ 或 $0,j=1,\cdots,L$。还可写成如下形式

$$y = e_{L+n}\cdots e_{L+1}e_L\cdots e_2e_1 \cdot d_2d_3\cdots d_nd_1\cdots d_nd_1\cdots d_n\cdots$$

此处 $e_j=1$ 或 0,对 $j=1,\cdots,L$ 且当$j>L$ 时 $e_j=0$。$2^{-k}y$ 是十进制小数点左移而得。由于 m_0 以 2π 为周期,故仅仅是在结尾,即,$2^{-k}y$ 在十进制小数点右边的展开部分,决定 $m_0(2\pi 2^{-k}y)$是否为零。如果 $e_1=\bar{d}_1$,则 $y/2$ 将与 y_1 有的同样小数部分,这将导致 $m_0(2\pi y/2)=0$。但因为 $m_0(2\pi y/2)\neq 0$,故 $e_1=d_1$,同样可得 $e_2=d_n, e_3=d_{n-1}$,等等。同样对某个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$时,$e_{L+1},\cdots,e_{L+n}$分别等于 $d_k,d_{k-1},\cdots,d_1,d_n,\cdots,d_{k+1}$成立。因 d_j 不全等于 0,而 $e_{L+1}=\cdots=e_{L+n}=0$,这是互相矛盾的。最终得证。 □

由定理6.3.5结束了关于 m_0 的充分必要条件的讨论,下面的定理总结了6.2节和6.3节的内容。

定理 6.3.6 假设 m_0 是个三角多项式,满足$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$ 和 $m_0(0)=1$,定义 ϕ,ψ 如下

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$$

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\hat{\phi}(\xi/2)$$

则 ϕ,ψ 是紧支撑L^2 函数,它满足

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_n h_n\phi(2x-n)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^n h_{-n+1}\phi(2x-n)$$

其中 h_n 由 m_0 定义如下

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-in\xi}$$

且 $\psi_{j,k}(x)=2^{-1/2}\psi(2^{-j}x-K), j,k\in\mathbb{Z}$ 构成了 $L^2(\mathbb{R})$上的框架常数为1的紧框架。此框架构成了 $L^2(\mathbb{R})$的标准正交小波基的充分必要条件是 m_0 满足以下列等价条件之一:

- 存在紧支集 K,它 mod2π 与$[-\pi,\pi]$同余且含有0的一个邻域在内,使得

$$\inf_{k>0}\inf_{\xi\in K}|m_0(2^{-k}\xi)|>0$$

- 在$[0,2\pi]$内不存在非平凡的循环$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$,它在 $\tau:\xi\to 2\xi$ mod2π 下不变,使得 $m_0(\xi_j+\pi)=0$,对所有的 $j=1,\cdots,n$ 成立。
- 四元素

$$A_{l,k} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h_n\overline{h_{k-2l+n}}\quad -(N_2-N_1)+1\leqslant l,k\leqslant(N_2-N_1)+1$$

(其中,假设 $h_n=0$,对 $n<N_1$ 或 $<N_2$)

构成的$[2(N_2-N_1)-1]\times[2(N_2-N_1)-1]$阶矩阵 A 的本征值1是非退化的。

从子带滤波的观点来看,该定理告诉我们如果高通滤波器在直流时有段空白($m_0(\pi)=0$,因此当适当选择相位时 $m_0(0)=1$)时,经常都有相应的正交小波基。这种对应性只在极偶然情况下不存在。就像后两个等价充要条件所说明的那样。在实际的应用中,人们经常喜欢使用滤波器对,并要求其中的低通滤波器在 $|\xi|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内没有零点,这是以证明 $\psi_{j,k}(x)$ 是一个标准正交小波基。下面,将举例说明。

6.4 生成正交小波基的紧支撑小波的例子

本节所给出的例子都是通过对式(6.1.1)在不同的 N 与 R 选择进行谱分解而得到的。除了 Haar 基外,没有 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的公式表达式,下节将解释 ϕ 与 ψ 的图是如何绘制出来的。

Daubechies(1988b)构造的第一族例子对应于式(6.1.6)中的 $R\equiv0$,其谱分解是从 $L(\xi)=P_n(\sin^2\xi/2)$ 得到 $\mathscr{L}(\xi)$ 并保留在单位圆上零点,对于每个 N,对应的${}_Nm_0$ 有 $2N$ 个非零系数。可以适当选择${}_Nm_0$ 的相位以使

$$_Nm_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{2N-1}{}_Nh_n\mathrm{e}^{-in\xi}$$

表 6.1 列出了 N 从 2 到 10 的${}_Nh_n$。为了提高实现的速度,保留式(6.1.10)的因子分解形式应该是有益的:因为滤波器 $\mathscr{L}$ 要比 m_0 短得多(采用 N 而不是 $2N$),而另一个因子的滤波器$\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}$又很容易实现。表 6.2 所列即为 $N=2$ 到 10 的 $\mathscr{L}(\xi)$的系数,图 6.3 表示的是 $N=2,3,5,7,9$ 的${}_N\phi$,${}_N\psi$ 的图像,可以看出,${}_N\phi$ 与${}_N\psi$ 的支集宽度都是 $2N-1$,它们的正则性则随着 N 增大而增高。事实上,可以证明,当 N 很大时,${}_N\phi,{}_N\psi\in C^{\mu N}$,其中 $\mu\approx2$。

表 6.1

具有极大相位及与其支集宽度相容的最高零矩数目的紧支撑小波滤波器(低通滤波器)系数${}_Nh_n$,${}_Nh_n$ 已规范化使得 $\sum_n{}_Nh_n=\sqrt{2}$

	n	${}_Nh_n$		n	${}_Nh_n$
$N=2$	0	0.4829629131445341	$N=4$	0	0.2303778133088964
	1	0.8365163037378077		1	0.7148465705529154
	2	0.2241438680420134		2	0.6308807679398587
	3	−0.1294095225512603		3	−0.0279837694168599
$N=3$	0	0.3326705529500825		4	−0.1870348117190931
	1	0.8068915093110924		5	0.0308413818355607
	2	0.4598775021184914		6	0.0328830116668852
	3	−0.1350110200102546		7	−0.0105974017850690
	4	−0.0854412738820267	$N=5$	0	0.1601023979741929
	5	0.0352262918857095		1	0.6038292697971895

（续）

	n	$\sqrt{2}h_n$
N=5	2	0.7243085284377726
	3	0.1384281459013203
	4	−0.2422948870653823
	5	−0.0322448695846381
	6	0.0775714938400459
	7	−0.0062414902127983
	8	−0.0125807519990820
	9	0.0033357252854738
N=6	0	0.1115407433501095
	1	0.4946238903984533
	2	0.7511339080210959
	3	0.3152503517091982
	4	−0.2262646939654400
	5	−0.1297668675672625
	6	0.0975016055873225
	7	0.0275228655303053
	8	−0.0315820393174862
	9	0.0005538422011614
	10	0.0047772575109455
	11	−0.0010773010853085
N=7	0	0.0778520540850037
	1	0.3965393194818912
	2	0 7291320908461957
	3	0.4697822874051889
	4	−0.1439060039285212
	5	−0.2240361849938412
	6	0.0713092192668272
	7	0.0806126091510774
	8	−0.0380299369350104
	9	−0.0165745416306655
	10	0.0125509985560986
	11	0.0004295779729214
	12	−0.0018016407040473
	13	0.0003537137999745
N=8	0	0.0544158522431072
	1	0.3128715909143166
	2	0.6756307362973195
	3	0.5853546836542159
	4	−0.0158291052563823
	5	−0.2840155429615824
	6	0.0004724845739124
	7	0.1287474266204893
	8	−0.0173693010018090
	9	−0.0440882539307971
N=8	10	0.0139810279174001
	11	0.0087460940474065
	12	−0.0048703529934520
	13	−0.0003917403733770
	14	0.0006754494064506
	15	−0.0001174767841248
N=9	0	0.0380779473638778
	1	0.2438346746125850
	2	0.6048231236900955
	3	0.6572880780512736
	4	0.1331973858249883
	5	−0.2932737832791663
	6	−0.0968407832229492
	7	0.1485407493381256
	8	0.0307256814793385
	9	−0.0676328292643279
	10	0.0002509471148340
	11	0.0223616621236798
	12	0.0047232047577518
	13	−0.0042815036824635
	14	0.0018476468830563
	15	0.0002303857635232
	16	−0.0002519631889427
	17	0.0000393473203163
N=10	0	0.0266700579005473
	1	0.1881768000776347
	2	0.5272011889315757
	3	0.6884590394534363
	4	0.2811723436605715
	5	−0.2498464243271598
	6	−0.1959462743772862
	7	0.1273693403357541
	8	0.0930573646035547
	9	−0.0713941471663501
	10	−0.0294575368218399
	11	0.0332126740593612
	12	0.0086065535669870
	13	−0.0107331754833007
	14	0.0013953517470689
	15	0.0019924052951925
	16	−0.0006858569949564
	17	−0.0001164668551285
	18	0.0000935886703202
	19	−0.0000132642028945

表 6.2

$N=2\sim10$ 的 $\sqrt{2}\mathscr{L}(\xi)=\sum\limits_n l_n e^{-in\xi}$ 的系数 l_n，规范化 $\sum\limits_n l_n=\sqrt{2}$

$N=2$	1.93185165258
	−0.517638090205
$N=3$	2.6613644236
	−1.52896119631
	0.281810335086
$N=4$	3.68604501294
	−3.30663492292
	1.20436190091
	−0.169558428561
$N=5$	5.12327673517
	−6.29384704236
	3.41434077007
	−0.936300109646
	0.106743209135
$N=6$	7.13860757441
	−11.1757164609
	8.04775526289
	−3.24691364198
	0.719428097459
$N=7$	−0.0689472694597
	9.96506292288
	−18.9984075665
	17.0514392132
	−9.03858510919
	2.93696631047
	−0.547537574895
	0.0452753663967
$N=8$	13.9304556142
	−31.3485176398
	33.6968524121
	−22.07104076339
	0.38930245651
	−2.56627196249
	0.413507501939
	−0.0300740567359
$N=9$	19.4959090503
	−50.6198280511
	63.3951659783
	−49.3675482281
	25.8600363319
	−9.24491588775
	2.18556614566
	−0.310317604756
	0.0201458280019
$N=10$	27.3101392901
	−80.408349622
	114.98124563
	−103.671381722
	64.3509475067
	−28.2911921431
	8.74937688138
	−1.82464995075
	0.231660236047
	−0.013582543764

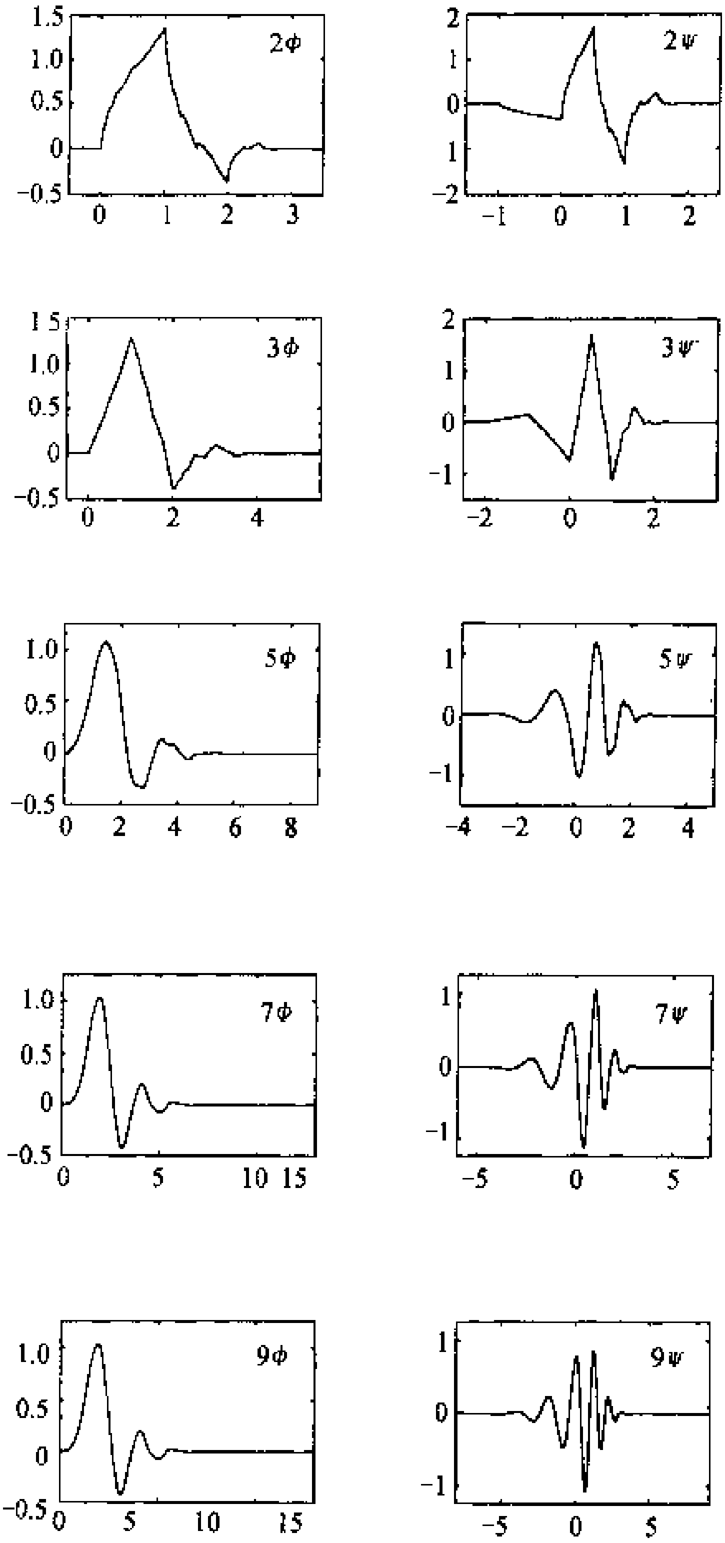


图 6.3　$N=2,3,5,7,9$ 时，具有极大相位选择及相对于其支撑宽度有极大零矩数目的紧支撑尺度函数${}_N\phi$ 与紧支撑小波${}_N\psi$ 的图像

在谱计算中系统地保留下来的单位圆上的零点，相当于在$|m_0|^2$固定的情形下选择了所有可能的滤波器中具有“最小相位的滤波器”m_0。它对应的图 6.3 中ϕ和ψ具有及其显著的不对称性。虽然，正如在第 8 章将要看到的那样，在紧支撑标准正交小波基下(除 Haar 基外)完全对称的ϕ、ψ是不可能得到的，然而，其他相位的选择则可以减小这种不对称性。表 6.3 列出了$N=3$到 9 的对应于最小不对称性的ϕ、ψ的h_n，它们分别对应了表 6.1 中的$|m_0|^2$的不同的平方根m_0。图6.4 给出了对应的ϕ、ψ的图像。

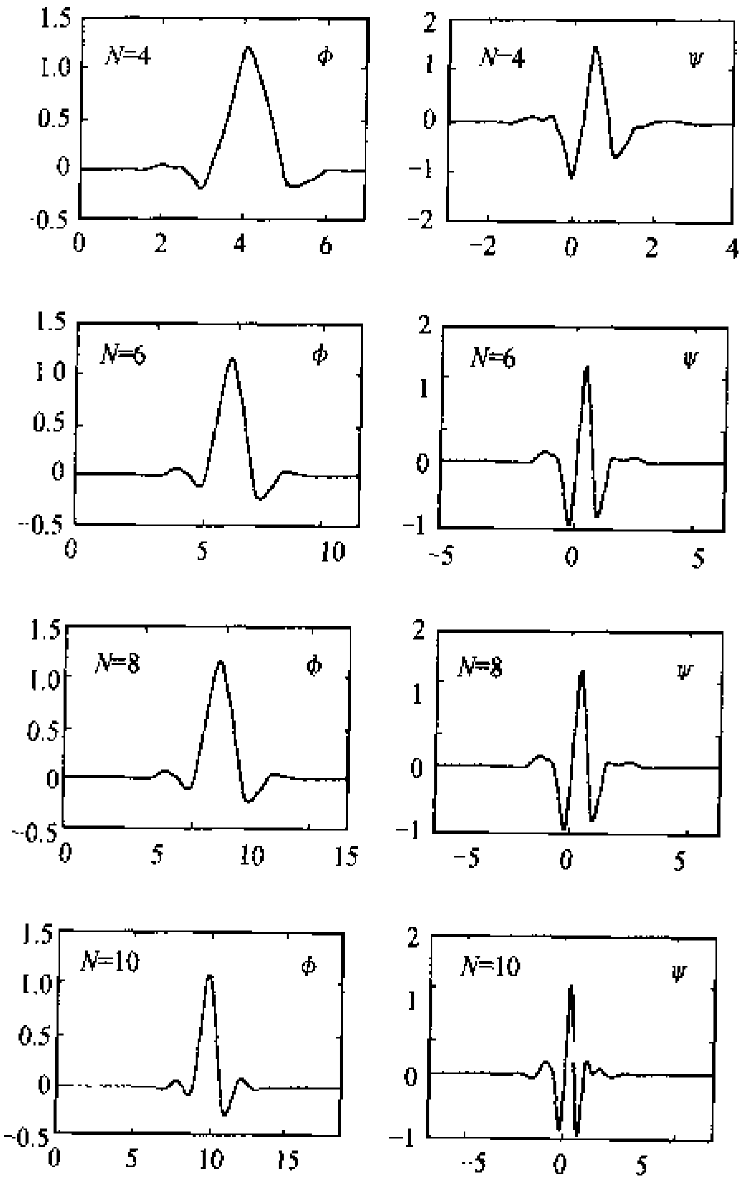


图 6.4　$N=4,6,8,10$ 时的具有极大零矩数的“最小不对称”紧支撑尺度函数ϕ与小波ψ的图像

表 6.3

$N=4\sim10$ 的具有极大零矩数的"最小不对称"的紧支撑小波的低通滤波器系数。此处所列的是 $C_{N,n}=\sqrt{2}h_{N,n}$；有 $\sum_n C_{N,n}=2$

	n	$C_{N,n}$		n	$C_{N,n}$
$N=4$	0	−0.107148901418	$N=7$	8	1.085782709814
	1	−0.041910965125		9	0.408183939725
	2	0.703739068656		10	−0.198056706807
	3	1.136658243408		11	−0.152463871896
	4	0.421234534204		12	0.005671342686
	5	−0.140317634179		13	0.014521394762
	6	−0.017824701442	$N=8$	0	0.002672793393
	7	0.045570345896		1	−0.000428394300
$N=5$	0	0.038654795955		2	−0.021145686528
	1	0.041746864422		3	0.005386388754
	2	−0.055344186117		4	0.069490465911
	3	0.281990696854		5	−0.038493521263
	4	1.023052966894		6	−0.073462508761
	5	0.896581648380		7	0.515398670374
	6	0.023478923136		8	1.099106630537
	7	−0.247951362613		9	0.680745347190
	8	−0.029842499869		10	−0.086653615406
	9	0.027632152958		11	−0.202648655286
$N=6$	0	0.021784700327		12	0.010758611751
	1	0.004936612372		13	0.044823623042
	2	−0.166863215412		14	−0.000766690896
	3	−0.068323121587		15	−0.004783458512
	4	0.694457972958	$N=9$	0	0.001512487309
	5	1.113892783926		1	−0.000669141509
	6	0.477904371333		2	−0.014515578553
	7	−0.102724969862		3	0.012528896242
	8	−0.029783751299		4	0.087791251554
	9	0.063250562660		5	−0.025786445930
	10	0.002499922093		6	−0.270893783503
	11	−0.011031867509		7	0.049882830959
$N=7$	0	0.003792658534		8	0.873048407349
	1	−0.001481225915		9	1.015259790832
	2	−0.017870431651		10	0.337658923602
	3	0.043155452582		11	−0.077172161097
	4	0.096014767936		12	0.000825140929
	5	−0.070078291222		13	0.042744433602
	6	0.024665659489		14	−0.016303351226
	7	0.758162601968		15	−0.018769396836

（续）

	n	$C_{N,n}$		n	$C_{N,n}$
$N=9$	16	0.000876502539	$N=10$	9	1.088251530500
	17	0.001981193736		10	0.542813011213
$N=10$	0	0.001089170447		11	−0.050256540092
	1	0.000135245026		12	−0.045240772218
	2	−0.012220642630		13	0.070703567550
	3	−0.002072363923		14	0.008152816799
	4	0.064950924579		15	−0.028786231936
	5	0.016418869426		16	−0.001137535314
	6	−0.225558972234		17	0.006495728375
	7	−0.100240215031		18	0.000080661204
	8	0.667071338154		19	−0.000649589896

对上面的例子，图 6.5 给出了 $N=2$、6 和 10 时 m_0（作为 ξ 的函数）的图像。从它们这些标准正交基所对应的子带滤波器在 0 到 π 以内的变化相当平坦，但在接近 $\frac{\pi}{2}$ 的过渡域中，其变化都是很“快捷”的。谨慎选择式(6.1.1)的 R 可使滤波器在过渡点处变得更陡。图 6.6 显示了 $N=2$ 和选 R 为三次式使得 $|m_0(\xi)|^2$ 在 $\xi=7\pi/9(140^\circ)$ 处有零点的 $|m_0(\xi)|$ 的图像。这更接近于一个真实的子带编码滤

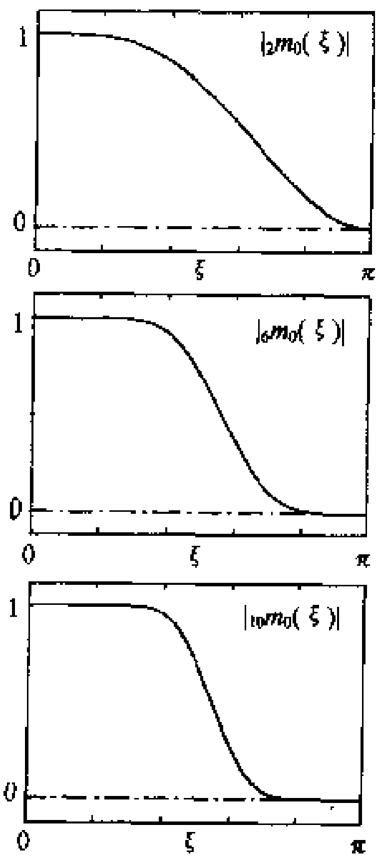


图 6.5　$N=2,6,10$ 时，与表 6.1 或表 6.3 中的滤波器相对应的 $|m_0(\xi)|$ 之图像

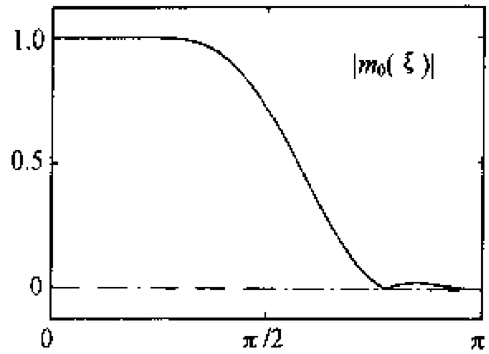


图 6.6　对应于 $N=2$ 和 $m_0(7\pi/9)=0$ 的 8 段(8 - tap)滤波器$|m_0(\xi)|$的图像

波器。其对应的"最小不对称"函数 ϕ 的图像显示在图 6.7 中,它较之比$_4\phi$(有相同的支集宽度,但对应于 $N=4$ 和 $R\equiv0$)的光滑性要差,但比$_2\phi$(其对应的 m_0 有相同重数之零点,即 $\xi=\pi$,2 重)之光滑性更好。在第 7 章,我们将更详细地讨论有关正则性与平坦性的课题。对应于图 6.7 的 h_n 列于表 6.4 中。

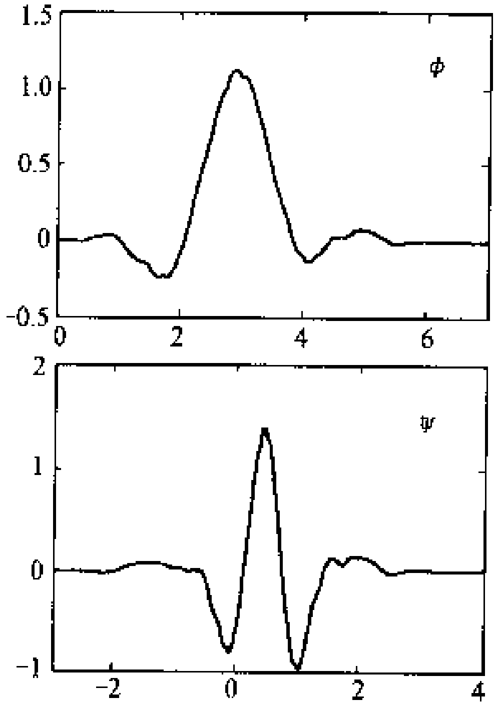


图 6.7　对应于图 6.6 中的"最小不对称"尺度函数 ϕ 及小波 ψ 的图像

表 6.4

与图 6.7 的尺度函数相对应的低通滤波器系数

n	h_n	n	h_n
0	−0.0802861503271	4	0.229036357057
1	−0.0243085969067	5	−0.0644368523121
2	0.362806341592	6	−0.0115565483406
3	0.550576616156	7	0.0381688330633

所有这些例子的 h_n, ϕ 和 ψ 都是实的,亦即它们对应的 $|\hat{\phi}|$ 和 $|\hat{\psi}|$ 都对 $\xi=0$ 对称。同样也可以构造出复的例子,使得 $|\hat{\phi}|$ 与 $|\hat{\psi}|$ 其值集中于 $\xi>0$ 的部分比 $\xi<0$ 的部为多。以前面的例子中的 m_0 为例,它满足 $m_0\left(\pm\frac{2\pi}{9}\right)=1$,今定义 $m_0^{\#}(\xi)=m_0\left(\xi-\frac{2\pi}{9}\right)$。由于 m_0 满足式(6.1.1), $m_0^{\#}$ 也显然满足它,而且 $m_0^{\#}(0)=1$。因此,就可以构造 $\hat{\phi}^{\#}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}(2^{-j}\xi)$。$\hat{\psi}^{\#}(\xi)=\mathrm{e}^{-i\xi/2}m_0^{\#}(\xi/2+\pi)\hat{\phi}^{\#}(\xi/2)$;由命题 6.2.3 知道这些函数是有紧支撑的 L^2 函数而且 $\psi_{j,k}^{\#}, j,k\in\mathbb{Z}$ 构造 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个紧框架。进一步,因为 m_0 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有零点 $\xi=\pm\frac{7\pi}{9}$, $\pm\pi$,所以也仅仅在 $\xi=\pm\pi$, $-\frac{5\pi}{9}$ 或 $-\frac{7\pi}{9}$ 时才有 $m_0^{\#}(\xi)=0$。这样,当 $|\xi|\leqslant\frac{\pi}{3}$ 时恒有 $|m_0^{\#}|\geqslant c>0$,而且根据推论6.3.2 $\psi_{j,k}^{\#}$ 将组成一个正交小波基。图6.8画出了 $|m_0^{\#}(\xi)|$, $|\hat{\phi}^{\#}(\xi)|$

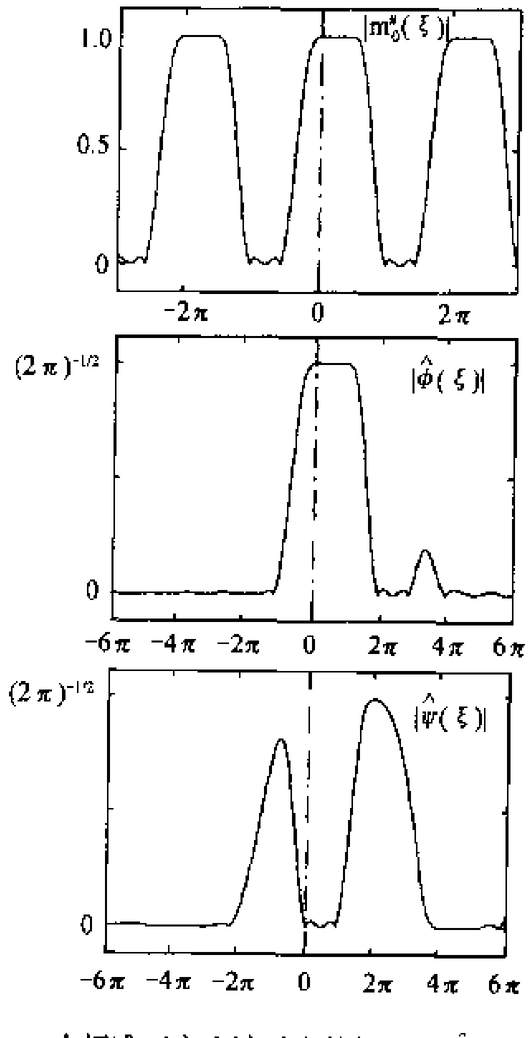


图 6.8 一个标准正交小波对应的 $|m_0|$, $|\hat{\phi}|$, $|\hat{\psi}|$ 图像,
其中 $\hat{\psi}(\xi)$ 的值在正频部分多于负频部分

以及$|\hat{\psi}^{\#}(\xi)|$的图形;显然,$\int_0^{\infty}d\xi\,|\hat{\psi}^{\#}(\xi)|^2$大于$\int_0^3 d\xi\,|\hat{\psi}(\xi)|^2$很多。注意,正如必要条件$\int_0^{\infty}d\xi\,|\xi|^{-1}\,|\hat{\psi}^{\#}(\xi)|^2=\int_{-\infty}^0 d\xi\,|\xi|^{-1}\,|\hat{\psi}^{\#}(\xi)|$(见3.4节)所要求的那样,$\hat{\psi}^{\#}$的负频部分较之其正频部分更靠近于原点。如此不对称的$\hat{\psi}$的存在是Coher(1990)首次提出的;事实上,对于任给的$\varepsilon>0$,人们总可以找到标准正交小波基,使得$\int_{-\infty}^0 d\xi\,|\hat{\psi}(\xi)|^2<\varepsilon$。

6.5 级联算法:与重分或精细格式的联系

在6.4节的构建中可以猜测到(除Haar基外)有紧支撑的$\phi(x)$与$\psi(x)$将没有公式型的表达式。然而,如果ϕ是连续的,可以对任意给定x计算$\phi(x)$到任意精度;而且还有快速算法来计算ϕ的曲线[①]。下面将介绍这些方法

首先,因ϕ有紧支集并且$\phi\in L^1(\mathbb{R})$,$\int dx\phi(x)=1$,所以有

命题6.5.1 如果f是$\mathbb{R}$上的连续函数,那么对于所有的$x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{j\to\infty}2^j\int dy f(x+y)\,\overline{\phi(2^jy)}=f(x) \tag{6.5.1}$$

如果f是一致连续的,那么这个逐点收敛也是一致收敛的。如果f是α阶Holder连续的

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C\,|x-y|^{\alpha}$$

则该收敛对j将具有指数速度

$$|f(x)-2^j\,|\,dy f(x+y)\,\overline{\phi(2^jy)}\leqslant C2^{-j\alpha} \tag{6.5.2}$$

证明:所有论断均来自于一个事实:当$j\to\infty$时,$2^j\phi(2^j)$是一个近似的δ函数。更精确地说

$$\begin{aligned}&|f(x)-2^j\int dy f(x+y)\,\overline{\phi(2^jy)}\,|\\&=|\,2^j\int dy[f(x)-f(x+y)]\,\overline{\phi(2^jy)}\,|\\&=|\int dz[f(x)-f(x+2^{-j}z)]\,\overline{\phi(z)}\,|\\&\leqslant\|\phi\|_{L^1}\cdot\sup_{|u|\leqslant 2^{-j}R}|f(x)-f(x+u)|\end{aligned}$$

(此处假设$\operatorname{supp}\phi\subset[-R,R]$)

如果f连续,那么就可以选择足够大的j使之任意小。如果f是一致连续的,那

① 见本章末注8。

么 j 的选择可以独立于 x，而且该收敛是一致的。如果 f 是 Holder 连续的，式(6.5.2)也直接成立。 ■

现在设 ϕ 是连续的，或者甚至是 α 阶 Holder 连续的(下一章将看到许多计算 ϕ 的 Holder 指数的方法)。取 x 为任意二进制有理数，$x=2^{-J}K$，则命题 6.5.1 告诉我们

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{j\to\infty} 2^{j}\int \mathrm{d}y\,\phi(2^{-J}k+y)\,\overline{\phi(2^{j}y)} \\ &= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\int \mathrm{d}z\,\phi(z)\,\overline{\phi_{-j,2^{j-J}K}(z)} \\ &= \lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\langle\phi,\phi_{\ \ j,2^{j-J}K}\rangle\end{aligned}$$

进一步，对于大于某一个 j_0 的 j

$$|\,\phi(2^{-J}K)-2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,2^{j-J}K}\rangle\,|\leqslant C2^{-j\alpha} \tag{6.5.3}$$

其中 C, j_0 依赖于 J 或 K。如果 $2^{j-J}K$ 是整数，显然当 $j>J$ 时这是自动成立的，则内积 $\langle\phi_{-j},2^{j-J}K\rangle$ 就易于计算。假设 $\phi_{0,n}$ 是标准正交的(这可以通过定理 6.3.5 所列任何充要条件来验证)，则 ϕ 是下列方程所表征的惟一函数 f

$$\langle f,\phi_{0,n}\rangle=\delta_{0,n} \tag{6.5.4}$$

$$\langle f,\psi_{-j,k}\rangle=0 \qquad j>0, k\in\mathbb{Z} \tag{6.5.5}$$

这样，将它用来作为与 m_0(见 5.6 节)相联系的子带滤波的重构算法的一种输入。更准确地说，可以从一个低通序列 $C_n^0=\delta_{0,n}$ 和一个高通序列 $d_n=0$ 出发，运用“弯曲机器”得到

$$c_n^{-1}=\sum_k h_{n-2k}C_k^0 \tag{6.5.6}$$

再令 $d_n^{-1}=0$，作另一个“弯曲机器”可得到

$$c_m^{-2}=\sum_n h_{m-2n}C_n^{-1} \tag{6.5.7}$$

等等。在每个阶段 c_n^{-j} 都等于 $\langle\phi,\phi_{-j,n}\rangle$。联系到式(6.5.3)，上面的结果意味着有一个具有指数快速收敛速度的方法以计算出 ϕ 在二进有理点之值。对这些值进行查值可以得到近似于 ϕ① 的函数序列 η_j。例如，定义函数 η_j^0 为在每个区间 $\left[2^{-j}\left(n-\frac{1}{2}\right),2^{-j}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]_{n\in\mathbb{Z}}$ 上分段取常值的函数，并使 $\eta_j^0(2^{-j}k)=2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,k}\rangle$。另一种可能的选择是 $\eta_j^1(x)$，它在每个区间 $[2^{-j}n,2^{-j}(n+1)]_{n\in\mathbb{Z}}$ 上是分段线性函数，使得 $\eta_j^1(2^{-j}k)=2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,k}\rangle$。

对于这两种选择，有以下命题。

① 见本章末注 9。

命题 6.5.2 如果 ϕ 是 α 阶 Holder 连续，则存在 $C>0$ 和 $j_0\in\mathbb{N}$，使当 $j>j_0$ 时

$$\|\phi-\eta_j^0\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-\alpha j},\ \|\phi-\eta_j^1\|_{L^\infty}\leqslant C2^{-\alpha j} \tag{6.5.8}$$

证明： 任取 $x\in\mathbb{R}$。对任意的 j，选择 n 使 $2^{-j}n\leqslant x\leqslant 2^{-j}(n+1)$。由于 $\eta_j^\in$ 的定义，其中 $\in=0$ 或 1，$\eta_j^\in(x)$ 必须是 $2^{j/2}\langle\phi,\phi_{j,n}\rangle$ 和 $2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,n+1}\rangle$ 的凸线性组合。另一方面，如果 j 是大于某个 j_0 的整数，则

$$\begin{aligned}&|\phi(x)-2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,n}\rangle|\\ \leqslant&|\phi(x)-\phi(2^{-j}n)|+|\phi(2^{-j}n)-2^{j/2}\langle\phi,\phi_{-j,n}\rangle|\\ \leqslant&C|x-2^{-j}n|^\alpha+C2^{-j\alpha}\leqslant C2^{-j\alpha}\end{aligned}$$

将 n 换成 $n+1$ 时上式亦成立。因此，对它们的凸组合上述估计也成立，故 $|\phi(x)-\eta_j^\in(x)|\leqslant C2^{-j\alpha}$。此地 C 的选择可以独立于 x，所以式(6.5.8)成立。 ■

下面列出上述的快速算法，它能以任意高的精度计算出 $\phi(x)$ 的近似值：

1. 初始：以序列…0…010…0…表示 $\eta_j^\in(n),n\in\mathbb{Z}$。

2. 利用式(6.5.7)所示的"弯曲机器"计算 $\eta_j^\in(2^{-j}n),n\in\mathbb{Z}$。在这个级联算法的每一步都将分两次进行计算：对偶数点 $2^{-j}(2k)$ 的可以从前一步细分为

$$\eta_j^\in(2^{-j}2k)=\sum_l h_{2(k-l)}\eta_{j-1}^\in(2^{-j}+1l) \tag{6.5.9}$$

奇数点 $2^{-j}(2k+1)$ 之值

$$\eta_j^\in(2^{-j}(2k+1))=\sum_l h_{2(k-l)+1}\eta_{j-1}^\in(2^{-j+1}l) \tag{6.5.10}$$

式(6.5.9)和式(6.5.10)都可以看成是卷积。

3. 对 $\eta_j^\in(2^{-j}n)$ 插值(对 $\in=0$ 按分段常数插值，对 $\in=1$ 按分段线性插值)，以得到 $\eta_j^\in(x)$ 对非二进有理点 x 之值。

上述算法被 Daubechies 与 Lagaries(1991)命名为级联算法（Cascade algorithm）。此时他们选择的 $\in=-1$；而 Daubechies(1986)中则选 $\in=0$。在 6.4 节及后续章节中 ϕ 与 ψ 都是用 η_j^1 作图的，其中 $j=7$ 或 8。在这些图的分解中，ϕ 与 η_j^1 的差别是感觉不到的。级联算法绝妙之处是可以用它去显微(room in)ϕ 的一些细节。所以，当已经计算出所有的 $\eta_5^\in(2^{-5}n)$，但还希望看到 ϕ 在中心为 1 的小区间 $\left[\frac{15}{16},\frac{17}{16}\right]$ 内更好地分解。我们能够办到这一点，例如取一个很大的 J，计算出所有的 $\eta_J^\in(2^{-J}n)$，但仅仅在我们感兴趣地小区间：$2^{J-4}\cdot15\leqslant n\leqslant 2^{J-4}\cdot17$(即 $\frac{15}{16}\leqslant 2^{-J}n\leqslant\frac{17}{16}$——译者注)上画出 $\eta_J^\in(x)$ 地图形。但是我们并不需要这样作：因为式(6.5.9)、式(6.5.10)的局部结构，只需要很少几步也就够了。假设 $n<0$ 和 $n>3$ 时均有 $h_n=0$，$\eta_J^\in(2^{-J}n)$ 的计算只涉及到 $\frac{n-3}{2}\leqslant k\leqslant\frac{n}{2}$ 时的 $\eta_{J-1}^\in(2^{-J+1}$

k)。对这些计算,依次也仅涉及到$\frac{k-3}{2} \leqslant l \leqslant \frac{k}{2}$或$\frac{n}{4}-\frac{3}{2}-\frac{3}{4} \leqslant l \leqslant \frac{n}{2}$时的 $\eta_{J-2}^{\epsilon}(2^{-J+2}l)$的值。一直工作到 $j=J-4$,我们看到,为了计算$\left[\frac{15}{16}, \frac{17}{16}\right]$上的 η_9^{ϵ} 仅需要计算在 $28 \leqslant m \leqslant 34$ 中的 $\eta_5^{\epsilon}(2^{-5}m)$。所以级联可以从…0…010…0…出发,前进五步,选出 $28 \leqslant m \leqslant 34$ 中的 $\eta_5^{\epsilon}(2^{-5}m)$的七个值,用这些作为下一步级联的输入,经过四步即最后得到了$\left[\frac{15}{16}, \frac{17}{16}\right]$上的 η_9^{ϵ} 的图。重复上述过程可得到一个图形在较小区间上更大程度的“放大”。在第 7 章的所有“放大”了的图像都是用此方法计算出来的。

在级联算法的讨论中已暗含用到了 $\psi_{j,k}$的正交性,或等价地用到 $\phi_{0,n}$地正交性(见 6.2 节,6.3 节);事实上,在讨论中将 ϕ 刻划为满足式(6.5.4)及式(6.5.5)的惟一函数 f 就说明了这一点。但是级联算法也可以不强调正交性,只作为稳定的重分式即精细格式的特殊情形。

精细格式在计算机作图中被用于设计具有离散、稀远点集的光滑曲线或曲面。这在 Cauaretta、Dahmen 和 Micchelli(1991)的评述中作了很好的回顾。此处仅对一维细分格式作简短讨论。假设希望设计曲线 $y=f(x)$符合采样点 $f(n)=f_n$,一个可能的方法就是构造分段线性曲线经过点(n, f_n)。这样作的优点之一是可以通过下式

$$f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(n)+\frac{1}{2}f(n+1) \qquad (6.5.11)$$

快速计算出半整数点上的 f 值。f 在 1/4 整数点上的值可类似地计算出来

$$f\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) \qquad (6.5.12)$$

同样的方法可以计算出$\frac{\mathbb{Z}}{4}+\frac{\mathbb{Z}}{8}$上的值等等。这一过程提供了一个快速递归算法以计算 f 在所有二进有理点之值。假若希望求得一个比分段线性样条(二次、三次或更高阶次的样条)更光滑的样条,那么只需利用式(6.5.9)和式(6.5.10)类似的格式从 $f(2^{-j}k)$计算出 $f(2^{-j}n+2^{-n-1})$,它含有无穷多项。利用插值方法

$$f(2^{-j}n+2^{-j-1})=\sum_k \alpha_k f(2^{-j}(n-k)) \qquad (6.5.13)$$

可以得到比线性样条更光滑的曲线,其中仅有限个 α_k 不为零,这样作的结果更为快速,但所得曲线不再是一个样条。一个例子是

$$f(2^{-j}n+2^{-j-1})=-\frac{1}{16}[f(2^{-j}(m-1))+f(2^{-j}(n+2))] + \frac{9}{16}[f(2^{-j}n)+f(2^{-j}(n+1))] \qquad (6.5.14)$$

1986 年 Dubac、1987 年 Dyn、Gregory 和 Levin 研究过这一例子,并在 1989 年由

Deslauries 和 Dwbuc、Dyn 和 Lewin 加以推广;得出了一个几乎 C^2 函数 f(关于确定函数正则性的方法见第 7 章)。公式(6.5.14)所描述的称为插值型精细化格式。在它计算的每一阶段,前面计算的值都保持不变,而只需要计算中间点的值。同样可以考虑在每一阶段,前面的值都可先加以精细化的精细化过程,称它为一般精细化格式

$$f_{j+1}(2^{-j-1}n) = \sum_k w_{n-2k} f_j(2^{-j}k) \tag{6.5.15}$$

公式(6.5.15)对应了两个卷积(精细化术语中，也称面具(masks))

$$f_{j+1}(2^{-j}n) = \sum_k w_{2(n-k)} f_j(2^{-j}k) \tag{6.5.16}$$

(已计算出的值的精细化),和

$$f_{j+1}(2^{-j}n + 2^{-j-1}) = \sum_k w_{2(n-k)+1} f_j(2^{-j}k) \tag{6.5.17}$$

(计算新的中间点的值)。一个好的精细格式其 f_j 在 $j\to\infty$ 时将收敛于一个连续的(或平滑的,见第 7 章)函数 f_∞。由于式(6.5.15)仅仅在离散集 $2^{-j}\mathbf{Z}$ 上定义了 f_j,所谓 f_j 收敛于 f_∞ 的精确含义是

$$\lim_{m\to\infty} \left\{ \sup_{j\geqslant 0, k\in\mathbf{Z}} \left| f_\infty^\lambda(2^{-m}2^{-j}k) - f_{m+j}^\lambda(2^{-m-j}k) \right| \right\} = 0 \tag{6.5.18}$$

其中上标 λ 代表初始数据 $f_0^\lambda(n)=\lambda_n$。称精细格式是收敛的，如果式(6.5.18)对所有的 $\lambda\in l^\infty(\mathbf{Z})$ 都成立;请参看 Cavaretta、Rahmen 和 Micchelli(1991)(式(6.5.18)也可以用经过 $f_j(2^{-j}k)$ 插值得到的 f_j 来重新叙述，见下面)。如果在一般精细格式中，取 $w_{2k}=\delta_{k,0}$,从而引出 $f_{j+1}(2^{-j}n)=f_j(2^{-j}n)$,它就变成了一个插值型精细化格式。

无论一般精细化格式或更受限制的插值型精细格式都可以看出，程序的线性性都意味着极限函数 f_∞(假定连续的[①])应由下式给出

$$f_\infty(x) = \sum_n f_0(n) F(x-n) \tag{6.5.19}$$

其中 $F=F_\infty$ 是通过同样的精细化格式从初始数据 $F_0(n)=\delta_{n,0}$ 所得的基本解。这个基本解服从于一个特殊的泛函方程。为了导出这一方程,首先对从离散数据 $f_j(2^{-j}k)$ 插值导出的函数 $f_j(x)$

$$f_j(x) = \sum_k f_j(2^{-j}k)\omega(2^{-j}x-k) \tag{6.5.20}$$

其中 ω 是一个“合理的”[②] 函数,满足 $\omega(n)=\delta_{n,0}$(例如任何一个有紧支集的有界变量函数)。很明显的两种选择是 $\omega(x)=1$,当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,其余为 0;或 $\omega(x)=1-|x|$,$|x|\leqslant 1$,其余为 0(它们对应于上面所说的级联算法的两种选择)。收

① 见本章末注 13。

② 见本章末注 14。

敛条件式(6.5.18)可另写成

$$\| f_j^{\lambda} - f_\infty^{\lambda} \|_{L^\infty} \to 0, j \to \infty$$

对于基本解 F_∞,我们从 $F_0(x)=\omega(x)$出发,下面两个近似函数 F_1,F_2 分别满足

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_n F_1(n/2)\omega(2x-n) \qquad (\text{由式}(6.5.20)) \\ &= \sum_n w_n \omega(2x-n) \qquad (\text{由式}(6.5.20)\text{ 和 } F_0(n)=\delta_{n,0}) \\ &= \sum_n w_n f_0(2x-n) \end{aligned} \tag{6.5.21}$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \sum_n F_2(n/4)\omega(4x-n) \\ &= \sum_{n,k} w_{n-2k}F_1(k/2)\omega(4x-n) \qquad (\text{由式 } 6.5.15) \\ &= \sum_k w_k \sum_l w_l \omega(4x-2k-1) \qquad (\text{因 } F_1(k/2)=w_k) \\ &= \sum_k w_k F_1(2x-k) \end{aligned}$$

这说明对所有 F_j 有一个类似的格式, 即

$$F_j(x) = \sum_k w_k F_{j-1}(2x-k) \tag{6.5.22}$$

导论表明这确实是其方法

$$\begin{aligned} F_{j+1}(x) &= \sum_n F_{j+1}(2^{-j-1}n)\omega(2^{j+1}x-n) \\ &= \sum_{n,k} w_{n-2k}F_j(2^{-j}k)\omega(2^{j+1}x-n) \\ &= \sum_{n,k-1} w_{n-2k}w_1 F_{j-1}(2^{-j+1}k-l)\omega(2^{j+1}x-n) \qquad (\text{由归纳假设}) \\ &= \sum_l w_l \sum_{m,n} F_{j-1}(2^{-j+1}m)w_{n-2m-2^j l}\omega(2^{j+1}x-n) \\ &= \sum_l w_l \sum_{m,r} F_{j-1}(2^{-j+1}m)w_{r-2m}\omega(2^{j+1}x-2^j l-r) \\ &= \sum_l w_l \sum_m F_j(2^{-j}r)\omega(2^j(2x-l)-r) \qquad (\text{利用式}(6.5.15)) \\ &= \sum_l w_l F_j(2x-l) \qquad (\text{利用式}(6.5.20)) \end{aligned}$$

因为 $F=F_\infty=\lim\limits_{j\to\infty}F_j$,式(6.5.22)表明基本解 F 应满足方程

$$F(x) = \sum_k w_k F(2x-k) \tag{6.5.23}$$

这样就说明了紧支撑尺度函数 ϕ 和级联算法为什么会成为同一种精细格式:一方面 ϕ 满足式(6.5.23)形式的方程(它是作为多分辨分析要求 $V_0 \subset V_{-1}$的一个结论),另一方面,级联算法恰好对应于式(6.5.15)和式(6.5.20)。多分辨分析中的正交性

使得命题6.5.2证明起来更容易一些，但对精细格式的类似结果即使在$F(x-n)$没有正交性的条件下也能给出证明。以下是对精细格式的一些基本结果：

• 如果精细格式(6.5.15)收敛，则 $\sum_n w_{2n}=\sum_n w_{2n+1}=1$，而且与之相联系的基本解方程(6.5.23)有惟一(直到其规范化)有紧支撑的连续解。

• 如果方程(6.5.23)有一个紧支撑连续解 F 存在，而且 $F(x-n)$是独立的(即映射 $\lambda\in l^\infty(\mathbb{Z})\to\sum_n\lambda_n f(x-n)$ 是一对一的[①]，则重分格式((6.5.15)及式(6.5.20)——译者)收敛。

对于本结论及其他许多结果的证明，我们参考了 Cavaretta, Dahmen 和 Miccheui(1991)及相关的论文。注意，条件 $\sum_n w_{2n}=\sum_n w_{2n+1}=1$ 恰好对应于需求 $m_0(0)=1$ 和 $m_0(\pi)=0$。

在一定意义上说，紧支撑尺度函数和小波函数的构造均可以看作是精细格式的特殊情形。然而，我觉得它们在着力点上也存在着差异。一般精细格式是与$F(2^{-j}x-n)$所生成的多分辨空间 V_j 相联系的，而不注意 V_j 在 V_{j-1}中的补子空间。在 j 个步骤中所获得的数据序列其精细化过程对应于在 V_{-j}中去寻找一个函数，它表示 V_{-j}到 V_0 的投影(通常不必是正交投影)，可以由对应数据列相伴随的精细格式来确定。这样做的结果可能出现对于同一数据列存在 V_{-j}中许多函数与之相对应的情况，为了确定的惟一性，通常用精细格式选出其“极小”的一个。我们不感兴趣去研究 V_{-j}中的非极小化的其他解及它们与上述惟一的精细化有什么不同。这是很自然的，精细格式简单构造更复杂结构(即从 V_0 到 V_{-j})是有意义的。事实上，小波分析希望分解 V_{-j}中的任一元素成 V_0 和它的补空间中的一些构件块。我们绝对有必要强调补空间 $w_l=V_{l-1}\Theta V_l$ 的重要性，而且也需要一个快速算法以计算这些空间中的系数。这是小波分析进入的地方，但都不存在与一般精细化相类似的格式。

紧支撑标准正交小波基与精细化格式之间也存在另一种联系：紧支撑正交小波基对应的“面具”(mask)经常是某一个插值型精细格式面具的“平方根”：具体地说，如果定义 $M_0(\xi)=|m_0(\xi)|^2=\frac{1}{2}\sum_n w_n e^{-in\xi}$，即 $w_n=\sum_k\overline{h_k}h_{k+n}$，则由于 $w_{2n}=\sum_k\overline{h_k}h_{k+2n}=\delta_{n,0}$(见式(5.1.39))，故 w_n 是一个插值型精细格式的面具系数。特别是，在1991年 Shemen 所注意的，从式(6.1.11)中选择 $R\equiv0$ 所得的插值型精细化格式，也就是被 Deslauiers 和 Dubuc(1989)[②] 所详细研究过的一个拉格朗日型插值格式。式(6.5.14)就是一个例子。

---

① 见本章末注15。

② 见本章末注16。

注意,(除了 haar 基外)一个有限的正交小波滤波器 m_0 是不可能成为插值型滤波器的:正交蕴涵着 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$,而插值要求等价于 $h_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{n,0}$或 $m_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)=1$,如果同时满足两个要求,将导致

$$1=|m_0(\xi)|^2+|1-m_0(\xi)|^2$$

或

$$\sum_n h_n\overline{h_{k+n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\overline{h_k}+h_{-k}] \tag{6.5.24}$$

假定 $n<N_1$ 及 $n>N_2$ 时 $h_n\equiv 0$,且 $h_{N_1}\neq 0\neq h_{N2}$,则式(6.5.24)已经蕴涵了 $N_1=0$或者 $N_2=0$。设 $N_1=0$($N_2=0$ 类似);N_2 必为奇数 $N_2=2L+1$。在式(6.5.24)中取 $k=2L$,则

$$h_0\overline{h_{2L}}\neq h_1\overline{h_{2L+1}}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{h_{2L}}$$

由 $h_0=2^{-1/2}$且 $h_{2L+1}\neq 0$,这意味着 $h_1=0$,类似地,当 $k=2L-2$ 时,它导出

$$h_0\overline{h_{2L-2}}+h_1\overline{h_{2L-1}}+h_2\overline{h_{2L}}+h_3\overline{h_{2L+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{h_{2L-2}}$$

结合 $h_1=0$,$h_{2n}=2^{-1/2}\delta_{n,0}$,蕴涵 $h_3=0$。这就推出 h_0 与 h_{2L+1}均不为零的且都等于$\frac{1}{\sqrt{2}}$,因此它的面具就是 Haar 而具。$\phi_{0,n}$的正交性迫使 $L=0$,故 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{-i\xi})$,即 Haar 基。如果放弃 m_0 是三角多项式的限制,即 ϕ、ψ 的支集可以是整个实直线。可以存在非平凡的 m_0 同时满足 $m_0(\xi)+m_0(\xi+\pi)=1$ 和 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$。其例子可以在 Evangelista(1992)或 Lemarie – Malgouyes(1992)的文章中找到。

注:

1. 紧支撑 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$也自动属于 $L^1(\mathbb{R})$内。由 5.3 节末尾的注意 5 可知 $m_0(0)=1$ 和 $m_0(\pi)=0$,即 m_0 在 π 处有重数至少为 1 的零点。

2. 在 Daubechies(1988b)中,式(6.1.7)的解 P 是利用两个结合引理找到的。现在看来,更自然的处理方法是用 Y. Meyer 指出的 Belout 定理。

3. 公式 P_N 已经在 1971 年由 Hermann 得到并设计了有极大平坦性的 FIR 滤波器(但没有完全重构格式)。

4. 这个收敛性有无穷多个 $h_n\neq 0$ 但有充分快的下降性,即存在某个 $\epsilon>0$,使得 $\sum|h_n|(1+|m|)^{\epsilon}<\infty$ 时也成立。当$|\sin n\zeta|\leqslant|n\zeta|^{\max(1,\epsilon)}$时将导出一个类似的界。

5. 这里,用了一个经典公式

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{j=1}^{\infty}\cos(2^{-j}x)$$

一个很容易的证明是使用公式 $\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 于

$$\prod_{j=1}^{J}\cos(2^{-j}x) = \prod_{j=1}^{J}\frac{\sin(2^{-j+1}x)}{2\sin(2^{-j}x)} = \frac{\sin x}{2^{J}\sin(2^{-J}x)}$$

令 $J\to\infty$，它即趋向于$\frac{\sin x}{x}$。Kac(1959)认为此公式归属于 Vieta，并将其用于有关统计独立性的论文的出发点。

6. 下面的论断通常是成立的：如果 m_0 满足式(6.1.1)，又按式(6.2.2)确定的 ϕ 生成非正交的平移族 $\phi_{0,n}$，则可以找到某个 ξ，使得 $\sum_{l}|\hat{\phi}(\xi+2\pi)|^2=0$ 见(Cohen(1990b))。

7. $\int dx\psi(x)\overline{\psi(x-k)}=\delta_{k,0}$看起来似乎比 $\|\psi\|=1$ 更强一些，但由于 $\psi_{j,k}$构成了一个框架常数为 1 的紧框架，由命题 3.2.1，两条件是等价的。

8. 因 $\psi(x)$是 $\phi(2x)$平移的有限线性组合，刻划 ϕ 的快速算法将推出 ψ 的快速算法。故本节仅限于对 ϕ 的讨论。

9. 如果 ϕ 不连续，那么 η_j 仍在 $L^2(\mathbb{R})$内收敛于 ϕ(见 6.3 节)，并且 ϕ 的连续点处逐点收敛于 ϕ。

10. 在 Daubechies(1988b)中，证明命题 3.3 时选择了$\in=1$，这是因为 $\hat{\eta}_j^1$ 是绝对可积的，但 $\hat{\eta}_j^0$ 却不是。在 Daubechies(1988b)中，首先证明了 $\eta_j^{\in}$ 收敛于 ϕ(使用了一些附加的技术条件)，接着由收敛性推出 $\phi_{0,n}$是标准正交的。

11. 不少精细化或重分格式的专家们发现多维情形更有趣！

12. 这不是最具普遍性的表述！此地仅仅假设 w_k 存在连续限制。这意味着$\sum w_{2n} = \sum w_{2n+1}=1$。

13. 例如，任何一个有有界变差的紧支撑 ω，在此都是"适宜"的。

14. 下面所给出的扩展 Haar 函数将说明 $F(x-n)$何以会失去独立性。取 $w_0=w_1=1$，其余 $w_n=0$。这样，式(6.5.23)将有解 $F(x)=1;0\leqslant x\leqslant 2;=0$，其他的 x。如果取一个 l^∞序列：$\lambda_n=(-1)^n$ 将导致 $\sum_{n}\lambda_nF(x-n)=0,a.l$。

15. 这不是巧合！如果我们固定对称滤波器 $M_0=|m_0|^2$ 的长度，则选择 $R\equiv0$ 就意味着 M_0 可被$(1+\cos\xi)$整除，其最大可能的重数将与它的长度及约束 $M_0(\xi)+M_0(\xi+\pi)=1$ 相容。另一方面，$2N-1$ 阶精细化格式是具有最短长度的插值型格式，该格式从它们的整数样本精确地产生出所有 $2N-1$ 阶(或更低阶)多项式。用滤波器 $W(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{n}w_ne^{in\xi}$ 的记分表示，意味着

$$W(\xi)+W(\xi+\pi)=1 \qquad (\text{插值滤波器}:\omega_{2n}=\delta_{n,0})$$

及

$$W(\xi)=1+O(\xi^{2N})=1+O((1-\cos\xi)^N)$$

(请见 Caveretta, Dahamann, Micchelli(1991)或本书第 8 章)

将这两个要求结合起来，蕴涵 $W(\xi+\pi)$在 $\xi=0$ 处有 $2N$ 阶零点，亦即，$W(\xi+\pi)$可被$(1-\cos\xi)^N$ 整除，从而 $W(\xi)$可被$(1+\cos\xi)^N$ 整除。这样即得到 $W=M_0$。

第 7 章　紧支撑小波正则性的进一步讨论

Meyer 小波或 Battle-Lemarie 小波的正则性是容易推断的：Meyer 小波有紧的傅里叶变换，所以它是 C^∞ 的，Battle-Lemarie 小波是样条函数，更准确地说，它是分段的 k 阶多项式，并在节点上有 $(k-1)$ 阶连续导数，紧支撑正交小波正则性的判定则比较困难，因为它们常常具有非整数的 Holder 指数，而且，正如图 6.3 中所示，还因为它们常常在一些点上的正则性比另一些点上要高。本章，我们将叙述在过去几年中发展起来的用以判定小波正则性的一些工具。所有这些技巧均建筑在关系式

$$\varphi(x) = \sum c_n \phi(2x - n) \tag{7.0.1}$$

中只有有限多个 c_n 是非零的这一事实。小波 ψ，作为变换 $\phi(2x)$ 及其平移的有限线性组合，也具有同样的正则性。本章所介绍的这些技巧不仅适用于小波本身，它们也适用于重分格式（见 6.5 节）中的基本函数。实际上，这里讨论的有些工具首先是为了重分格式发展起来的，而不是为了小波的研究。

判断正则性的方法可以分为两大类：一类是证明傅里叶变换 $\hat{\phi}(\xi)$ 的衰减性，另一类则是直接从 ϕ 本身出发。我们将通过把它们应用于 6.4 节中的例子 ${}_N\phi$ 进行讨论。将证明，基于傅里叶变换的方法更适用于对正则性的渐近估计（例如，在这些例子中，正则性的增加与 N 的增大成正比）；第二种方法可以给出正则性的更精确的局部估计，但通常难以使用。

本章的参考资料：7.1.1 节是 Daubechies(1988b) 和 Cohen(1990b)，7.1.2 节是 Cohen(1990 b) 和 Cohen 与 Conze(1992)；7.1.3 节是 Cohen 和 Daubechies(1991)；7.2 节可参阅 Daubechies 和 Lagarias(1991，1992)，Miccheui 和 Prautzsch(1989)，Dyn 和 Levin(1990)，Rioul(1992)；7.3 节是 Daubechies(1990b)。

7.1　基于傅里叶的方法

方程(7.0.1)的傅里叶变换是

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \tag{7.1.1}$$

式中 $m_0(\xi) = \frac{1}{2}\sum_n c_n e^{-in\xi}$ 是一个三角多项式，由式(7.1.1)可以导出

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \tag{7.1.2}$$

其中，通常假定 $m_0(0)=1$ 和 $\int dx\phi(x) = 1$，而且 m_0 可以被分解为：

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N \widetilde{L}(\xi) \tag{7.1.3}$$

式中 $\widetilde{L}$ 也是一个三角多项式，由此得出

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{i\xi}\right)^N \prod_{j=1}^{\infty}\widetilde{L}(2^{-j}\xi) \tag{7.1.4}$$

第一类方法是基于当 $|\xi|\to\infty$，对 $\mathscr{L}(2^{-j}\xi)$ 的无穷乘积的增长性的直接估计。

7.1.1 Brute 强制法

设 $\alpha=n+\beta, n\in\mathbb{N}, 0\leqslant\beta<1$，定义 C^α 为函数 f 的集合，其中函数 f 有 n 次连续导数且 f 的 n 阶导数 $f^{(n)}$ 有 β 次 Holder 连续性，亦即

$$|f^{(n)}(x) - f^n(x+t)| \leqslant C|t|^\beta$$

对所有 x,t 成立。一个众所周知且易于检验的结论是，设

$$\int d\xi\, |\hat{f}(\xi)|(1+|\xi|)^\alpha < \infty$$

则 $f\in C^\alpha$。特别是，假如 $|\hat{f}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-1-\alpha-\epsilon}$，则 $f\in C^\alpha$。由此可推出，如果当 $|\xi|\to\infty$ 时，式(7.1.4)中的 $\prod_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}(2^{-j}\xi)$ 的增长能保持上述被检验的条件，则因子 $((1-e^{-i\xi})/i\xi)^N$ 保证了 ϕ 的光滑性。

引理 7.1.1 假如 $q=\sup_\xi|\widetilde{L}(\xi)|<2^{N-\alpha-1}$，则 $\phi\in C^\alpha$。

证明：

1. 由于 $m_0(0)=1, \mathscr{L}(0)=1$；则 $|\mathscr{L}(\xi)|\leqslant 1+C|\xi|$。于是

$$\sup_{|\xi|\leqslant 1}\prod_{j=1}^{\infty}|\mathscr{L}(2^{-j}\xi)| \leqslant \sup_{|\xi|\leqslant 1}\prod_{j=1}^{\infty}\exp[C2^{-j}|\xi|] \leqslant e^C$$

2. 任取 $\xi, |\xi|\geqslant 1$，则存在 $J\geqslant 1$ 使 $2^{J-1}\leqslant|\xi|<2^J$，因此

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{\infty}|\mathscr{L}(2^{-j}\xi)| &= \prod_{j=1}^{J}\mathscr{L}(2^{-j}\xi)|\prod_{j=1}^{\infty}|\mathscr{L}(2^{-j}2^{-J}\xi)| \\ &\leqslant q^J\cdot e^C \leqslant C'2^{J(N-\alpha-1-\epsilon)} \\ &\leqslant C''(1+|\xi|)^{N-\alpha-1-\epsilon}\end{aligned}$$

于是，$|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C'''(1+|\xi|)^{-\alpha-1-\epsilon}$，且 $\phi\in C^\alpha$。 ■

将几个 $\mathscr{L}$ 结合起来会导出更好的估计，如下所示。

引理 7.1.2 定义：

$$q_j = \sup_{\xi} \left| \prod_{k=0}^{j-1} \mathscr{L}(2^{-k}\xi) \right| \tag{7.1.5}$$

$$\mathscr{K}_j = \frac{\lg q_j}{j \lg 2} \quad \mathscr{K} = \inf_{j \in \mathbb{N}} \mathscr{K}_j \tag{7.1.6}$$

设 $\mathscr{K} < N - 1 - \alpha$，则 $\mathscr{K} = \lim_{j \to \infty} \mathscr{K}_j$，从而 $\phi \in C^\alpha$。

证明：

1. 取 $j_2 > j_1$，则 $j_2 = nj_1 + r, 0 \leqslant r < j_1$，以及 $q_{j_2} \leqslant (q_{j_1})^n q_1^T$，于是

$$\mathscr{K}_{j_2} \leqslant (n \lg q_{j_1} + r \lg q_1)/(j_2) \leqslant \mathscr{K}_{j_1} + Cj_1/j_2。$$

2. 对任意 $\varepsilon < 0$，存在 j_0 使得 $\mathscr{K} = \inf_j \mathscr{K}_j > \mathscr{K}_{j0} - \varepsilon$。从而，对 $j \geqslant j_0$，有 $\mathscr{K}_j \leqslant \mathscr{K} + \varepsilon + Cj_0/j \underset{j \to \infty}{\to} \mathscr{K} + \varepsilon$。由于 ε 是任意的，它导出 $\mathscr{K} = \lim_{j \to \infty} \mathscr{K}_j$。

3. 假如 $\mathscr{K} < N - 1 - \alpha$，则对某些 $l \in \mathbb{N}$ 有 $\mathscr{K}_l < N - 1 - \alpha$。于是可以再次得出引理 7.1.1 的证明中的结论。把它用于

$$\prod_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}(2^{-j}\xi) = \prod_{j=0}^{\infty} \mathscr{L}_l(2^{-l_j-1}\xi)$$

式中 $\mathscr{L}_l(\xi) = \prod_{j=0}^{l-1} \mathscr{L}(2^{lj-1}\xi)$，$2^l$ 扮演引理 7.1.1 中 2 的角色，它可导出

$$|\hat{\phi}(\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-N+\mathscr{K}_l} \leqslant C(1 + |\xi|)^{-\alpha-1-\varepsilon}$$

因此 $\phi \in C^\alpha$。 ■

下列引理表明，在大多数时候，用 Brute 强制法不能获得更好的结果。

引理 7.1.3　存在一个序列 $(\xi_l)_{l \in \mathbb{N}}$ 使得

$$(1 + |\xi_l|)^{-\mathscr{K}} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}(2^{-j}\xi_l) \right| \geqslant C > 0$$

证明：

1. 根据定理 6.3.1，$\phi(\cdot - n)$ 的标准正交化意味着紧集 $\mathscr{K}$ 的存在，它 mod2π 意义下等于 $[-\pi, \pi]$。只要在 $\xi \in \mathscr{K}$ 时，$|\hat{\phi}(\xi)| \geqslant C > 0$。因为 $\mathscr{K}$ 是 mod2π 下全等于 $[-\pi, \pi]$，$\mathscr{L}_l$ 的周期为 $2^{l+1}\pi$，我们有

$$q_l = \sup_{|\xi| \leqslant 2^l \pi} |\mathscr{L}_l(\xi)| = \sup_{\xi \in 2^l K} |\mathscr{L}_l(\xi)|$$

即，存在 $\zeta_l \in 2^l \mathscr{K}$，使得 $|\mathscr{L}_l(\zeta_l)| = q_l$，由于 $\mathscr{K}$ 是紧支的，$2^{-l}\zeta_l \in \mathscr{K}$ 是一致有界的，因此有

$$|\zeta_l| \leqslant 2^l C' \qquad 0 < C' \tag{7.1.7}$$

2. 由于 $\left| \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right| = |\cos \xi/2| \leqslant 1$ 对任何 $\xi \in 2^l \mathscr{K}$ 成立，故

$$\left| \prod_{j=l+1}^{\infty} \left| \mathscr{L}(2^{-j}\xi) \right| \right| \geqslant \left| \prod_{j=l+1}^{\infty} \left| m_0(2^{-j}\xi) \right| \right| = |\hat{\phi}(2^{-l}\xi)| \geqslant C > 0$$

综上所述，当 $\xi_l=2\zeta_l$ 时，有

$$\left|\prod_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}(2^{-j}\xi_l)\right| = |\mathscr{L}_l(\zeta_l)|\left|\prod_{j=l+1}^{\infty}\mathscr{L}(2^{-j}\zeta_l)\right| \geqslant Cq_l = C2^{l\mathscr{K}_l}$$

由式(7.1.7)得

$$(1+|\xi_l|)^{-\mathscr{K}}\left|\prod_{j=1}^{\infty}\mathscr{L}(2^{-j}\xi_l)\right| \geqslant C2^{l\mathscr{K}_l}C''2^{-l\mathscr{K}}$$

因为 $\mathscr{K}=\inf_l\mathscr{K}_l$，故，这是由一个严格正常数确定的下界。

现在，我们转向在 6.4 节中构造的特殊的$_N\phi$ 族，并看看如何估计。由于

$${}_Nm_0(\xi) = \left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^N\mathscr{L}_N(\xi)$$

及

$$|\mathscr{L}_N(\xi)|^2 = P_N(\sin^2\xi/2) = \sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}(\sin^2\xi/2)^n$$

我们由确定 P_N 的几个基本性质入手。

引理 7.1.4 多项式 $P_N(x)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}x^n$ 满足下列性质

$$0\leqslant x\leqslant y \Rightarrow x^{-N+1}P_N(x)\geqslant y^{-N+1}P_N(y) \tag{7.1.8}$$

$$0\leqslant x\leqslant 1 \Rightarrow P_N(x)\leqslant 2^{N-1}\max(1,2x)^{N-1} \tag{7.1.9}$$

证明：

1. 假如 $0\leqslant x\leqslant y$，则

$$\begin{aligned} x^{-(N-1)}P_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}x^{-(N-1-n)} \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}y^{-(N-1-n)} = y^{-(N-1)}P_N(y) \end{aligned}$$

2. 由于(见 6.1 节)P_N 是 $x^NP_N(1-x)+(1-x)^NP_N(x)=1$ 的解。代入 $x=\frac{1}{2}$，则 $P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}$；对于 $x\leqslant\frac{1}{2}$，有 $P_N(x)\leqslant P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}$，因为 P_N 是增函数，对于 $x\geqslant\frac{1}{2}$，使用式(7.1.8)可导出 $P_N(x)\leqslant x^{N-1}2^{N-1}P_N\left(\frac{1}{2}\right)=2^{N-1}(2x)^{N-1}$。它即证明了式(7.1.9)。

现在利用引理 7.1.1 和引理 7.1.2，有

$$\begin{aligned} \sup_\xi|\mathscr{L}_N(\xi)| &= \left[\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}\right]^{1/2} \\ &< \left[2^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}2^{-n}\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$= [2^{N-1}P_N(1/2)]^{1/2} = 2^{N-1}$$

由引理 7.1.1 可得出${}_N\phi$ 连续的结论，回顾图 6.3，当 N 增加时，${}_N\phi$ 的正则性增高。这显然不是最优的！在 $j>1$ 时利用 K_j 立即导出更精确的结论。例如，有

$$q_2 = \sup_{\xi} | \mathscr{L}_N(\xi)\mathscr{L}_N(2\xi) |$$

$$= \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} [P_N(y)P_N(4y(1-y))]^{1/2} (\text{因为 } \sin^2\xi = 4\sin^2\xi/2(1-\sin^2\xi/2))$$

假如 $y\leqslant 1/2$ 或 $y\geqslant 1/2+\sqrt{2}/4$（这意味着 $4y(1-y)\leqslant\frac{1}{2}$），则利用式(7.1.9)可得$[P_N(y)P_N(4y(1-y))]\leqslant 2^{3(N-1)}$。在剩下的窗口$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\geqslant y\geqslant\frac{1}{2}$中，有

$$P_P(y)P_N(4y(1-y))\leqslant 2^{2(N-1)}[16y^2(1-y)]^{N-1}$$

$$\leqslant 2^{6(N-1)}\left(\frac{4}{27}\right)^{N-1} (\text{因为 } y^2(1-y)\leqslant\frac{4}{27}, 0\leqslant y\leqslant 1)$$

于是，$q_2\leqslant 2^{4(N-1)}3^{-3(N-1)/2}$，$\mathscr{K}_2\leqslant(N-1)\left[2-\frac{3}{4}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 2}\right]$。从它可导出，对足够大的数 N，渐近地${}_N\phi\in C^{\mu N}$，其中 $\mu=\frac{3}{4}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 2}-1\approx 0.1887$。由估计 q_4 而不是 q_2 可获得一个更好一点的值，$\mu\approx 0.1936$。

注意到 $y=\frac{3}{4}$ 是映射 $y\mapsto 4y(1-y)$ 的不动点，所以对任意 k，$q_k\geqslant\left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^k$，它导出了$\mathscr{K}$的一个下界和 ϕ 的正则性的一个上界，就 ξ 而论，$y=\sin^2\xi/2=\frac{3}{4}$对应着 $\xi=\frac{2\pi}{3}$；我们早已经看出 $\pm\frac{2}{3}\pi$ 扮演了一个重要角色，因为$\left\{\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right\}$对于 2 乘是一个 mod$2\pi$ 的不变的循环。在下一小节，可以看出这些不变的循环如何被用来导出$\hat{\phi}$的衰减性估计。

7.1.2 来自不变循环的衰减性估计

在不变循环上的 $\mathscr{L}$的值可给出有关$\hat{\phi}$的衰减性的一个下界。

引理 7.1.5 假如$\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{M-1}\}\subset[-\pi,\pi]$是任意的一个非平凡(即 $\xi_0\neq 0$)的不变循环，且映射 $\tau\xi=2\xi(\text{mod}2\pi)$满足 $\xi_m=\tau\xi_{m-1}$，$m=1,\cdots,N-1$，$\tau\xi_{M-1}=\xi_0$，则，对所有 $k\in\mathbb{N}$

$$|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)|\geqslant C(1+|2^{kM+1}\xi|)^{-N+\tilde{\mathscr{K}}}$$

式中，$\tilde{\mathscr{K}}=\sum_{m=0}^{M-1}\lg|\mathscr{L}(\xi_m)|/(M\lg 2)$，且 $C>0$ 是独立于 k 的常数。

证明：

1. 首先注意到存在 $C_1>0$ 使得对所有 $k\in\mathbb{N}$

$$|\sin(2^{kM}\xi_0|)\geqslant C_1 \tag{7.1.10}$$

实际上，$2^{kM}\xi_0=\xi_0(\mathrm{mod}2\pi)$，故若 $\xi_0\neq 0$ 或 $\pm\pi$，式(7.1.10)成立。我们已知道 $\xi_0\neq 0$；假如 $\xi_0=\pm\pi$，则 $\xi_1=0(\mathrm{mod}2\pi)$，因此 $\xi_0=2^{M-1}\xi_1=0(\mathrm{mod}2\pi)$，而这是不可能的。

2. 现在

$$|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)|\geqslant\left|\frac{\sin 2^{kM}\xi_0}{2^{kM}\xi_0}\right|^N\left|\prod_{j=0}^{\infty}\mathscr{L}(2^{kM-j}\xi_0)\right|$$

因为 $\mathscr{L}$ 是三角多项式，且 $\mathscr{L}(0)=1$，故存在 C_2 使得当 $|\xi|$ 足够小时，$|\mathscr{L}(\xi)|\geqslant 1-C_2|\xi|\geqslant e^{-2C_2|\xi|}$。因此，对足够大的 r

$$\prod_{j=rM}^{\infty}|\mathscr{L}(2^{-j}\xi_0)|\geqslant\prod_{j=rM}^{\infty}\exp[-2C_2 2^{-j}|\xi_0|]$$
$$\geqslant\exp[-2^{-rM+2}C_2|\xi_0|]\geqslant e^{-4C_2|\xi_0|}=C_3$$

因此

$$|\hat{\phi}(2^{kM+1}\xi_0)|\geqslant C_1^N(2^{kM}|\xi_0|)^{-N}|C_3\prod_{l=0}^{(r+k)M-1}\mathscr{L}(2^{kM-l}\xi_0)|$$
$$\geqslant C_4|\mathscr{L}(\xi_0)\mathscr{L}(\xi_1)\cdots\mathscr{L}(\xi_{M-1})|^{r+k+1}(1+|2^{kM}\xi_0|)^{-N}$$
$$\geqslant C_5 2^{\tilde{x}Mk}(1+|2^{kM}\xi_0|)^{-N}$$
$$\geqslant C(1+|2^{kM+1}\xi_0|)^{-N+\tilde{x}}\quad\blacksquare$$

现在，可以把它应用到上一小节末的例子中去：引理 7.1.5 暗示 $\left|\hat{\phi}\left(2^n\frac{2\pi}{3}\right)\right|\geqslant C\left(1+\left|2^n\frac{2\pi}{3}\right|\right)^{-N+\mathscr{K}}$，其中 $\mathscr{K}=\lg\left|\mathscr{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\mathscr{L}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right|/2\lg 2$。假如 $\mathscr{L}$ 只有实系数(在大多数实际应用场合中都是这样)，则 $\left|\mathscr{T}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right|=\left|\mathscr{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right|$，于是 $\mathscr{K}=\lg\left|\mathscr{T}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right|/\lg 2$。另外一些较短的不变循环是，$\left\{\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},-\frac{2\pi}{5},-\frac{4\pi}{5}\right\}$，$\left\{\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},-\frac{6\pi}{7}\right\}$ 等等；它们中的每一个都给出了 $\hat{\phi}$ 的衰减指数的一个上界。

有时，上述这些 α 的上界之一也能被证明为下界，我们首先证明下列引理。

引理 7.1.6. 设 $[-\pi,\pi]=D_1\cup D_2\cdots\cup D_M$，又存在 $q>0$ 使得

$$|\mathscr{L}(\xi)|\leqslant q\qquad \xi\in D_1$$
$$|\mathscr{L}(\xi)\mathscr{L}(2\xi)|\leqslant q^2\qquad \xi\in D_2$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$
$$|\mathscr{L}(\xi)\mathscr{L}(2\xi)\cdots\mathscr{L}(2^{M-1}\xi)|\leqslant q^M\qquad \xi\in D_M$$

则 $|\hat{\phi}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-N+\mathcal{K}}$，其中 $\mathcal{K}=\lg q/\lg 2$。

证明：

1. 估计 $|\prod_{k=0}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)|$，其中 j 为很大的且但任意的正整数。由于对某些 $m\in\{1,2,\cdots,M\}$，有 $\xi\in D_m$

$$\left|\prod_{k=0}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)\right| \leqslant q^m\left|\prod_{k=m}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)\right|$$

现在可以对 $2^{-m}\xi$ 使用同样的技巧，连续这样做直到无法进行下去为止。在那一点上，有

$$\left|\prod_{k=0}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)\right| \leqslant q^{j-r}\left|\prod_{k=j-1-r}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)\right|$$

剩下来的至多有 $M-1$ 个不同的 $\mathcal{L}$ 因子(即 $r\leqslant M-1$)。因此

$$\left|\prod_{k=0}^{j-1}\mathcal{L}(2^{-k}\xi)\right| \leqslant q^{j-M+1}q_1^{M-1}$$

式中 q_1 定义于式(7.1.5)中。因此，根据定义式(7.1.6)

$$\mathcal{K}_j \leqslant \frac{1}{j\lg 2}[C+j\lg q]$$

且 $\mathcal{K}=\lim_{j\to\infty}\mathcal{K}_j\leqslant\lg q/\lg 2$。$\hat{\phi}$ 的界可由引理 7.1.2 导出。 ■

特别地，我们有如下引理。

引理 7.1.7 设

$$\begin{aligned} &|\mathcal{L}(\xi)| \leqslant \left|\mathcal{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right| && |\xi|\leqslant\frac{2}{3}\pi \\ &|\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(2\xi)| \leqslant \left|\mathcal{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right|^2 && \frac{2}{3}\pi\leqslant|\xi|\leqslant\pi \end{aligned} \tag{7.1.11}$$

则 $|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-N+k}$，$\mathcal{K}=\lg\left|\mathcal{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right|/\lg 2$，且这个衰减性估计是最优的。

证明：此证明是引理 7.1.5 和引理 7.1.6 的直接推论。当然，引理 7.1.7 仅适用于非常特殊的 $\mathcal{L}$；在大多数情形下，式(7.1.11)都不能满足；甚至存在 $\mathcal{L}$，使得 $\mathcal{L}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$。类似的最优上界也能用其他不变循环导出，例如，它是$[-\pi,\pi]$的剖分的分割点并应用引理 7.1.6。让我们返回到“标准”的例子${}_N\phi$，对此，Cohen 和 Conze(1992)证明了 $\mathcal{L}_N(\xi)$确实满足式(7.1.11)，如下所示。 ■

引理 7.1.8 对所有 $N\in\mathbf{N}, N\geqslant 1, P_N(y)=\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}y^n$ 满足

$$P_N(y)\leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right) \qquad 设\ 0\leqslant y\leqslant\frac{3}{4} \tag{7.1.12}$$

$$P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leqslant \left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2 \qquad 设\frac{3}{4} \leqslant y \leqslant 1 \quad (7.1.13)$$

我们由证明 P_N 的另一特性入手。

引理 7.1.9

$$P'_N(x) = \frac{N}{1-x}\lfloor P_N(x) - P_N(l)x^{N-1}\rfloor \qquad (7.1.14)$$

证明:

$$1.\ P'_N(x) = \sum_{n=1}^{N-1}\binom{N-1+n}{n}nx^{n-1} = N\sum_{n=0}^{N-2}\binom{N+n}{n}x^n$$

$$= N\left[P_{N+1}(x) - \binom{2N}{N}x^N - \binom{2N-1}{N-1}x^{N-1}\right] \qquad (7.1.15)$$

$$2.\ (1-x)P_{N+1}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N}\left[\binom{N+n}{n} - \binom{N+n-1}{n-1}\right]x^n - \binom{2N}{N}x^{N+1}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N}\binom{N-1+n}{n}x^n - \binom{2N}{N}x^{N+1}$$

$$= P_N(x) + \binom{2N-1}{N}x^N(1-2x) \qquad (7.1.16)$$

3. 将式(7.1.15)和式(7.1.16)结合起来，有

$$(1-x)P'_N(x) = N\left[P_N(x) - \binom{2N-1}{N}x^{N-1}\right]$$

由于 $P_N(1) = \sum_{n=0}^{N-1}\binom{N-1+n}{N} = \binom{2N-1}{N}$，故式(7.1.14)成立。 ■

现在转回来证明引理 7.1.8。

引理 7.1.8 的证明:

1. 由于 $P_N(y)$在 $[0, 1]$上是递增的，我们只需证明式(7.1.13)。

2. 定义 $f(y) = P_N(y)P_N(4y(1-y))$，应用引理 7.1.9 得

$$f'(y) = \frac{N}{(1-y)(2y-1)}g(y)$$

式中

$$\begin{aligned} g(y) = &P_N(y)P_N(4y(1-y))(6y-5) \\ &- y^{N-1}(2y-1)P_N(1)P_N(4y(1-y)) \\ &+ 4(1-y)[4y(1-y)]^{N-1}P_N(1)P_N(y) \end{aligned} \qquad (7.1.17)$$

3. 由于当 $y \geqslant \frac{3}{4}$时，$4y(1-y) \leqslant y$。应用式(7.1.8)得

$$P_N(y)y^{-N+1} \leqslant [4y(1-y)]^{-N+1}P_N[4y(1-y)]$$

或

$$[4(1-y)]^{N-1}P_N(y) \leqslant P_N[4y(1-y)]$$

把它代如式(7.1.17)得

$$g(y) \leqslant (6y-5)P_N[4y(1-y)][P_N(y) - y^{N-1}P_N(1)]$$

其中方括号内的数,当 $y \leqslant 1$ 时,等于$\frac{1}{N}(1-y)P'_N(y) \geqslant 0$,因此当$\frac{3}{4} \leqslant y \leqslant \frac{5}{6}$时,$g(y) \leqslant 0$。从而导出 $P_N(y)P_N(4y(1-y))$在$\left[\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right]$上为减函数,即 $y \leqslant \frac{5}{6}$时,证明了式(7.1.13)。

4. 对$\frac{5}{6} \leqslant y \leqslant 1$,使用不同的策略,由引理 7.1.4,$P_N(y) \leqslant \left(\frac{4}{3}y\right)^{N-1}P_N\left(\frac{4}{3}\right)$,故仅需证明

$$\left(\frac{4}{3}y\right)^{N-1}P_N(4y(1-y)) \leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right) \tag{7.1.18}$$

但是

$$P_N(4y(1-y)) \leqslant [1-4y(1-y)]^{-N} = (2y-1)^{-2N}$$
$$(\text{因为}(1-x)^N P_N(x) = 1 - x^N P_N(1-x) \leqslant 1)$$

且

$$P_N\left(\frac{3}{4}\right) \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{N-1}P_N(1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}3^{N-1} \tag{7.1.19}$$

式中我们再次使用了引理 7.1.4,且

$$P_N(1) = \binom{2N-1}{N} = \frac{1}{2}\binom{2N}{N} \geqslant \frac{1}{\sqrt{N}}4^{N-1}$$

为证明式(7.1.18),仅需证明

$$\left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1}(2y-1)^{-2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{9}{4}\right)^{N-1} \tag{7.1.20}$$

由于$(2y-1)^{-2}$和 $y(2y-1)^{-2}$在$\left[\frac{5}{6},1\right]$上都是递减的,故仅需证明式(7.1.20)成立,亦即在 $y=\frac{5}{6}$上,$\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \leqslant \frac{4}{9\sqrt{N}}$ 即可。显然当 $N \geqslant 13$ 时,上式为真。

5. 剩下的是要证明在$\frac{5}{6} \leqslant y \leqslant 1$ 和 $1 \leqslant N \leqslant 12$ 时,式(7.1.13)成立。分为两步:$y \leqslant y_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$和 $y \geqslant y_0$。对 $y \leqslant \frac{2+\sqrt{2}}{4}$,$4y(1-y) \geqslant \frac{1}{2}$,因此,又由引理 7.1.3 得

$$P_N(4y(1-y)) \leqslant [8y(1-y)]^{N-1}P_N\left(\frac{1}{2}\right) = [16y(1-y)]^{N-1}$$

类似地

$$P_N(y) \leqslant \left(\frac{6}{5}y\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right) \tag{7.1.21}$$

因此 $P_N(y)P_N(4y(1-y)) \leqslant \left(\frac{6}{5}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right)[16y^2(1-y)]^{N-1} \leqslant \left(\frac{20}{9}\right)^{N-1} P_N\left(\frac{5}{6}\right)$。因为 $y^2(1-y)$在$\left[\frac{5}{6}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right]$上是递减的,当 $1 \leqslant N \leqslant 12$ 时,由数值计算可检验式(7.1.21)确实小于$\left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2$。

6. 对$\frac{2+\sqrt{2}}{4} = y_0 \leqslant y \leqslant 1$,用界 $P_N(4y(1-y)) \leqslant (2y-1)^{-2N}$和 $P_N(y) \leqslant \left(\frac{y}{y_0}\right)^{N-1} P_N(y_0)$ 类推出

$$\begin{aligned} P_N(4y(1-y))P_N(y) &\leqslant y_0^{-N+1} P_N(y_0)(2y-1)^{-2}\left[\frac{y}{(2y-1)^2}\right]^{N-1} \\ &\leqslant 2^N P_N(y_0) \end{aligned} \tag{7.1.22}$$

式中最后一个不等式中的$(2y-1)^{-2}$和 $y(2y-1)^{-2}$在$[y_0, 1]$上都是递减的,当 $5 \leqslant N \leqslant 12$时,由数值计算可检验式(7.1.22)小于$\left[P_N\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2$。

7. 还需在 $1 \leqslant N \leqslant 4$ 和$\frac{2+\sqrt{2}}{4} \leqslant y \leqslant 1$ 时,证明式(7.1.13)。对这些较小值的 N,多项式 $P_N(y)P_N(4y(1-y)) - P_N\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 最多为 9 次,它们的根易于(数值的)计算出来。且可以检验没有一个根在$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$上,而式(7.1.13)当 $y=1$ 时是成立的,从而完成了证明。 ■

由引理 7.1.8 和引理 7.1.7 可导出我们知道的${}_N\hat{\phi}(\xi)$的精确渐近衰减性,即

$$|{}_N\hat{\phi}(\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{-N+\lg|P_N(3/4)|/2\lg 2} \tag{7.1.23}$$

对 N 前几个值,有下列一些 α 的估计值,对应的有${}_N\phi \in C^{\alpha-\varepsilon}$。

N	α	N	α
2	0.339	7	1.682
3	0.636	8	1.927
4	0.913	9	2.168
5	1.177	10	2.406
6	1.432		

也可使用引理 7.1.7 来估计当 $N \to \infty$时${}_N\phi$ 的光滑度。因为

$$\frac{1}{\sqrt{N}} 3^{N-1} \leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant 3^{N-1}$$

(对上界使用引理 7.1.4,对下界使用引理 7.1.19),又

$$\frac{\lg|P_N(3/4)|}{2\lg 2}=\frac{\lg 3}{2\lg 2}N[1-O(N^{-1}\lg N)]$$

意味着渐近地,对大 N,当 $\mu=1-\dfrac{\lg 3}{2\lg 2}\approx 0.2075$[1]时 $_N\phi\in C^{\mu N}$。事实上,对于证明这个渐近结果,并不需要动用引理 7.1.8 的全部力量,只需要证明

$$P_N(y)\leqslant C3^{N-1}\qquad y\leqslant\frac{3}{4}\tag{7.1.24}$$

$$P_N(y)P_N(4y(1-y))\leqslant C^2 3^{2(N-1)}\quad \frac{3}{4}\leqslant y\leqslant 1\tag{7.1.25}$$

式中 C 是与 N 无关的常数。从而该渐近结果可由引理 7.1.6 直接得到。式(7.1.24)由 $P_N(y)\leqslant P_N\left(\frac{3}{4}\right)\leqslant 3^{N-1}y\leqslant\frac{3}{4}$ 立即可得,式(7.1.25)可由引理 7.1.4 轻松导出。事实上若 $\frac{3}{4}\leqslant y\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{4}$,则由 $y^2(1-y)$ 在 $\left[\frac{3}{4},1\right]$ 上的递减性, $P_N(y)P_N(4y(1-y))\leqslant(4y)^{N-1}(16y(1-y))^{N-1}=[64y^2(1-y)]^{N-1}\leqslant 3^{2(N-1)}$;又若 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}\leqslant y\leqslant 1$,则 $P_N(y)P_N(4y(1-y))\leqslant(4y)^{N-1}P_N\left(\frac{1}{2}\right)=[8y]^{N-1}<3^{2(N-1)}$。

对 $\hat{\phi}$ 的精确渐近衰减性的如何简洁的讨论来自于 Volkmer(1991),他有独立于 Cohen 和 Conze 的工作的情况下导出了这些结果。

7.1.3 Littlewood-Paley 类型估计

本节所讨论的估计是 $(1+|\xi|)^\alpha\hat{\phi}$ 的 L^1 或 L^2 估计,而不是对 $\hat{\phi}$ 自身的逐点衰减性估计。基本思想是通常的 Littlewood-Paley 技巧:将函数的傅里叶变换剖分成二进制片(即大约 $2^jC\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}C$),并对每片的积分加以估计,若当 $j\in\mathbb{N}$ 时,$\int_{2^j\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}}\mathrm{d}\xi\,|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C\lambda^j$,则当 $\alpha<-\lg\lambda/\lg 2$ 时,$\int\mathrm{d}\xi(1+|\xi|)^\alpha|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C[1+\sum_{j=1}^{\infty}2^{j\alpha}\lambda^j]<\infty$ 这意味着 $\phi\in C^\alpha$。为了获得它的估计,将利用 $\hat{\phi}$ 作为 $m_0(2^{-j}\xi)$ 的无穷乘积的特殊结构,并以 6.3 节中定义的算子 P_0 作为推导过程的基本工具。

首先局限于正三角多项式 $M_0(\xi)$(下面将使 $M_0(\xi)=|m_0(\xi)|^2$ 把结论推广到非正的 m_0)。正如在 6.3 节我们定义算子 P_0 作用在以 2π 为周期的函数上一样

$$(P_0f)(\xi)=M_0\left(\frac{\xi}{2}\right)f\left(\frac{\xi}{2}\right)+M_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)f\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)$$

这个算子为 Conze 和 Raugi 所研究,本节的几个结论来自于他们的工作(Conze 和 Raugi(1990),Conze(1991))。相似的思想也独立地由 Eirola(1991)和

Villemoes(1992)发展起来。第一个有用的引理如下：

引理 7.1.10 对所有的 $m>0$ 及所有的以 2π 为周期的函数 f，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi(P_0^m f)(\xi)=\int_{-2^m\pi}^{2^m\pi}\mathrm{d}\xi\cdot f(2^{-m}\xi)\prod_{j=1}^{m}M_0(2^{-j}\xi) \tag{7.1.26}$$

证明：

1. 第一步，对 $m=1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi(P_0f)(\xi)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi\left[M_0\left(\frac{\xi}{2}\right)f\left(\frac{\xi}{2}\right)+M_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)f\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right]$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\zeta\left[M_0(\zeta)f(\zeta)+M_0\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)f\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\right]$$

$$=2\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\zeta\cdot M_0(\zeta)f(\zeta)=\int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\xi\cdot f\left(\frac{\xi}{2}\right)M_0\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

2. 设式(7.1.26)对 $m=n$ 成立，则它对 $m=n+1$ 也成立。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi[P_0^{n+1}f](\xi)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi(P_0^nP_0f)(\xi)$$

$$=\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\mathrm{d}\xi[M_0(2^{-n-1}\xi)f(2^{-n-1}\xi)$$

$$+M_0(2^{-n-1}\xi+\pi)f(2^{-n-1}\xi+\pi)]\prod_{j=1}^{n}M_0(2^{-j}\xi)$$

$$=2^{n+1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\zeta[\prod_{j=0}^{n}M_0(2^j\zeta)][M_0(\zeta)f(\zeta)+M_0(\zeta+\pi)f(\zeta+\pi)]$$

$$=2^{n+1}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\zeta[\prod_{j=0}^{n}M_0(2^j\zeta)]f(\zeta)$$

$$=2^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\zeta[\prod_{j=1}^{n}M_0(2^j\zeta)]f(\zeta)$$

$$=\int_{-2^{n+1}\pi}^{2^{n+1}\pi}\mathrm{d}\zeta[\prod_{j=1}^{n}M_0(2^{-j}\zeta)]f(2^{-n-1}\xi)$$

因为 M_0 是一个正三角多项式，它可写成下式

$$M_0(\xi)=\sum_{j=-J}^{J}\alpha_j\mathrm{e}^{-ij\xi},\alpha_j=\alpha_{-j}\in\mathbb{R}$$

$$=\sum_{j=0}^{J}b_j\cos(j\xi)$$

这样，我们即找到了一个三角多项式的$(2J+1)$维的矢量空间，定义如下

$$V_J=\left\{f(\xi);f=\sum_{j=-J}^{J}f_j\mathrm{e}^{-ij\xi}\right\}$$

它对算子 P_0 是不变的。在空间 V_J 中 P_0 的作用可由 $(2J+1)\times(2J+1)$ 阶矩阵来实现,也用 P_0 来表示

$$(P_0)_{kl} = 2a_{2k-l} \quad -J \leqslant k, l \leqslant J \tag{7.1.27}$$

这里约定如 $|r|>J$,则 $a_r=0$。对此类 M_0 有

$$M_0 = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K} L(\xi) \tag{7.1.28}$$

式中 L 是一个三角多项式,并满足 $L(\pi)\neq 0$,矩阵 P_0 有非常特殊的谱特征。

引理 7.1.11 值 $1, \frac{1}{2}, \cdots, 2^{-2K+1}$ 是 P_0 的特征值。行矢量族 $e_k = (j^k)_{j=-J,\ldots,J}$, $k=0,\cdots,2K-1$ 生成一个子空间,此子空间对 P_0 是左不变的,更准确地说,$e_k P_0 = 2^{-k} e_k + e_n$ 的线性组合,$n<k$ 。

证明:

1. 因子分解式(7.1.28)等价于

$$\sum_{j=-J}^{J} a_j j^k (-1)^j = 0 \quad k = 0,\cdots,2K-1 \tag{7.1.29}$$

而且,由于 $M_0(0)=1, \sum a_{2j} = \sum a_{2j+1} = \frac{1}{2}$。这意味着矩阵(7.1.27)中每列的和等于 1。因此 e_0 是 P_0 的特征值为 1 的左特征矢量。

2. 对 $0<k\leqslant 2K-1$,定义 $g_k = e_k P_0$,即

$$(g_k)_m = 2\sum_j j^k a_{2j-m}$$

当 m 为偶数,$m=2l$

$$(g_k)_{2l} = 2\sum_j (j+l)^k a_{2j} = 2^{-k+1}\sum_m (2l)^m \sum_j \binom{k}{m} (2j)^{k-m} a_{2j}$$

当 m 为奇数,$m=2l+1$

$$\begin{aligned}(g_k)_{2l+1} &= 2\sum_j (j+l+1)^k a_{2j+1} \\ &= 2^{-k+1}\sum_m (2l+1)^m \sum_j \binom{k}{m} (2j+1)^{k-m} a_{2j+1}\end{aligned}$$

因此,由式(7.1.29)得

$$e_k P_0 = g_k = 2^{-k+1}\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} A_{k-m} e_m$$

式中,$A_m = \sum_j a_{2j}(2j)^m = \sum_j a_{2j+1}(2j+1)^m$ ■

引理 7.1.11 的一个推论是空间 E_k,

$$E_k = \left\{ f \in V_J; \sum_{j=-J}^{J} j^n f_j = 0 \quad n = 0, \cdots, k-1 \right\} \quad 1 \leqslant k \leqslant 2K$$

对 P_0 均为右不变的。由此可得出本段的主要结果：

定理 7.1.12 设 λ 是$P_0|_{E_2K}$的绝对值最大的特征值，定义 F, α 如下

$$\hat{F}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} M_0(2^{-j}\xi)$$

$$\alpha = -\lg|\lambda|/\lg 2$$

若$|\lambda|<1$，则对所有 $\varepsilon>0, F \in C^{\alpha-\varepsilon}$。

证明：

1. 定义 $f(\xi) = (1-\cos\xi)^K$。显然，当 $k \leqslant K-1$ 时，$f \in E_{2K}$，且$\frac{d^k}{d\xi^k} f|_{\xi=\pi} = 0$。

2. 由于对任意 $\delta>0$，存在 $C>0$，使得对任何 $n \in \mathbb{N}$，有 $\| A^n \| \leqslant C(\rho(A) + \delta)^n$，设 $P_0|_{E_{2K}}$谱半径$\rho(P_0|_{E_{2K}})$等于$|\lambda|$。则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \, (P_0^m f)(\xi) \leqslant C(|\lambda| + \delta)^m \tag{7.1.30}$$

3. 另一方面，由于$\frac{\pi}{2} \leqslant |\xi| \leqslant \pi, f(\xi) \geqslant 1$。再结合 $\prod_j^{\infty} M_0(2^{-j}\xi)$在$|\xi| \leqslant \pi$ 的界(像通常一样，这可以从$|M_0(\xi)| \leqslant 1 + C|\xi|$求出来)，则有

$$\begin{aligned}
\int_{2^{n-1}\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^n \pi} d\xi \hat{F}(\xi) &\leqslant C \int_{2^{n-1}\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^n \pi} d\xi \prod_{j=1}^{n} M_0(2^{-j}\xi) \\
&\leqslant C \int_{2^{n-1}\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^n \pi} d\xi f(2^{-n}\xi) \prod_{j=1}^{n} M_0(2^{-j}\xi) \\
&\leqslant C \int_{-\pi}^{\pi} d\xi (P_0^n f)(\xi) \\
&\leqslant C'(|\lambda| + \delta)^n \qquad \text{(使用引理 7.1.10)}
\end{aligned}$$

考虑到本小节开始时的讨论，这意味着 $F \in C^{\alpha-\varepsilon}$。 ■

实际上还可以证明一个更强一些的结论。事实上，如果将 C^{α}(n 是整数)扩展至包含所有的其$(n-1)$阶导数都属于 Zygmund 类

$$\mathscr{F} = \{ f; |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leqslant C|y|, \forall x, y \}$$

的函数时，则可以得出当 $P_0|_{E_{2K}}$为对角矩阵时也有$F \in C^2$ 的结论(亦即，在此情形下 ε 可以去掉)。而且，这一个光滑性估计及定理 7.1.12 中对所有 $\varepsilon>0, F \in C^{\alpha-\varepsilon}$的估计，只要 $\hat{F}$ 在$[-\pi, \pi]$上非零，则两者都是最优的。其证明可以参看 Cohen 和 Daubechies(1991)中的定理 2.7 。

注意：运用等值技术可以导出同样的结果，这需要一个和 P_0 同样方式定义的

算子 P_0^L，但 $M_0(\xi)$ 要用式(7.1.28)中的因子 $L(\xi)$ 来代替。在这种情况下，我们定义 $\lambda^L=\rho(P_0^L)$，并且因式分解 $\hat{F}(\xi)=[2(\sin\xi/2)/\xi]^{2k}(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}L(2^{-j}\xi)$ 以得到

$$\int_{2^{n-1}\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2^n\pi}\mathrm{d}\xi\hat{F}(\xi)\leqslant C\int_{2^{n-1}\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2^n\pi}\mathrm{d}\xi\,|\xi|^{-2K}\prod_{j=1}^{n}L(2(^{-j}\xi)$$

$$\leqslant C2^{-2nK}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\xi[(P_0^L)^n 1](\xi)$$

$$\leqslant C2^{-2nK}(\lambda^L+\epsilon)^n$$

所以当 $\alpha=2K-\frac{\lg\lambda}{\lg 2}$ 时，$F\in C^{\alpha-\epsilon}$。这种方法的优点在于直接从一个较小的矩阵 P_0^L 开始，使得特征值谱半径的计算较为简单。正如下面的讨论所示，两种方法是完全等价的。设 μ 是 P_0 的特征值，其对应的特征函数 $f_\mu\in E_{2K}$，则 f_μ 可写成

$$f_\mu(\xi)=(\sin^2\frac{\xi}{2})^K g_\mu(\xi)$$

在式

$$\mu f_\mu(\xi)=M_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)f_\mu\left(\frac{\xi}{2}\right)+M_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)f_\mu\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)$$

中用 $M_0(\xi)$ 的分解形式代替 M_0，并除以 $[\sin^2\frac{\xi}{2}\cos^2\frac{\xi}{2}]^N$ 后得

$$\mu 2^{2K}g_\mu(\xi)=L\left(\frac{\xi}{2}\right)g_\mu\left(\frac{\xi}{2}\right)+L\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)g_\mu\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)$$

因此，P_0^L 的特征值可由 $\mu^L=2^{2K}\mu$ 精确地给出。

通常，m_0 不是正的(确实，在正交小波基的框架中，除 Haar 基外，m_0 是永不为正的，见 Janssen(1992))。然而，我们可以定义 $M_0=|m_0|^2$；用同样的技巧导出

$$\int_{2^{n-1}\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2^n\pi}\mathrm{d}\xi\,|\hat{\phi}(\xi)|^2\leqslant C2^{-2nN}(\lambda^L+\epsilon^n)$$

式中 λ^L 是 P_0^L 的谱半径，$L(\xi)=|\mathscr{L}(\xi)|^2$，因此，当 $\alpha+\frac{1}{2}<N+\frac{\lg\lambda^L}{2\lg 2}$ 时，有

$$\int\mathrm{d}\xi(1+|\xi|)^\alpha|\hat{\phi}(\xi)|$$

$$\leqslant C\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}2^{n\alpha}2^{n/2}\left(\int_{2^{n-1}\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2^n\pi}\mathrm{d}\xi\,|\hat{\phi}(\xi)|^2\right)^{1/2}\right]<\infty$$

因此，当 $\alpha\leqslant N+\frac{\lg\lambda^L}{2\lg 2}-\frac{1}{2}$ 时，$\phi\in C^{\alpha-\epsilon}$。

对 6.4 节中前几个 N 值的 ${}_N\phi$，其相应的 α 为

N	α
2	0.50
3	0.915
4	1.275
5	1.596
6	1.888
7	2.158
8	2.415
9	2.661
10	2.902

显然这些值比由$\hat{\phi}$的逐点衰减性估计值(见7.12节)要好得多。由于矩阵P_0^L的规模随着N的增大而增大(线性地),而且,我们也还没有找到方法以确定当$N\to\infty$时它的谱半径的渐近值;因此,对于(正则性的)渐近估计,$\hat{\phi}$的逐点衰减性估计不失为最好的方法。

7.2 直接法

当N较小时,在7.13节所获得的$_N\phi$的光滑性估计值仍不是最优的。然而,基于傅里叶的方法又只能给出全局Holder幂的信息,但从图6.3看来,例如$_2\phi$都存在着一些点的光滑性比另一些点更高的现象。事实上,还将看到存在着一种(分形)集的分层集团,在其上$_2\phi$有从0.55到1的各种不同的Holder指数,这样的结论可由直接法获得,而无需启用$\hat{\phi}$。为简单起见,我们将就一般情形阐述这一方法的步骤,并以$_2\phi$为例来详加解释,然后不加证明地再叙述有关全局正则性和局部正则性的定理。证明可以在Daubechies和Lagurius(1991,1992)中找到。在Micchelli和Prautzsch(1989)有关重分格式的框架中也证明了全局正则性的类似结论(独立地,事实上还在Daubechies和Lagurius之前)。

此方法完全独立于小波理论,其出发点是方程

$$F(x)=\sum_{k=0}^{k}C_kF(2x-k) \tag{7.2.1}$$

式中$\sum_{k=0}^{k}C_k=2$,我们的兴趣是它的有紧支集的L^1解F,假如它存在,是惟一确

定的①(在规范化意义下);由于 $F\in L^1$,$\hat{F}$ 是连续的,式(7.2.1)意味着

$$\hat{F}(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x F(x) \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\xi)\right]$$

式中 $m(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k} C_k e^{-ik\xi}$,引理 6.2.2 告诉我们,$F$ 的支集 Support$F=[0,k]$ 方程(7.2.1)可以看成为一个不动点方程。对支集在$[0,k]$上的函数 g,定义 Tg 为

$$(Tg)(x) = \sum_{k=0}^{k} C_k g(2x-k)$$

则当 $TF=F$ 时,F 是式(7.2.1)的解。以下,试图用通行的方法来寻找这个不动点:即给定一个适当的 F_0,② 定义 $F_j=T^jF_0$,再证明 F_j 有极限。为了寻找 F_0,首先注意到,当 F 是连续函数时,式(7.2.1)对 $F(n)$,$n\in\mathbb{Z}$ 强加了一个约束。由于 Support $F=[0,k]$,只需要确定 $F(k)$,$1\leqslant k\leqslant K-1$,其余的 $F(n)$取为零。将 $x=k$,$1\leqslant k\leqslant K-1$ 代入式(7.2.1),导出有 $K-1$ 个未知数 $F(k)$的 $K-1$ 个线性方程的方程组;由此方程也可以看出矢量$(F(1),\cdots,F(K-1))$恰好是从 C_k 导出的$(K-1)\times(K-1)$阶矩阵的特征值为 1 的特征向量。我们将证明,在一些取模(modulo)的技术条件下(如下所示),矩阵确实有非退化的特征值 1 存在。因此,向量$(F(1),\cdots,F(K-1))$能被确定到仅差一个常数倍。现在假设我们已经做到了这一点,则可以证明 $\sum_{k=1}^{k-1}F(k)\neq 0$,因此可以规范化为 $\sum_{k=1}^{k-1}F(k)=1$。(所有这些都将在下面用例子加以说明)。现在定义 $F_0(x)$是分片线性函数,它在整数点上取精确值 $F(k)$,即

$$F_0(x) = F(k)(k+1-x) + F(k+1)(x-k) \qquad k\leqslant x\leqslant k+1 \tag{7.2.2}$$

连续应用 T 以定义 $F_j=T^jF_0$,即

$$F_{j+1}(x) = (TF_j)(x) = \sum_{k=0}^{K} C_k F_j(2x-k) \tag{7.2.3}$$

易知 F_j 也是分片线性的,节点为 $2^{-j}n\in[0,K]$,$n\in\mathbb{N}$。为讨论当 $j\to\infty$ 时,F_j 是否有限及该极限的正则性,习惯上将式(7.2.3)换成另一种形式。

关键思想是同时研究 $F_j(x)$,$F_j(x+1)$,$\cdots$,$F_j(x+K-1)$,$x\in[0,1]$。定义 $v_j(x)\in\mathbb{R}^K$③

$$[v_j(x)]_k = F_j(x+K-1),k=1,\cdots,K,x\in[0,1] \tag{7.2.4}$$

① 见本章末注 3。

② 见本章末注 4。

③ 见本章末注 5。

对于$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,并注意撑 Support$F_j\subset[0,k]$,则式(7.2.3)蕴涵 $F_{j+1}(x)F_{j+1}(x+1),\cdots,F_{j+1}(x+K-1)$ 都是 $F_j(2x),F_j(2x+1),\cdots,F_j(2x+K-1)$的线性组合。更精确地,运用 $v_j(x)$可以表示为

$$v_{j+1}(x)=T_0v_j(2x)\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\tag{7.2.5}$$

其中 T_0 为 $K\times K$ 阶矩阵,定义如下

$$(T_0)_{mn}=C_{2m-n-1}\qquad 1\leqslant m,n\leqslant K\tag{7.2.6}$$

并按照习惯规定 $C_k=0$, 当 $k<0$ 或 $k>K$,类似地

$$v_{j+1}(x)=T_1v_j(2x-1),\qquad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\tag{7.2.7}$$

其中

$$(T_1)_{mn}=C_{2m-n},1\leqslant m,n\leqslant K\tag{7.2.8}$$

将方程(7.2.5)与方程(7.2.7)用于 $x=\frac{1}{2}$:因为 T_0,T_1 和 v_j 的特殊结构($(T_0)_{mn}=(T_1)_{mn+1},[v_j(0)]_n=[v_j(1)]_n,n=2,\cdots,K$),这两个方程当 $x=\frac{1}{2}$时是相同的。可以把方程(7.2.5)与方程(7.2.7)合并为一个,每一个 $x\in[0,1]$都可以用一个二进序列加以表示的矢量方程

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}d_n(x)2^{-n}$$

对所有 $n,d_n(x)=1$ 或 0。对每一个二进有理数,亦即每一个 $k2^{-j}$类型的 x 都有两种可能的表达式存在:可以将最后一位数字 1 后面全为 0, 用最后一位数字 0 后面全为数字 1 的形式来代替。这样做不会带来问题,但为清晰起见,用上指标来区分这两个序列:$d_n^+(x)$表示末尾为 0 的序列("从上"展开,即当 $J\to\infty$时,用同样的 $J-1$ 个数字 $x+2^{-J}$来开始展开);$d_n^-(x)$表示末尾为 1 的序列("从下"展开)。例如

$$d_1^+\left(\frac{1}{2}\right)=1\qquad d_n^+\left(\frac{1}{2}\right)=0\qquad n\geqslant 2$$

$$d_1^-\left(\frac{1}{2}\right)=0,\qquad d_n^-\left(\frac{1}{2}\right)=1,\qquad n\geqslant 2$$

式(7.2.5)与式(7.2.7)的两个定义域 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$和$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 可以完全用 $d_1(x)$来表征:$d_1(x)=0$,假如 $x<\frac{1}{2}$;$d_1(x)=1$,当 $x>\frac{1}{2}$。

对每一个二进序列 $d=(d_n)_{n\in\mathbf{N}/\{0\}}$,定义右平移 τd

$$(\tau d)_n=d_{n+1}\qquad n=1,2,\cdots$$

显然，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，$\tau d(x)=d(2x)$，当 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时，$\tau d(x)=d(2x-1)$（对 $x=\frac{1}{2}$ 有两个右移形式 $\tau d^{+}\left(\frac{1}{2}\right)=d(0)$，$\tau d^{-}\left(\frac{1}{2}\right)=d(1)$）。虽然 τ 是定义在二进序列上的，我们不妨滥用一下记号 $\tau x=y$，而不用 $\tau(dx)=d(y)$，用这种新记号可以将式(7.2.5)与式(7.2.7)写成一个单一方程

$$v_{j+1}(x)=T_{d_1(x)}v_j(x) \tag{7.2.9}$$

若 v_j 右极限 v，则向量函数 v 是线性算子 T 的一个不动点。算子 T 的定义如下

$$(T\omega)(x)=T_{d_1(x)}\omega(\tau x)$$

T 作用于所有的向量函数 $\omega:[0,1]\to R^K$，它满足要求

$$[\omega(0)]_1=0,[\omega(1)]_K=0,[\omega(0)]_K=[\omega(1)]_{K-1}\qquad K=2,\cdots,N \tag{7.2.10}$$

（上述条件也保证了 $T\omega$ 在二进有理数上有定义，且两种展开导致了相同的结果）。

这样用不同形式来重写方程会带来什么呢？从式(7.2.9)得

$$v_j(x)=T_{d_1(x)}T_{d_2(x)}\cdots T_{d_j(x)}v_0(\tau^j x)$$

它意味着

$$v_j(x)-v_{j+1}(x)=T_{d_1(x)}\cdots T_{d_j(x)}[v_0(\tau^j x)-v_l(\tau^j x)] \tag{7.2.11}$$

换句话说，矩阵 T_d 的积的谱特性的信息有助于控制 $v_j-v_{j+\varepsilon}$ 的差，使得我们可以证明 $v_j\to v$，并导出 v 的光滑程度。举一个例子：

对函数 ${}_2\phi$，式(7.2.1)成为

$${}_2\phi(x)=\sum_{k=0}^{3}C_k\ \ {}_2\phi(2x-k) \tag{7.2.12}$$

式中

$$C_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4},C_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4},C_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4},C_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

注意到

$$c_0+c_2=c_1+c_3=1 \tag{7.2.13}$$

和

$$2c_2=c_1+3c_3 \tag{7.2.14}$$

它们都是 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}c_k\mathrm{e}^{-ik\xi}$ 被 $(1+\mathrm{e}^{-i\xi})^2$ 整除的推论。${}_2\phi(1)$，${}_2\phi(2)$ 的值由下列系统决定：

$$\begin{pmatrix}{}_2\phi(1)\\ {}_2\phi(2)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}{}_2\phi(1)\\ {}_2\phi(2)\end{pmatrix}\qquad M=\begin{pmatrix}c_1 & c_0\\ c_3 & c_2\end{pmatrix}$$

因为式(7.2.13)，M 的列和为 1，从而保证了(1,1)是 M 的特征值为 1 的左特征向量。这个特征值是非退化的；同一个特征值的右特征向量与(1,1)是不正交的，说明它可被规范化使得其元素之和为 1。$({}_2\phi(1), {}_2\phi(2))$ 的这个选择导出了

$$ {}_2\phi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, {}_2\phi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} $$

矩阵 T_0, T_1 是 3×3 矩阵

$$ T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. $$

因为式(7.2.13)，T_0 和 T_1 有一个公共的左特征向量 $e_1 = (1,1,1)$，它的特征值为 1。而且，对于所有 $x \in [0,1]$

$$ \begin{aligned} e_1 \cdot v_0(x) &= e_1 \cdot [(1-x)v_0(0) + xv_0(1)] \\ &= (1-x)[{}_2\phi(1) + {}_2\phi(2)] + x[{}_2\phi(1) + {}_2\phi(2)] = 1 \\ &\text{(使用式(7.2.2))} \end{aligned} $$

对所有的 $x \in [0,1]$ 及所有 $j \in \mathbb{N}$，它导出

$$ \begin{aligned} e_1 \cdot v_j(x) &= e_1 \cdot T_{d_1(x)} \cdots T_{d_j(x)} v_0(\tau^j x) \\ &= e_1 \cdot v_0(\tau^j x) = 1 (\text{因为 } e_1 \tau_d = e_1, d = 0,1) \end{aligned} $$

因此，$v_0(y) - v_l(y)$ 属于正交于 e_1 的空间，$E_1 = \{\omega; e_1 \cdot \omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\}$，这样，从式(7.2.11)看来，为了控制 v_j 的收敛性，只需要研究限制在空间 E_1 上的矩阵 T_d 的积。而所得还会更多！定义 $e_2 = (1,2,3)$，则式(7.2.14)意味着

$$ \begin{aligned} e_2 T_0 &= \frac{1}{2} e_2 + a_0 e_1 \\ e_2 T_1 &= \frac{1}{2} e_2 + a_1 e_1 \end{aligned} \tag{7.2.15} $$

式中 $a_0 = c_0 + 2c_2 - \frac{1}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{4}$，$a_1 = c_1 + 2c_3 - \frac{1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$。假如定义 $e_2^0 = e_2 - 2a_0 e_1$，则式(7.2.15)变为

$$ e_2^0 T_0 = \frac{1}{2} e_2^2 \text{ 及 } e_2^0 T_1 = \frac{1}{2} e_2^0 - \frac{1}{2} e_1 $$

或者

$$ e_2^0 T_d = \frac{1}{2} e_2^0 - \frac{1}{2} d e_1 $$

另一方面

$$ e_2^0 \cdot v_0(x) = (1-x) e_2^0 \cdot v_0(0) + x e_2^0 \cdot v_0(1) = -x $$

因此

$$\begin{aligned} e_2^0 \cdot v_j(x) &= e_2^0 \cdot T_{d_1(x)} v_{j-1}(\tau x) \\ &= -\frac{1}{2} d_1(x) + \frac{1}{2} e_2^0 \cdot v_{j-1}(\tau x) \\ &= -\sum_{m=1}^{j} 2^{-m} d_m(x) + 2^{-j} e_2^0 \cdot v_0(\tau^j x) \\ &= -\sum_{m=1}^{j} 2^{-m} d_m(x) - 2^{-j} \tau^j x = -x \end{aligned}$$

它导出 $e_2^0 \cdot [v_0(x) - v_l(x)] = 0$。这意味着为了控制 $v_j - v_{j+l}$，只需要研究限制在 E_2 上的矩阵 T_d 的积，E_2 是由 e_1 和 e_2^0 展开生成的空间。但是，因为这是一个简单的例子，E_2 是一维的，且 $T_d|_{E_2}$是由一些常数所作的简单的倍乘，即 T_d 的第三个特征值对 T_0 为$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$，对 T_1，为$\frac{1-\sqrt{3}}{4}$。这样即得到

$$\| v_j(x) - v_{j+l}(x) \| \leqslant \left[\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right]^j \left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right|^{\sum_{n=1}^{j} d_j(x)} C \qquad (7.2.16)$$

式中 v_l 被认为是一致有界的[①]。由于$\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right| < 1$，式 (7.2.16)意味着

$$\| v_j(x) - v_{j+l}(x) \| \leqslant C 2^{-\alpha j}$$

式中 $\alpha = |\lg(1+\sqrt{3})/4| / \lg 2 = 0.550$。故 v_j 有一个极限函数 v，它是连续的，因为所有的 v_j 都连续，且收敛是一致的。而且因为所有的 v_j 满足式(7.2.10)，v 自动满足式(7.2.10)，所以，它可以不折不扣地成为[0,3]上的一个连续函数 F。这个函数是式(7.2.1)的解，因此$_2\phi = F$，而且它可以用节点在 $k2^{-j}$的分片线性样条函数F_j 一致逼近。

$$\| {}_2\phi - F_j \|_{L^\infty} \leqslant C 2^{-\alpha j} \qquad (7.2.17)$$

从标准的样条理论(例如，见 Schumaker(1981))[②] 中可以导出，$_2\phi$ 是 Holder 连续的，指数 $\alpha = 0.550$。注意到它比 7.1 节 最好的估计值要好(在 7.1.3 节的结尾得到 $\alpha = 0.5 - \epsilon$)。此 Holder 指数是最优的：从式(7.2.12)有

$$ {}_2\phi(2^{-j}) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) {}_2\phi(2^{-j+1}) = \cdots = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^j {}_2\phi(1) = C 2^{-\alpha j}$$

因此

$$|{}_2\phi(2^{-j}) - {}_2\phi(0)| = C(2^{-j})^\alpha$$

但是，这个矩阵方法还可以做到比确定最优 Holder 指数更好的工作。由于

---

① 见本章末注 6。

② 见本章末注 7。

$v(x)=T_{d_1(x)}v(\tau x)$,故对足够小的 t,可以做到使 x 与 $x+t$ 在它们的二进展开中有同样开始 j 位数字,即

$$v(x)-v(x+t)=T_{d_1(x)}\cdots T_{d_j(x)}[v(\tau^j x)-v(\tau^j(x+t))]$$

它还可以像上面对 $v_j(x)-v_{j+l}(x)$ 一样被精确地研究;我们发现

$$e_1\cdot[v(x)-v(x+t)]=0$$

$$e_2^0\cdot[v(x)-v(x+t)]=t$$

剩下部分仅与 $T_d|_{E_2}$ 有关,我们发现

$$\|v(x)-v(x+t)\|\leqslant C|t|+C2^{-\alpha j}\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right|^{\sum_{n=1}^{j}d_n(x)} \tag{7.2.18}$$

式中 t 自身是 2^{-j} 的。用记号 $r_j(x)=\frac{1}{j}\sum_{n=1}^{j}d_n(x)$,式 (7.2.18) 可被重写成

$$\|v(x)-v(x+t)\|\leqslant C|t|+C2^{-(\alpha+\beta r_j(x))j} \tag{7.2.19}$$

式中 $\beta=|\lg|(1-\sqrt{3})/(1+\sqrt{3})\|/\lg 2$。设 $j\to\infty$ 时,$r_j(x)$ 趋近极限 $r(x)$。假如 $r(x)<\frac{1-\alpha}{\beta}=0.2368$,则式(7.2.19)的第二项控制了第一项和函数 v,因而${}_2\phi$ 都是 Holder 连续的,其指数为 $\alpha+\beta r(x)$。假如 $r(x)>\frac{1-\alpha}{\beta}$,则第一项,其阶为 2^{-j},具有控制力,此时${}_2\phi$ 是 Lipschitz 的。事实上,甚至可以证明${}_2\phi$ 在这些点上是可微的,这些点构成一个全测度 full neasure 集合。它建立了一个分形(fractal)集($r(x)$在这些集合上取一些预定的值)的分层体系,${}_2\phi$ 在该集合上有不同的 Holder 指数。对二进有理数会发生些什么呢?好,此处你可以定义 $r_{\pm}(x)$,这依赖于你究竟是“从上面”(与 $d^+(x)$有关)还是“从下面”(与 $d^-(x)$有关),$r_+(x)=0$,$r_-(x)=1$。因而,${}_2\phi$ 在二进有理点 x 处是左可微的,而且当从右边逼近 x 时,有 Holder 指数 $\alpha=0.550$,这一点可用图 7.1 表示,它显示了${}_2\phi$ 的放大图像,展示了甚至在非常细小的尺度下的特性倾斜尖峰。

在这个例子中,有两个反映 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum_k c_k e^{-ik\xi}$ 可被$((1+e^{-i\xi})/2)^2$ 除的“求和规则”式(7.2.13)、式(7.2.14)。通常地,m_0 是被$((1+e^{-i\xi})/2)^N$ 除的,故应有 N 个求和规则。然而,子空间 E_N 是高于一维的,加重了估计的复杂性。关于全局正则性的一般性定理如下:

定理 7.2.1 假设 $c_k,k=0,\cdots,K$ 满足 $\sum_{k=0}^{k}c_k=2$ 且

$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^k k^l c_k=0 \qquad l=0,1,\cdots,L \tag{7.2.20}$$

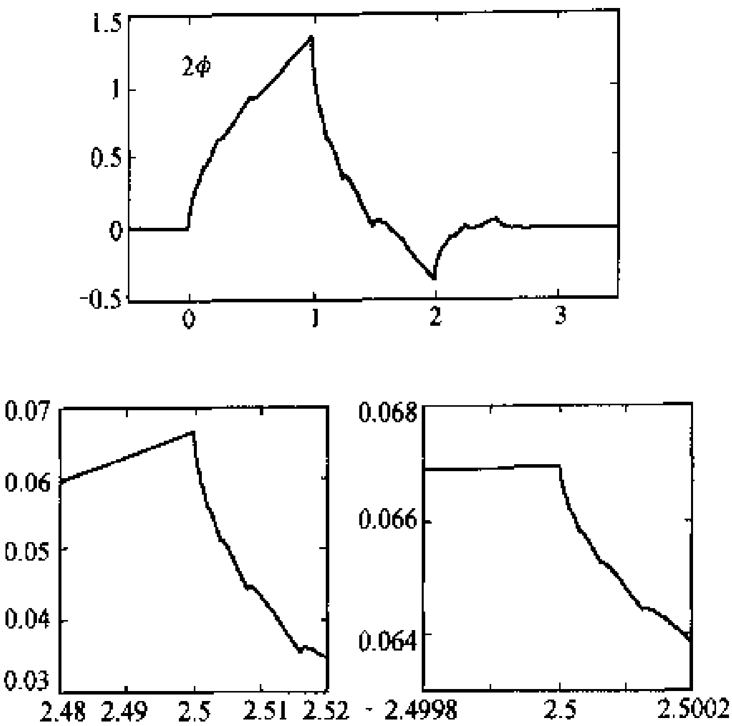


图 7.1 函数$_2\phi(x)$的图形和在 $x=2.5$ 附近两次连续放大

对每一个 $m=1,\cdots,L+1$，定义 E_m 是 $\mathbb{R}^N$ 的正交于 $U_N=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_m\}$ 的子空间，式中 $e_j=(1^{j-1},2^{j-1},\cdots,N^{j-1})$。假设存在 $1/2\leqslant\lambda<1,0\leqslant l\leqslant L\,(l\in\mathbb{N})$ 和 $C>0$ 使得对所有二进序列 $(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$，和所有 $m\in\mathbb{N}$，

$$\| T_{d_1}\cdots T_{d_m}|_{E_{L+1}}\| \leqslant C\lambda^m 2^{-ml} \qquad (7.2.21)$$

则

1. 对与 c_n 相联系的二尺度方程(7.2.1)，存在非平凡连续 L^1 解 F。

2. 此解 F 是 l 次连续可微的，且

3. 假如 $\lambda>\frac{1}{2}$，则 f 的 l 阶导数 $F^{(l)}$ 是 Hölder 连续的，其指数至少为 $|\ln\lambda|/\ln 2$；假如 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 f 的 l 阶导数 $F^{(l)}$ 是几乎 Lipschitz 的；它满足

$$|F^{(l)}(x+t)-F^{(l)}(x)|\leqslant C|t||\ln|t||$$

注意：$\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 的限制意味着为使在 $\lambda<\frac{1}{2}$ 时 式(7.2.21)成立，我们只选择了最大可能的整数 $l\leqslant L$。假如 $l=L$，则必须 $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$（见 Daubechies 和 Lagarias (1992)）；假如 $l<L$ 且 $\lambda<\frac{1}{2}$，则我们可用 $l+1$ 替代 L，用 2λ 代替 λ，式(7.2.21)就会对较大整数 l 成立。 □

对于例子$_2\phi$ 所显示的局部正则性，也可以建立类似的一般性定理。关于它

的精确表述和证明，建议参看 Daubechies 与 Lagarias(1991,1992)。

当应用到$_N\phi$,这些方法导出下列最优 Holder 指数：

N	α
2	0.550
3	1.0878
4	1.6179

这些数值显然比在 7.1.3 节获得的要好得多；而且，我们惊奇地看到，$_3\phi$ 是连续可微的，虽然它们的图形看起来在 $x=1$ 处有一个“尖峰”，放大后显示出有偏差，并容易导致误解：真正的最大值位于 $x=1$ 偏右一点，而且，它的确是处处平滑的(见图 7.2)。$_3\phi$ 的导数是连续的，但它有一个非常小的 Holder 指数，如图 7.3 所示。

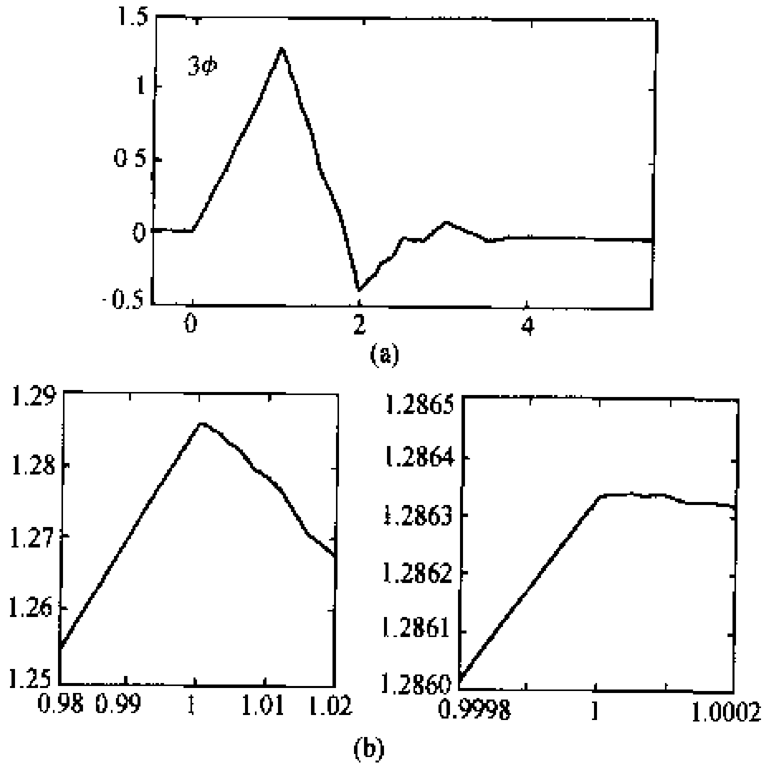


图 7.2 函数$_3\phi(x)$和 $x=1$ 附近两次连续放大

不幸的是，这些矩阵方法在处理大例子时很麻烦。另外，最新的“直接法”已由 Dyn 和 Levin(1989)和 Rioul(1991)发展出来；当应用于 $N=2,3,4$ 时的$_N\phi$，它也能得出上面所给的 α 值，由于其计算量小，它也能处理较大的 N 值，其效果比 7.1.3节要好(见 Rioul(1991))。

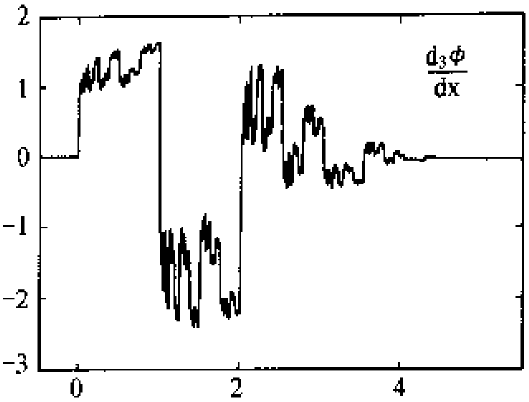


图 7.3 $_3\phi(x)$的导数

注意:

1. 请注意 7.1.3 节中(见(式 7.1.27)) T_0, T_1 和 P_0 的相似性。甚至在嵌套的不变子空间中它们的谱分析也是一样的。这表明定理 7.1.12 中的结论确实是最优的:事实上,假如 $\tilde{\lambda}$ 是 $P_0|_{E_{2K}} = T_1|_{E_{2K}}$ 的谱半径,则有

$$\| (T_1|_{E_{2k}})^m \| \geqslant C(\tilde{\lambda} - \epsilon)^m$$

因此式(7.2.21)中的 λ 必然至少是 $\tilde{\lambda}2^l$,且 Holder 指数至多是 $l + |\lg\lambda|/\lg2 \leqslant |\lg\tilde{\lambda}|/\lg2$。这两种方法的区别在于后一种方法在即使 $M_0(\xi)$ 为非正时也能给出最优估计,不像 7.1.3 节中那样。

2. 条件式(7.2.21)表明在使用定理 7.2.1 前,在 T_0, T_1 上所加的无穷多条件必须要先进行检验。幸运的是,式(7.2.21)能归结为等价条件,这些等价条件能在有限次计算和搜索中进行检验。细节请参见 Daubechies 和 Lagarias(1992)。

3. 实践中没有必要用 T_0 和 T_1 并将它们限制到 E_{2K}。可以直接定义对应于 $m_0(\xi)/((1+e^{-i\xi})/2)^K$ 的系数的矩阵 $\tilde{T}_0$, $\tilde{T}_1$。乃证 $\| T_{d_1} \cdots T_{d_m}|_{E_{2K}}|$ 的界与在 $\| \tilde{T}_{d_1} \cdots \tilde{T}_{d_m} \| \cdot 2^{-Lm}$ 上的界是等价的(见 Daubechies 和 Lagarias(1992),5 节)。矩阵 $\tilde{T}_d$ 比矩阵 T_d 小得多(用 $(N-k)\times(N-k)$ 代替 $N\times N$)。

由于此方法适用于满足方程(7.2.1)型的任何函数,因此可以把它用于重分格式的基本函数中。对于式(6.5.14)的对应于 Lagrange 插值函数,详细分析结果,显示 F 是几乎 C^2 的:它是 C^1 的,且 F' 满足

$$|F'(x) - F'(x+t)| \leqslant C|t| |\lg|t||$$

此结论早已为 Dubuc(1986)得到,但我们的矩阵法能做得更多!它们(指矩阵法——作者)能证明 F' 是几乎处处可微的,甚至能在那些适定(Well defined)点处计算出 F'',细节请参见 Daubechies 和 Lagarias(1992)。

7.3 具有更高正则性的紧支撑小波

由推论 5.5.2 可知，仅当基本小波 ψ 有 N 阶零矩时，一个正交小波基才能由 C^{N-1}小波构成。(我们隐含地假定了 ψ 是从多分辨分析而来并且 ϕ 与 ψ 都有充分的衰减性；两个条件对第 6 章中构造的紧支撑小波基都是平凡满足的。)我们构造${}_N\phi$ 的动机，就在于要求所导出的${}_N\phi$ 有 N 个零矩。在 7.1.2 节中的渐近结果显示出${}_N\phi$、${}_N\psi \in C^{\mu N}$，$\mu \approx 0.2$。这意味着 80% 的零矩阵被浪费掉，即同样的正则性可以只用有 $N/5$ 的零矩来实现。

对小值 N，一些类似现象发生了。例如，即使${}_2\psi$、${}_3\psi$ 各自分别有两个和三个零矩，${}_2\phi$ 却化为连续的而不是 C^1 的，${}_3\phi$ 是 C^1 的但不是 C^2 的，因此，在这两种情况中，可以"牺牲"一个零矩而使用额外的自由度去获得与${}_2\phi$ 或${}_3\phi$ 有同样支撑宽度但都有更好的 Holder 指标的 ϕ，这等于用 $|m_0(\xi)|^2 = (\cos^2 \frac{\xi}{2})^{N-1} \times \left[P_{N-1}\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right) + a\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^N \cos\xi\right]$ 去代替 $|m_0(\xi)|^2 = \left(\cos^2 \frac{\xi}{2}\right)^N P_N\left(\sin^2 \frac{\xi}{2}\right)$ (见式(6.1.11))，并选择 a 使得 ϕ 的正则性提高。图 7.4 和图 7.5 给出了 $N=2$,

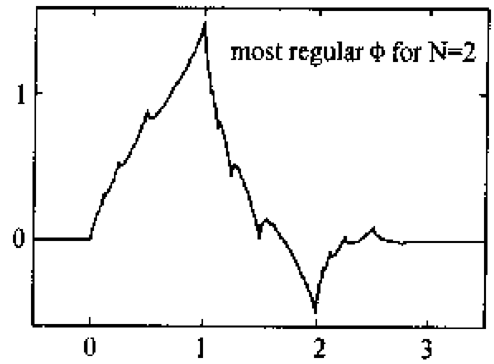


图 7.4 支撑宽度为 3 的具有最高正则性小波的尺度函数 ϕ

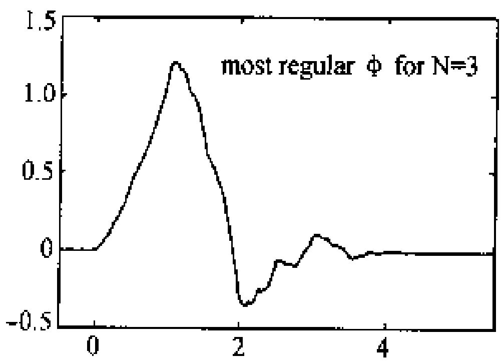


图 7.5 支撑宽度为 5 的具有最高正则性小波构成的尺度函数 ϕ

3 的例子,其对应的 h_n 如下

$$N=2 \qquad h_0=\frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$h_1=\frac{6}{5\sqrt{2}}$$

$$h_2=\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

$$h_3=\frac{-1}{5\sqrt{2}}$$

$$N=3 \qquad h_0=0.37432841633/\sqrt{2}$$

$$h_1=0.109093396059/\sqrt{2}$$

$$h_2=0.786941229301/\sqrt{2}$$

$$h_3=-0.146269859213/\sqrt{2}$$

$$h_4=-0.161269645631/\sqrt{2}$$

$$h_5=0.0553358986263/\sqrt{2}$$

由于这些例子中 T_0, T_1 特征值的退化[①],导致寻找最优 Hölder 指数比较困难。可以证明这两个函数的 Hölder 指数最小分别为 0.72261, 1.40198,最大分别为 0.7369, 1.4176。这最后的值可能是真实的 Hölder 指数,详情请参见 Daubechies(1990b)。

7.4 正则性或消失矩

前节的例子表明对于有固定支撑宽度的 ϕ 与 ψ,或等价地,对子相联系的子带编码格式中有固定长度的滤波器,其能导致最大正则性的 h_n 的选择与 ψ 的消失矩的最大数目 N 的选择可以是不同的。问题是:哪一个更重要?消失矩抑或正则性?答案依据于应用,而且常常是不太清楚的,Beylkin, Coifman 和 Rokblin(1991)将紧支撑正交小波用于矩阵的压缩,即将它们变为稀疏形式,细节可参看他们的原始论文或 Ruskai 等(1991)的文集中有关 Beylkin 的一章;其有效工作之一便是消失矩的数目。如果你想分解一个函数 $F(x)$为小波(矩阵应该用双变量函数来模拟,但所讨论之点按一种简化处理也与一个变量一样)。你应当计算所有的小波系数$\langle F, \psi_{j,k}\rangle$,为了压缩信息,需丢弃所有小于门限(或阈值)$\epsilon$ 的系数。让我们看看在某些小尺度 $j=-J$($J\in\mathbb{N}$, J"相当大"),这意味着什么?设若 F 是 C^{L-1}的且 ψ 有 L 个消失矩,则对邻近 $2^{-J}k$ 的 x,有

① 见本章末注 8。

$$F(x)=F(2^{-J}k)+F^1(2^{-J}k)(x-2^{-J}k)$$
$$+\cdots+\frac{1}{(L-1)!}F^{(L-1)}(2^{-J}k)(x-2^{-J}k)^{L-1}+(x-2^{-J}k)^L R(x)$$

式中 R 是有界的。假设用 $\psi(2^J x-k)$来乘并积分，则前 L 项没有贡献，因为 $\int dx x^l \psi(x)=0, l=0,\cdots,L-1$。相应地

$$|\langle F,\psi_{-J,k}\rangle|=|\int dx(x-2^{-J}k)^L R(x)2^{J/2}\psi(2^J x-k)|$$
$$\leqslant C2^{-J(L-1/2)}\int dy\,|y|^L\,|\psi(y)|$$

对 J 很大的，除非 R 大到接近$k2^{-J}$，而小得可以忽略。门限化后，只剩下小尺度的接近于 F 或它的导数的奇异点的小波系数。假如 ψ 的消失矩数目 L 很大[①]效果是非常之好的，注意到 ψ 的正则性在这里的讨论中不起什么作用。这样看起来在 Beylkin、Coifman 和 Rokhlin 型的应用中，消失矩数目的作用远比 ψ 的正则性重要得多。

对另外一些应用，正则性涉及更多一些。假设你想压缩一幅图像的信息。你仍将把它分解成小波(二维小波，例如与张量积多分辨分析相联系的二维小波)。丢掉所有的小系数(这是比较原始的办法。实践中，常常依照某些量化法则，以更高的精度选择某些系数)，得到一个如下类型的表达式：

$$\tilde{I}=\sum_{j,k\in S}\langle I,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}$$

式中 S 只是所有可能值中的一个(小的)子集，它从函数 I 中选出。造成的误差由删掉了的 $\psi_{j,k}$的倍乘构成。假如这是一些非常杂乱无章的事物(指图像—作者)，则 I 和 $\tilde{I}$ 之间的差别会比 ψ 较光滑时明显得多。虽然允许条件相对粗糙，但建议至少要求一定程度的正则性。在 Antonini 等人(1991)所报告的一些实验看起来更坚定了这个看法。但为了得到令人满意的解答，应要求作更多的实验。

等价于 $m_0(\xi)$除以$(1+e^{-i\xi})^{L+1}$的求和规则式(7.2.20)，有另一个有趣结果。在详细研究的例子${}_2\phi$ 中，我们发现式(7.2.13)和式(7.2.14)意味着

$$e_1\cdot v(x)=1, e_2^0\cdot v(x)=-x$$

(我们是对 v_j 证明上式成立的，因为 $v=\lim_{j\to\infty}v_j$，故两者都是成立的)。或者，用术语 ϕ 而不用v，对所有 $x\in[0,1]$

$$\phi(x)+\phi(x+1)+\phi(x+2)=1$$

---

① 见本章末注 9。

$$(1-2a_0)\phi(x)+(2-2a_0)\phi(x+1)+(3-2a_0)\phi(x+2)=-x$$

因为 Support(ϕ)=[0,3],容易验证这意味着对所有 $y\in\mathbb{R}$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(y+n)=1$$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}(n+1-2a_0)\phi(y+n)=-y$$

所有次数小于或等于 1 的多项式都可写成 $\phi(x-n)$的线性组合。有时也有类似的情况发生:条件式(7.2.20)保证所有阶数小于或等于 L 的多项式都可由 $\phi(x-n)$的线性组合生成(见 Fix 和 Strang(1969),Cavaretta,和 Micchelli(1991))。这又可用来解释为什么条件$\frac{d^l}{d\xi^l}m_0|_{\xi=\pi}=0,l=0,\cdots,L$ 在子带滤波格式中有用。理想情况下,人们希望有一个低频通道,以便滤波后,只包含图像的缓变部分,而真正的"高频"特性只出现在另外的通道中,低次多项式本质上反应了缓变部分,求和规则式(7.2.20)保证它们(或者它们在一个大区间内的限制,或整个就在 $L^2(\mathbb{R})$中,这里没有计及其边界效应)是在每一个 V_j 中,亦即,它们完全由低频通道给出。

在子带编码设计 FIR 滤波器时,习惯上没有必要对 m_0 的消失矩给予更多的注意,它只反映了滤波器在 $\xi=\pi$[①] 时的"平坦性"。下面的讨论显示出滤波器的级联是如何进行的,然而,至少有一些消失矩是重要的。假设对一个信号使用三个连续的低通滤波器加+选-的处理步骤,设原始信号为 f^0,经过傅里叶变换为$\hat{f}^0(\xi)=\sum_n f_n^0 e^{-in\xi}$,则一个滤波器加+选-处理的结果是 f_n^1,这里$\hat{f}^0(\xi)=\sum_n f_n e^{-in\xi}$满足

$$\hat{f}'(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{f}^0\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)+\hat{f}^0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)m_0\left(\frac{\xi}{2}+\pi\right)\right] \quad (7.4.1)$$

第二项可看作是在 f' 低采样速率下造成的混迭。类似地,三个这样的运算导致

$$\hat{f}^3(\xi)=2^{-2/3}\left[\hat{f}^0\left(\frac{\xi}{8}\right)m_0\left(\frac{\xi}{8}\right)m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)+7\text{ 个“折叠”项}\right. \quad (7.4.2)$$

积 $m_0(\xi)m_0(2\xi)m_0(4\xi)$扮演了一个重要的角色。图 7.6 显示对 $m_0(\xi)=1$ 对 $|\xi|\leqslant\pi/2$, $m_0(\xi)=0$ 对 $\pi/2\leqslant|\xi|\leqslant\pi$ 理想低通滤波器积的形象。假如低通滤波器不理想,则它会"泄漏"一些到高通区域 $\pi/2\leqslant|\xi|\leqslant\pi$,保持这种泄漏是重要的,特别是当滤波器是级联起来时更是如此;它提供式(7.4.1)中的"重叠"项且会造成高频和低频的混迭,完全的重构是不可能的了。在图 7.6 的理想情况中,$m_0(2\xi)$在 $\xi\in[3\pi/4,\pi]$在的"隆起部分"在积 $m_0(\xi)m_0(2\xi)m_0(4\xi)$中被消除是因为在此范围内 $m_0(\xi)=0$,在 $m_0(4\xi)$的额外"隆起部分"也是如此。结果使 $m_0(\xi)m_0\times$

① 见本章末注 10。

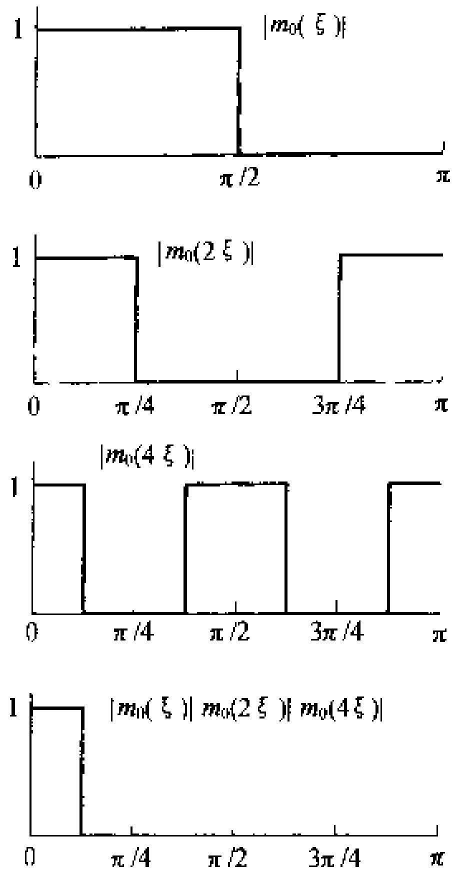


图 7.6 理想的低通滤波器下 $m_0(\xi)$、$m_0(2\xi)$、$m_0(4\xi)$及它们的乘积的图像

$(2\xi)m_0(4\xi)$在 $\xi\in[0,\pi/8]$时为 1，而在 $\xi\in[\pi/8,\pi]$时为 0。在非理想情况下也可以得到类似的结果，这时可以利用 m_0 在 $\xi=\pi$ 处为零的合理的重数以消除“级联”$m_0(2\xi)$的最大值。图 7.7 中显示了这个现象，它比较了一个小波滤波器与一个非小波完全重构滤波器。在图 7.7(a)是$|m_0(\xi)|$对两个正交完全重构滤波器的图像(即，$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$)，每一个有 8 个节拍；左边的滤波器对应于 6.4 节中所构造的例子，它有两阶零矩及一个极大零点在 $\xi=7\pi/9$。在右边的滤波器，因其满足 $m_0(\pi)\neq 0$(因而 $m_0(0)=1$) 故不是一个小波滤波器；它是按照通常的方式构造的，有一个“等纹波”设计：在这里，选择极零点使得两个纹波的波形是与左边的小波滤波器的一个纹波相同，同时保持过渡带在约束范围内尽可能地窄。得到的滤波器比小波滤波器要陡峭一些(它的第一个零点在 $\xi=0.76\pi$ 处而不是小波滤波器的 0.78π 处)。因此看起来更接近于理想滤波器(当然，两者都远离了理想情况，但记住只有 8 个节拍)。图 7.7(b)给出了对这两个例子中$|m_0(\xi)m_0(2\xi)m_0(4\xi)|$的图像，图 7.7(c)故大了图 7.7(b)中图形在 $\pi/2\leqslant\xi\leqslant\pi$ 段的曲线。很显然，在第二种(非小波)情况高频区的泄漏量比小波情形要多；在 L^2 意义与幅值意义下都是如此(右边的最高尖峰比左边要高 3dB)。当考虑更大的滤

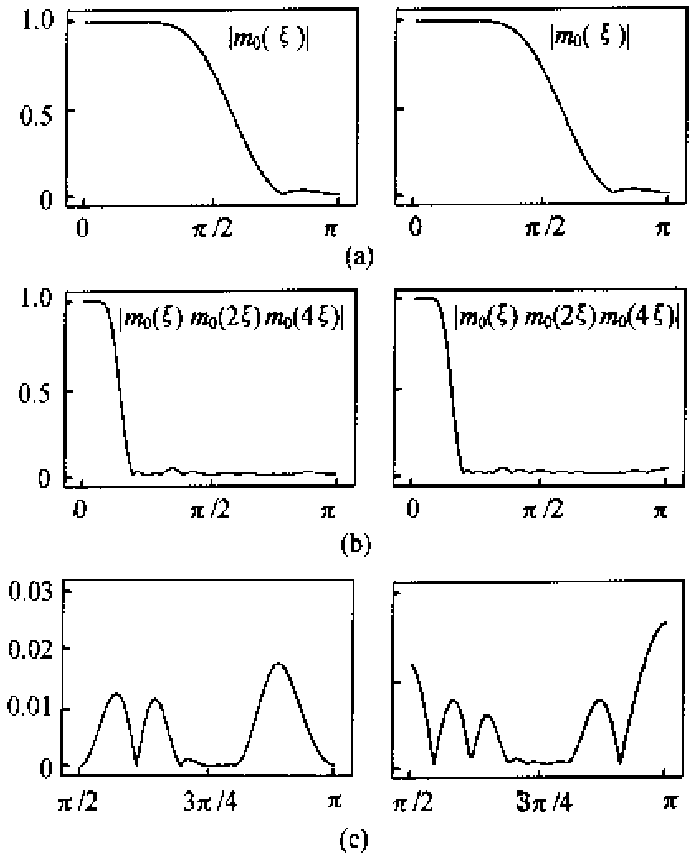


图 7.7　有 8 个节拍及完全重构特性的两个低通滤波器的 3 级联的比较

(a) $|m_0(\xi)|$的图像；(b) $m_0(\xi)m_0(2\xi)m_0(4\xi)$的图像；

(c) (b)在 $\pi/2\leqslant\xi\leqslant\pi$ 段的放大。

波器时，这个效果将更为明显。①

注：

1. 顺便一提，这里证明了 Daubechies(1988b)P. 983 注 3 中的陈述是不对的，从 Meyer's 的证明中提取 μ 的数值时我犯了一个错误。

2. 这是 Daubechies(1988 b)的附录的本质，然而要注意那个附录中的类型！

3. 假如将 F 是一个紧支撑的 L^1 函数的限制去掉，则可能有很多其他解。另一方面，如果坚持要求 F 有紧支撑且$F\in L^1$，则对某些 $m\in\mathbb{N}$，必有 $\sum_{k=0}^{k}c_k=2^{2m+1}$，而且 F 将是方程(7.2.1)的有紧支撑 L^1 解的第 m 阶导数。此时方程中的系数 c_k 应该用 $2^{-m}c_k$ 代替，不影响 $\sum_{2k}ck=2$ 的普通性。证明可见 Daubechies 和 Lagarias(1991)。

4. 在我们考虑的所有例子中，没有必要选择稍后所构造的特别的 F_0；算法对任何有整数 1 的 F_0 均成立(译者注：此地似乎可理解为 $F_1=T'F_0$)。

---

① 见本章末注 11。

5. 我们不明显地假设 c_k 是实数,对复数 c_k,一切都成立,不过 $v(x)\in C^k$。

6. 在此特殊情况下,对 E_1 赋以范数 $|||a,-a-b,b|||^2=a^2+b^2$(与 E_1 上的标准 Euclich 范数等价),可以发现 $\sup_{u\in E_1}|||T_0u|||/|||u|||\approx0.728$, $\sup_{u\in E_1}|||T_1u|||/|||u|||\approx0.859$ 所以,当 $A=0.859$ 时,由式(7.2.11)得 $|||v_{j+1}(x)-v_j(x)|||\leqslant A^j|||v_1(x)-v_0(x)|||$。立即可导出

$$\begin{aligned}\|v_j(x)\|&\leqslant\|v_0(x)\|+C\sum_{k=1}^{j}|||v_k(x)-v_{k-1}(x)|||\\&\leqslant|||v_0(x)|||+(1-A)^{-1}C|||v_1(x)-v_0(x)|||\end{aligned}$$

它们是在 x 和 j 上的一致界。

7. 下面的讨论也给出一个直接的证明。设 $2^{-(j+1)}\leqslant y-x\leqslant2^{-j}$,则存在 $l\in\mathbb{N}$ 使得下列两者必有一个成立

$$(l-1)2^{-j}\leqslant x\leqslant y\leqslant l2^{-j}\text{ 或 }(l-1)2^{-j}\leqslant x\leqslant l2^{j}\leqslant y\leqslant(l+1)2^{-j}。$$

我们只讨论第二种情况;第一种是相似的,由式(7.2.17)有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|\leqslant&|f(x)-f_j(x)|+|f_j(x)-f_j(l2^{-j})|\\&+|f_j(l2^{-j})-f_j(y)|+|f_j(y)-f(y)|\\\leqslant&2C2^{-\alpha j}+|f_j(x)-f_j(l2^{-j})|+|f_j(y)-f_j(l2^{-j})|\end{aligned}$$

因为 l 的选择,存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $x'=x-k$ 和 $l'2^{-j}=l2^{-j}-k$ 都在$[0,1]$上。还可以对 x' 和 $l'2^{-j}$ 选择其二进制展开使得它们开始的 j 位数字相同(选择 $l'2^{-j}$ 的展开的末端均为 1 且设 x' 是二进制的,x'的展开末端为 0)。它导出

$$\begin{aligned}|f_j(x)-f_j(l2^{-j})|\leqslant&\|v_j(x')-v_j(l'2^{-j})\|\\=&\|T_{d_1(x')}\cdots T_{d_j(x')}[v_0(\tau^jx')-V_0(\tau^j(l'2^{-j}))]\|\\\leqslant&C2^{-\alpha j}\end{aligned}$$

式中已经用到了 $\|T_{d_1}\cdots T_{d_m}|_{E_2}\|\leqslant C2^{-\alpha m}$,用到了 v_0 的界及对所有 $u,u'_1,v_0(u)-v_0(u')\in E_1$ 的关系。类似地也可以确定$|f_j(y)-f_j(l2^{-j})|$的界,综合起来即得出了

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C'2^{-\alpha j}\leqslant C''|x-y|^{\alpha}$$

这证明了指数为 α Hölder 连续性。

8. 这里更正了第一次出版时的一个错误,它在 $N=2$ 时给出了太大的 Hölder 指数值。我感谢 L. Villemoes 和 C. Heil 给我指出了这个错误。顺便一提,例子 $N=2$ 将是一个范例,即式(7.2.21)中最好的 λ 严格大于 $\max[\rho(T_0|_{E_1}),\rho(T_1|_{E_1})]$,在这种情况下,$\max[\rho(T_0|_{E_1})=\rho(T_1|_{E_1})]=\frac{3}{5}$,且$\frac{3}{5}[\rho(T_0T_1^{12})]^{1/13}\approx1.09946\ldots>1$。

9. 当然,Beylkin,Coifman 和 Rokhlin(1991)比这里包含的更多!对一大类矩阵均可证明,在进行小波正交基变换后,可以把 $N\times N$ 的稠密矩阵压缩至稀疏结构,即只有 $O(N)$个元素大于门限 ϵ。由丢弃所有小于 ϵ 的项目引起的L^2 误差是 $O(\epsilon)$,比这里所阐明的"压缩"程度高得多的是由 David 和 Journe 推出的 $T(1)$定理,但其证明必须要用"硬"分析的手段。

10. 下面的讨论对双正交情况(见第8章)也成立,那时,m_0 在 $\xi=0$ 和在 $\xi=\pi$ 时的平坦性不必是相同的;计算的是在 $\xi=\pi$ 处 O 的重数。

11. 在 Cohen 和 Johnston(1992)中,滤波器是综合运用"标准"方法和小波方法优化设计的。

第 8 章　紧支撑正交小波的对称性

相比于前面介绍过的非紧支小波基，比如 Meyer 和 Battle-Lemarie 基，迄今所见到的紧支正交小波基的例子显然都是非对称的。本章将讨论为什么会有这种非对称性存在？关于非对称性能做些什么？是否应该做些什么？

8.1　紧支撑正交小波基缺乏对称性

从第 5 章可知多分辨分析无法惟一确定尺度函数 ϕ 和小波函数 ψ。这点再次由下述引理所证实：

引理 8.1.1　若 $f_n(x)=f(x-n), g_n(x)=g(x-n), n\in\mathbb{Z}$，组成 $L^2(\mathbb{R})$ 上的同一个子空间 E 的标准正交基，则存在一个周期为 2π 的函数 $\alpha(\xi)$，且 $|\alpha(\xi)|=1$，使得

$$\hat{g}(\xi)=\alpha(\xi)\hat{f}(\xi)$$

证明：

1. 由于 $f_n(x)$ 是空间 E 的标准正交基，$g\in E, g=\sum_n \alpha_n f_n, \sum_n |\alpha_n|^2=\|g\|^2=1$，从而有 $\hat{g}(\xi)=\alpha(\xi)\hat{f}(\xi)$，其中 $\alpha(\xi)=\sum_n \alpha_n e^{-in\xi}$。

2. 如第 5 章所述，$f(.-n)$ 的归一化与 $\sum_n |\hat{f}(\xi-2\pi m)|^2=(2\pi)^{-1}$a.e.等效，同样，$\sum_n |\hat{g}(\xi-2\pi m)|^2=(2\pi)^{-1}$，故 $|\alpha(\xi)|=1$。　■

但是，我们还有如下引理：

引理 8.1.2　若 $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是一个有限长序列（即除有限多个 α_n 外，其余均为 0），且 $|\alpha(\xi)|=1$，则存在 $n_0\in\mathbb{Z}, \alpha_n=\alpha\delta_{n,n_0}$。

证明：

1. 因为 $|\alpha(\xi)|^2=1$，所以 $\sum_n \alpha_n\overline{\alpha_{n+l}}=\delta_{l,0}$。　(8.1.1)

2. 确定 n_1, n_2 使得 $\alpha_{n_1}\neq 0\neq\alpha_{n_2}$，且当 $n<n_1$ 或 $n>n_2$ 时 $\alpha_n=0$；

3. 根据式(8.1.1)，$\sum_n \alpha_n\overline{\alpha_{n+n_2-n_1}}=\delta_{n_2-n_1,0}$。但由 n_1、n_2 的定义，该和式应由单项式 $\alpha_{n_1}\overline{\alpha_{n_2}}$ 组成，所以 $n_1=n_2$。　■

将两个引理结合起来，意味着对于给定的多分辨分析，有紧支撑的 ϕ 与 ψ 除了一个平移外是惟一的。

推论 8.1.3 若 f,g 都是紧支集，且 $f_n=f(.-n),g_n=g(.-n),n\in\mathbf{Z}$ 为同一子空间 E 上的标准正交基，则存在 $\alpha\in\mathbf{C},|\alpha|=1$ 及 $n_0\in\mathbf{Z}$，使得 $g(x)=\alpha f(x-x_0)$。

证明： 根据引理 8.1.1，$\hat{g}(\xi)=\alpha(\xi)\hat{f}(\xi),\alpha_n=\int \mathrm{d}xg(x)\overline{f(x-n)}$ 由于 f、g 有紧支集，故仅有有限个 $\alpha_n\neq0$，再由引理 8.1.2，$\alpha(\xi)=\alpha\mathrm{e}^{-in_0\xi}$，所以 $g(x)=\alpha f(x-n_0)$。 ■

特别地，若 ϕ_1 和 ϕ_2 均有紧支集且它们又都是同一个多分辨分析的"标准正交化"① 的尺度函数。那么 ϕ_2 将是 ϕ_1 的一种平移。假定再约定 $\int \mathrm{d}x\phi_1(x)=1=\int \mathrm{d}x\phi_2(x)$（见第 5 章），则常数 $\alpha=1$。这个关于惟一性的结果可以用来证明除 Haar 基外所有具有紧支集的实的标准正交小波基都是非对称的。

定理 8.1.4 假设与某个多分辨分析相联系的尺度函数 ϕ 和小波 ψ 都是实的且具有紧支集。若 ψ 要么是对称的或反对称的，则 ψ 是 Haar 函数。

证明：

1. 平移 ϕ 使得 $h_n=\int \mathrm{d}x\phi(x)\phi(x-n)=0 \quad n<0;h_n\neq0$。由于 ϕ 是实的，故 h_n 也是实数。设 N 是 h_n 不为 0 的最大正整数，即 $h_N\neq0$，而 $n>N$ 时，$h_n=0$；则 N 是奇数，否则若 N 为偶数，令 $N=2n_0$，代入 $\sum_n h_nh_{n+2l}=\delta_{l,0}$，当 $l=n_0$ 时将产生矛盾。

2. 因为 $n<0$ 或 $n>N$ 时，$h_n=0$，由引理 6.2.2②，support$\phi=[0,N]$。再由标准定义(5.1.34)式将有 support$\psi=[-n_0,n_0+1]$，其中 $n_0=\dfrac{N-1}{2}$，对称轴位于 1/2 处，故要么 $\psi(1-x)=\psi(x)$，要么 $\psi(1-x)=-\psi(x)$。

3. 因此

$$\psi_{j,k}(-x)=\pm2^{-j/2}\psi(2^{-j}x+k+1)=\pm\psi_{j,-(k+1)}(x)$$

该式表明空间 W_j 在映射 $x\to-x$ 下不变。由于 $V_j=\overline{\bigoplus_{k>j}W_j}$，所以空间 V_j 也是不变的。

4. 令 $\tilde{\phi}(x)=\phi(N-x)$，则 $\tilde{\phi}(.-n)$ 生成空间 V_0 上的正交基(因为映射 $x\to-x$ 下空间 V_0 不变)。$\int\tilde{\phi}(x)\mathrm{d}x=\int\phi(x)\mathrm{d}x=1$，sup$\tilde{\phi}$ = supϕ，根据推论 8.1.3，

---

① 见本章末注 1。

② 见本章末注 2。

有 $\tilde{\phi}=\phi$。即 $\phi(N-x)=\phi(x)$。从而

$$\begin{aligned}h_n&=\sqrt{2}\int dx\phi(x)\phi(2x-n)\\&=\sqrt{2}\int dx\phi(N-x)\phi(N-2x+n)\\&=\sqrt{2}\int dy\phi(y)\phi(2y-N+n)\\&=h_{N-n}\end{aligned}\tag{8.1.2}$$

5. 另一方面

$$\begin{aligned}\delta_{l,0}&=\sum_n h_n h_{n+2l}\\&=\sum_m h_{2m}h_{2m+2l}+\sum_m h_{2m+1}h_{2m+1+2l}\\&=\sum_m h_{2m}h_{2m+2l}+\sum_m h_{2n_0-2m}h_{2n_0-2m-2l}\\&=2\sum_m h_{2m}h_{2m+2l}\end{aligned}$$

根据引理 8.1.2,上式意味着对某一个 $m_0\in\mathbf{Z}$, $|\alpha|=2^{-1/2}$,有 $h_{2m}=\delta_{m,m_0}\alpha$;由于 $h_0\neq0$,上式也意味着 $h_{2m}=\delta_{m,0}$,由式(8.1.2),$h_N=h_0=\alpha$, $h_{2m+1}=\alpha\delta_{m,m_0}$。由归一化 $\sum_n h_n=\sqrt{2}$(见第 5 章),可得出 $\alpha=1/\sqrt{2}$。

6. 从而有

$$h_{2m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m,0},h_{2m+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{m,n_0}$$

或

$$m_0(\xi)=\frac{1}{2}(1+e^{-iN\xi})$$

以及

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}((1-e^{-iN\xi})/iN\xi)$$

或

$$\phi(x)=\begin{cases}N^{-1} & 0\leqslant x\leqslant N\\0 & 其他\end{cases}$$

若 $N=1$,对应的将是 Haar 基;若 $N>1$, $\phi(.-n)$不是标准化正交的,这将与定理假设矛盾。 ■

注意:

1. 不存在对称的或反对称的实的紧支集小波对熟悉子带编码的人来讲并不奇怪。Smith 和 Barnwell(1986)已注意到对称性和精确重构在子带滤波中互不兼

容。定理 8.1.4 惟一附带的结论是 ϕ 的对称性意味着 h_n 有对称性。当然这也是很直观的。

2. 若去掉 ϕ 是实的条件，即使 ϕ 有紧支集(见 Lawton. 私人通信，1990)，对称性也有可能存在。

因而 6.4 节中描述的所有例子的非对称性都是不可避免的。但为什么我们会注意这个问题呢？因为对称性是非常诱人的。那么没有对称性是否就一事无成吗？对某些应用场合并非如此，比如在 Beylkin，Coifman 和 Rokhlin(1991 年)的数值分析应用中，非对称小波效果很好，当然在其他应用场合，非对称性确实是一件麻烦事，比如在图像编码中，量化误差在图像的边缘更显著，人眼视觉特性对非对称误差比对对称误差要敏感。换言之，在同样的感觉误差下更小的非对称性可获得更大的压缩率。因而对称滤波器能更容易地处理图像的边缘(见第 10 章)。这也是为什么子带编码工程技术中要求对称性的一个理由。下一节将讨论如何尽可能降低归一化正交小波的非对称性，或者，若放弃归一化正交性的要求，怎样恢复对称性。

8.1.1 近似线性相位

在工程上对称滤波器常称为线性相位滤波器。如果一个滤波器是非对称的，它与对称性的区别是通过判断其相位与一个线性函数的差别来衡量的。准确地讲，一个具有滤波系数 a_n 的滤波器，如果函数 $a(\xi) = \sum_n a_n e^{-in\xi}$ 的相位是 ξ 的线性函数，即 $a(\xi) - e^{-il\xi}|a(\xi)|$，对某一个 $l \in \mathbf{Z}$，称其为线性相位滤波器。该式表明 a_n 关于 l 是对称的，$a_n = a_{2l-n}$。据此定义，Haar 滤波器 $m_0(\xi) = (1 + e^{-i\xi})/2$ 不是线性相位滤波器，尽管其滤波器系数是对称的。主要原因在于 h_n^{Haar} 是关于 $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$ 对称的；而

$$m_0(\xi) = \begin{cases} e^{-i\xi/2} \, | m_0(\xi) | & 0 \leqslant \xi \leqslant \pi \\ -e^{-i\xi/2} \, | m_0(\xi) | & \pi \leqslant \xi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

的相位在 $\xi = \pi$ 处不连续，此地 $|m_0| = 0$。如果将线性相位的定义推广到包括 $a(\xi)$ 的相位是具有常数斜率的分段线性函数，仅在 $|a(\xi)| = 0$ 时是不连续的滤波器时，像 Haar 滤波器这种具有同样对称性的滤波器也包括在线性相位滤波器中。为了制作一个“接近于”对称性的滤波器，基本思想是编造其相位使滤波器几乎是线性的。接下来应用此想法讨论 ${}_N\phi$，${}_N\psi$ 的“标准”构造方法。正如 6.4 节所述。有

$$| {}_N m_0(\xi) |^2 = (\cos\xi/2)^{2N} P_N(\sin^2\xi/2)$$

系数 ${}_N h_n$ 通过取 P_N 的谱因子的平方根求出。通常由 $L(e^{i\xi}) = P_N(\sin^2\xi/2)$，并将 $L(z)$ 表成 $(z - z_l)(z - \overline{z_l})(z - z_l^{-1})(z - \overline{z_l}^{-1})$ 或 $(z - r_l)(z - r_l^{-1})$ 的乘积形式。这里 z_l、r_l 分别为 $L(z)$ 的复根和实根。对每组的四个复根选择一对 $\{z_l, \overline{z_l}\}$。对

每对的两个实根选择一个 r_l 作归一化处理,有

$$_Nm_0(\xi)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-i\xi}}{2}\right)^N\prod_l(\mathrm{e}^{-i\xi}-z_l)(\mathrm{e}^{-i\xi}-\overline{z_l})\prod_k(\mathrm{e}^{-i\xi}-r_k)$$

$_Nm_0(\xi)$的相位可根据每一项的相位计算出来。由于

$$(\mathrm{e}^{-i\xi}-R_l\mathrm{e}^{-i\alpha_l})(\mathrm{e}^{-i\xi}-R_l\mathrm{e}^{i\alpha_l})=\mathrm{e}^{-i\xi}(\mathrm{e}^{i\xi}-2R_l\cos\alpha_l+R_l^2\mathrm{e}^{j\xi})$$

及

$$(\mathrm{e}^{-i\xi}-r_l)=\mathrm{e}^{-i\xi/2}(\mathrm{e}^{-i\xi/2}-r_l\mathrm{e}^{j\xi/2})$$

相应的相位表达式分别为

$$\overline{\phi}_l(\xi)=\arctan\left(\frac{(R_l^2-l)\sin\xi}{(1+R_l^2)\cos\xi-2R_l\cos\alpha_l}\right)$$

和

$$\overline{\phi}_k(\xi)=\arctan\left(\frac{r+1}{r-1}\tan\frac{\xi}{2}\right)$$

正如 Haar 基那样,选择 arctan 的值使得$\overline{\phi_l}$在$[0,2\pi]$内连续且 $\phi_l(0)=0$,由于消除了可能存在的不连续性,因此所求得的相位可能不是真实的相位值。为了观察相位的线性情况,作这种处理是很必要的。然而,更愿意仅提取$\overline{\phi_l}$的非线性部分;故定义

$$\psi_l(\xi)=\overline{\phi_l}(\xi)-\frac{\xi}{2\pi}\overline{\phi_l}(2\pi)$$

在 6.4 节构造$_N\phi$ 时,选择 $Z_l r_l$ 的绝对值均小于 1,这就是所谓的“极值相位”选择,这将导致总的相位 $\psi_{tot}(\xi)=\sum_l\psi_l(\xi)$ 具有很强的非线性性(见图 8.1)。为了获得尽可能接近线性相位的 m_0,必须从四个或二个根中选择零值以保持 $\psi_{tot}(\xi)$尽可能接近于零。事实上,有 $2^{[N/2]}$种选择方案。对每种选择,由于其互补选择(即选择其余部分为零)将导出 m_0 的复共轭(直到一个相位平移之差)。它对应于 ϕ 的镜像,因此实际选择总数可减少一半。对于 $N=2$ 或 $N=3$,仅有一对 ϕ_N 及ψ_N;对 $N\geqslant4$,为得到更接近线性相位的滤波器,ψ_{tot}将有 $2^{[N/2]-1}$种不同图形的选择。若 R_l 接近于 1,α_l 接近于 0 或 π,用 Z_l^{-1}、$\overline{Z_l}^{-1}$代替 Z_l 及$\overline{Z_l}$效果会更好,图 8.1 分别画出了 $N=4$、6、8、10 时 $\psi_{tot}(\xi)$的图形。每幅图均有两条曲线,它们分别是 6.4 节中的原始结构及此地的最平坦的 ψ_{tot}的图形。值得指出的是,在各种情况下原始构造都对应于 ψ_{tot}的最不平坦形状,它们所对应的 ϕ 的有最大的不对称性。图 6.4 中所画的为 $N=4$、6、8、10 时具有最小不对称的 ϕ 和 ψ 的图形,它们对应的 ψ_{tot}有最平坦的形状;$N=4\sim10$ 时的滤波器系数列于表 6.3。

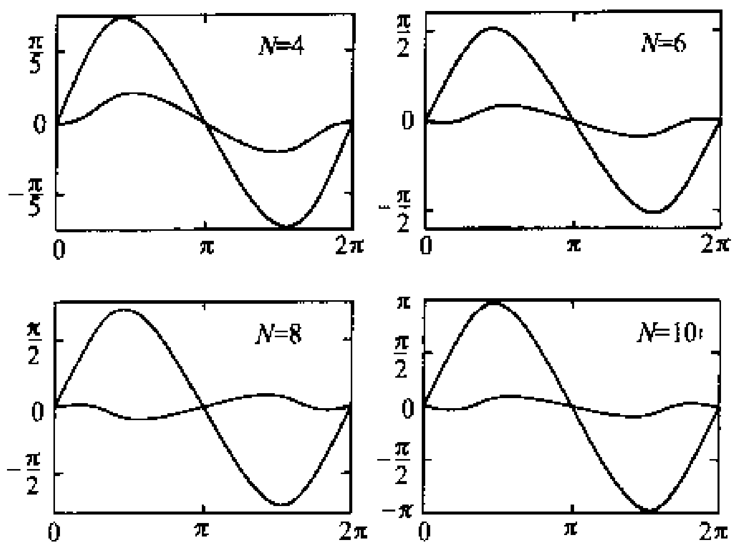


图 8.1　$N=4,6,8,10$ 时，$m_0(\xi)$的相位的非线性部分 ψ_{tot}的图形，它们分别对应于级值相位选择(最大振幅曲线 7 与"最接近线性相位"选择(最平坦曲线)

注意：

1. 本节讨论中，m_0 和$|L|^2$ 仅限于式(6.1.10)和式(6.1.12)式给出的情形。这意味着当 ψ 有N 阶零矩及ϕ 的支集宽度为 $2N-1$ 时(这是 N 阶零矩时的最小宽度)，图 6.4 的 ϕ 可能是最小不对称的。若 ϕ 有更大的支集宽度，那么它可能有更好的对称性。这种情形点时应于式(6.1.11)中式中选择 $R\neq 0$。例如下节中的函数 ϕ 就有比图 6.4 更好的对称性，但其支集宽度更大。

2. 如果在第 5 章的标准多分辨分析基础上超出一点，可以获得更好的对称性。定义函数 $\phi^1,\phi^2,\psi^1,\psi^2$ 如下：

$$\phi^1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n\phi^2(2x-n)$$

$$\phi^2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_{-n}\phi^1(2x-n)$$

$$\psi^1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n(-1)^n h_{-n+1}\phi^2(2x-n)$$

$$\psi^2(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n(-1)^n h_{n-1}\phi^1(2x-n)$$

用与第 5 章相同的运算可知函数 $\psi^1_{2j,k}(x)=2^{-j}\psi^1(2^{-2j}x-k)$，$\psi^1_{2j+1,k}(x)=2^{-j-1/2}\psi^2(2^{-2j-1}x-k)$，$(j,k\in\mathbf{Z})$，构成 $L^2(\mathbf{R})$上的规范正交基。利用递推公式

$$\hat{\phi}^1(\xi)=m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{4}\right)}m_0\left(\frac{\xi}{8}\right)\overline{m_0\left(\frac{\xi}{16}\right)}\cdots=\prod_{j=1}^{\infty}\left[{}_0(2^{-2j-1}\xi)\,\overline{m_0(2^{-2j-2}\xi)}\right],$$

可以预计 $\hat{\phi}^1(\xi)$的相位比$\hat{\phi}(\xi)=\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}\xi)$更接近线性相位，同时注意到

$\hat{\phi}^2(\xi)=\overline{\hat{\phi}^1(-\xi)}$，$\hat{\psi}^2(\xi)=\overline{\hat{\psi}^1(\xi)}$，因而 $\phi^2(x)=\phi^1(-x)$，$\psi^2(x)=\psi^1(-x)$。图 8.2 画出了 $N=2$ 时由 h_n 获得的 ϕ^1、ψ^1 曲线。其中 $h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，$h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，$h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$，$h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$。对表 6.3 中给出的“最小不对称”的 h_n，做这样处理对 ϕ 略有好处，但对 ψ 似乎意义不大。

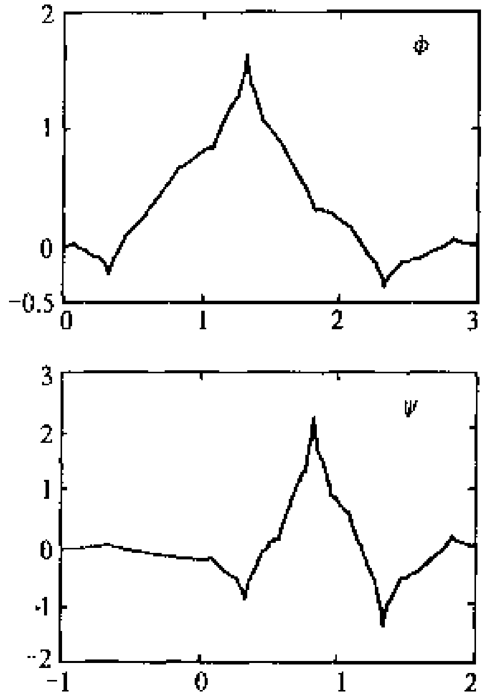


图 8.2　对 6.4 节中的 4－孔(4－tap)小波滤波器施加“交换策略”后得到的尺度函数 ϕ^1 与小波函数 ψ^1 的图形

8.2　Coiflets

在 7.4 节已经提到 ψ 有高零矩数的优点，这可获得较高的压缩率。这是因为对光滑函数其细尺度的小波系数必须为零，$\int\phi(x)\mathrm{d}x=1$。但由于$\langle f,\phi_{J,k}\rangle$没有此结果，若$\int x^l\phi(x)\mathrm{d}x=0, l=1\sim L$，运用 Taylor 展开可以得出对大的 J，有$\langle f,\phi_{-J,k}\rangle=2^{J/2}f(2^{-J}k)$的结论。若 f 光滑其误差是可以忽略不计的。这意味着有一种非常简单的求积方法存在，即可以从 f 的采样值获得细尺度的系数$\langle f,\phi_{-J,k}\rangle$。基于这个道理，1989 年春，R. coifman 提出构造对 ϕ 和 ψ 均具有消失矩的正交小波基[①]。本节将简要介绍如何实现这一目标，细节请见 Daubechies(1990)。

① 见本章末注 4。

由于此项工作首先由 R. Coifman 提出(为的是将它们应用于 Beylkin, Coifman 及 Rokhlin 的算法中),故将这种小波命名为"Coiflets"。

寻找 ϕ,ψ 的目标是使得

$$\int dx x^l \psi(x) = 0 \quad l = 0,1,\cdots,L-1 \tag{8.2.1}$$

及

$$\int dx \phi(x) = 1, \int dx x^l \phi(x) = 0, l = 0,1,\cdots,L-1 \tag{8.2.2}$$

其中 L 称为 Coiflet 的阶。我们已经知道与式(8.2.1)等价的 m_0 为

$$m_0(\xi) = ((1+e^{-i\xi})/2)^L L(\xi) \tag{8.2.3}$$

那么式(8.2.2)对应于什么呢? 它等价于满足$\frac{d^l}{d\xi^l}\hat{\phi}(\xi)_{\xi=0}=0, l=1,\cdots,L-1$。检验$\hat{\phi}'(0)=0$ 的 m_0 值,由于$\hat{\phi}(\xi)=m_0(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$, 故有

$$\hat{\phi}'(\xi) = \frac{1}{2}m'_0(\xi/2)\,\hat{\phi}(\xi/2) + \frac{1}{2}m_0(\xi/2)\,\hat{\phi}'(\xi/2)$$

因此

$$\hat{\phi}'(0) = \frac{1}{2}m'_0(0)(2\pi)^{-1/2} + \frac{1}{2}\,\hat{\phi}'(0)$$

或者

$$m'_0(0) = (2\pi)^{1/2}\,\hat{\phi}'(0)$$

结果$\int dx x\phi(x)=0$等价于 $m'_0(0)=0$。类似地式(8.2.2)等价于$\frac{d^l}{d\xi^l}\hat{\phi}(\xi)_{\xi=0,}=0$, $l=1,\cdots,L-1$,或者

$$m_0(\xi) = 1 + (1-e^{-i\xi})^L \tilde{L}(\xi) \tag{8.2.4}$$

其中, $\tilde{L}(\xi)$是一个三角多项式。除式(8.2.3)、式(8.2.4)外, m_0 仍然满足 $|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$。设 $L=2K$ 为偶数(若 L 为奇数时的分析也不太困难),则式(8.2.3)、式(8.2.4)意味着必须找到两个三角多项式 P_1,P_2 使得

$$\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right)^K P_1(\xi) = 1 + \left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^K P_2(\xi) \tag{8.2.5}$$

(因为$\left(\frac{1+e^{-i\xi}}{2}\right)^{2K}=e^{-i\xi K}\left(\cos^2\frac{\xi}{2}\right)^K, (1-e^{-i\xi})^{2K}=e^{-iK\xi}\left(2i\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2K}$)。由于式(8.2.5)正是6.1 节中的 Bezout 方程, 因此我们已经知道 P_1、P_2 的一般表达式。特别地, P_1 可写成

$$P_1(\xi) = \sum_{K=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^k + \left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^K f(\xi)$$

其中 $f(\xi)$为一个任意三角多项式,其 Taylor 展开式使得 $m_0(\xi)=((1+e^{-i\xi})/$

$2)^{2K}P_1(\xi)$满足$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1$。在 Daubechies(1990b)的著作中用 $f(\xi)=\sum_{n=0}^{K-1}f_n e^{-in\xi}$将该 Taylor 简化为求 K 个未知数的K 个二次方程的解。当 K 较大时,方程有解,并算出了 $K=1,\cdots,5$ 时的数值解,图 8.3 画出了所得的 ϕ,ψ 的图形;对应的系数列于表 8.1 中。由图可见,ϕ,ψ 比 6.4 节的${}_N\phi,{}_N\psi$ 有更好的对

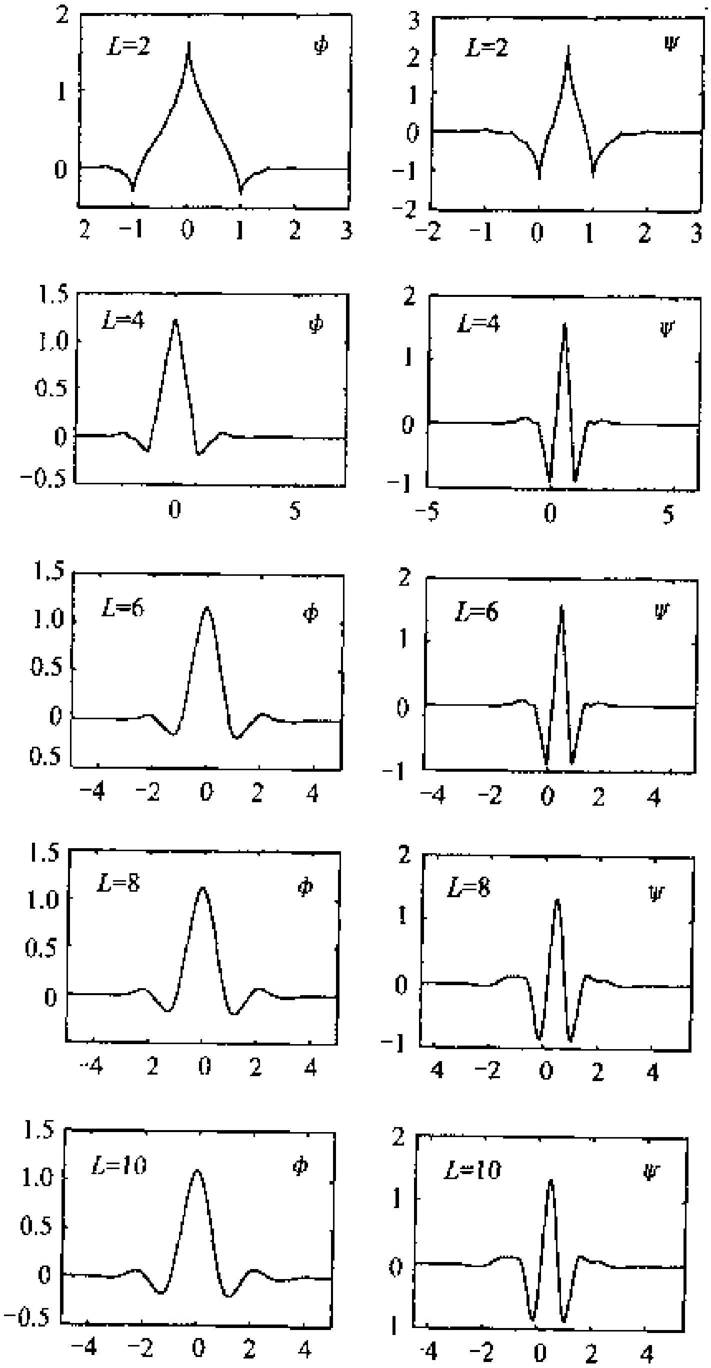


图 8.3　对于 $L=2,4,6,8,10$ 的 Coifletsψ 及其对应的二尺度函数 ϕ,所用情形中 ϕ 与 ψ 的支集宽度均为 $3L-1$

表 8.1

$K=1\sim5$ 时 $L=2K$ 阶的 Coiflets 的系数。(表列系数是已经规范化了的，其和为 1，它们等于 $2^{-1/2}h_n$)

	n	$h_n/\sqrt{2}$
$K=1$	−2	−0.051429728471
	−1	0.238929728471
	0	0.602859456942
	1	0.272140543058
	2	−0.051429972847
	3	−0.011070271529
$K=2$	−4	0.011587596739
	−3	−0.029320137980
	−2	−0.047639590310
	−1	0.273021046535
	0	0.574682393857
	1	0.294867193696
	2	−0.054085607092
	3	−0.042026480461
	4	0.016744410163
	5	0.003967883613
	6	−0.001289203356
	7	−0.000509505399
$K=3$	−6	−0.002682418671
	−5	0.005503126709
	−4	0.016583560479
	−3	−0.046507764479
	−2	−0.043220763560
	−1	0.286503335274
	0	0.561285256870
	1	0.302983571773
	2	−0.050770140755
	3	−0.058196250762
	4	0.024434094321
	5	0.011229240962
	6	−0.006369601011
	7	−0.001820458916
	8	0.000790205101
	9	0.000329665174
	10	−0.000050192775
	11	−0.000024465734
$K=4$	−8	0.000630961046
	−7	−0.001152224852
	−6	0.005194524026
	−5	0.011362459244
	−4	0.018867235378
	−3	−0.057464234429
	−2	−0.039652648517
	−1	0.293667390895
	0	0.553126452562
	1	0.307157326198
	2	−0.047112738865
	3	−0.068038127051
	4	0.027813640513
	5	0.017735837438
	6	−0.010756318517
	7	−0.004001012886
	8	0.002652665946
	9	0.000895594529
	10	−0.000416500571
	11	−0.000183829769
	12	0.000044080354
	13	0.000022082857
	14	−0.000002304942
	15	−0.000001262175

（续）

	n	$h_n/\sqrt{2}$		n	$h_n/\sqrt{2}$
	-10	-0.0001499638		5	0.0231107770
	-9	0.0002535612		6	-0.0139736879
	-8	0.0015402457		7	-0.0064800900
	-7	-0.0029411108		8	0.0047830014
	-6	-0.0071637819		9	0.0017206547
	-5	0.0165520664		10	-0.0011758222
	-4	0.0199188043		11	-0.0004512270
$K=5$	-3	-0.0649972628	$K=5$	12	0.0002137298
	-2	-0.0368000736		13	0.0000993776
	-1	0.2980923235		14	-0.0000292321
	0	0.5475054294		15	-0.0000150720
	1	0.3097068490		16	0.0000026408
	2	-0.0438660508		17	0.0000014593
	3	-0.0746522389		18	-0.0000001184
	4	0.0291958795		19	-0.0000000673

称性，甚至比 8.2 节中的 ϕ,ψ 还要好。当然这样处理也付出了代价：具有 $2K$ 阶消失矩的 Coiflets 型小波的支集宽度为 $6K-1$，而${}_{2K}\phi$ 仅有 $4K-1$。

注意：$f(\xi)=\sum_{n=0}^{K-1} f_n e^{-in\xi}$ 不具有惟一性，但计算较容易。对于较小的 K 值（如 $K=1,2,3$），Daubechies 给出了 $f(\xi)$ 不同的表达式，结果表明最平滑的 Coiflet（至少对于 K 值较小的情况）并非对称性最好；比如 $K=1$，存在一个（非常不对称的）Coiflet 具有 Hölder 指数 1.191814，而图 8.3 中的二阶 Coiflet 也不是 C' 的，二者的支集宽度均为 5。$K=2,3$ 时也有类似的正则性结论。关于图、系数及更详细的材料请见 Daubechies(1990b)著作。 □

8.3 对称双正交小波基

众所周知，在子带滤波中，若用同样的 FIR 滤波器做分解和重构，对称性与精确重构是互不相容的。若放弃精确重构的要求，对称性可能满足。这意味着可用图 8.4 代替图 5.11 的框图。这样处理自然又产生了几个问题：就多分辨分析而言，图 8.4 意味着什么？c^j 和 α^j 表示什么？（在第 5 章中 c^j 和 α^j 表示正交投影的系数）。是否存在有关的小波基？与以前介绍过的小波构造有何不同？这些问题

的答案是:若滤波器满足一定技术条件,这一格式该方案对应于两个对偶小波基与两个不同的多分辨阶梯。本节将就此给出证明并给出几个例子。本节的结论除基于 Cohen 和 Daubechies(1992)改进理论外,其余部分均由 Cohen、Daubechies 和 Feauveau(1992)完成。许多例子也来源于 Vetterli 和 Herley(1990)的著作。后者基于滤波器设计的观点提出了一种处理办法。

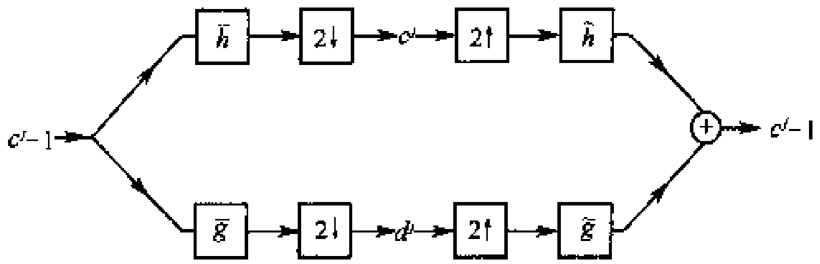


图 8.4　重构滤波器与分解滤波器在重构子带滤波格式

8.3.1　精确重建

由于现在用四个滤波器代替原来的两个滤波器,故需重写式(5.6.5)及式(5.6.6)为

$$C_n^1 = \sum_K h_{K-2n} C_K^0 \quad d_n^1 = \sum_K g_{K-2n} C_K^0$$

及

$$C_l^0 = \sum_n [\tilde{h}_{l-2n} c_n^1 + \tilde{g}_{l-2n} d_n^1]$$

采用 5.6 节引用的 z 记号可将上式写为

$$c^0(z) = \frac{1}{2}[\tilde{h}(z)\bar{h}(z) + \tilde{g}(z)\bar{g}(z)]c^0(z) + \frac{1}{2}[\tilde{h}(z)\bar{h}(-z) + \tilde{g}(z)\bar{g}(-z)]c^0(-z)$$

从而我们要求

$$\tilde{h}(z)\bar{h}(z) + \tilde{g}(z)\bar{g}(z) = 2 \tag{8.3.1}$$

$$\tilde{h}(z)\bar{h}(-z) + \tilde{g}(z)\bar{g}(-z) = 0 \tag{8.3.2}$$

因为滤波器都是 FIR 的,故可假定 $\tilde{h},\tilde{g},\bar{h},\bar{g}$ 是多项式(为简单起见,我们所用的术语“多项式”是一种泛意的,而允许有负指数幂。换言之,$\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n z^n$ 也称为一种多项式)。从式(8.3.1)可知 $\bar{h}$ 与 $\bar{g}$ 没有公共零点,式(8.3.2)则意味着有某一多项式 $p(z)$ 使得

$$\tilde{g}(z) = \bar{h}(-z)p(z), \tilde{h}(z) = -\bar{g}(-z)p(z) \tag{8.3.3}$$

将它们代入式(8.3.1)可得

$$\bar{p}(z)[h(-z)g(z)-h(z)g(-z)]=2$$

能除尽常数的多项式只能是单项式。故

$$p(z)=\alpha z^{k}$$

其中 $\alpha\in\mathbf{C}, R\in\mathbf{Z}$,式(8.3.3)变成为

$$\tilde{g}(z)=\alpha Z^{k}\bar{h}(-z), g(z)=-\alpha^{-1}(-1)^{k}2^{k}\bar{\tilde{h}}(-z) \tag{8.3.4}$$

α, k 可任意选择。我们仅取 $\alpha=1, k=1$,可以使方程(8.3.4)对 g 和 $\tilde{g}$ 对称的。将它们代入式(8.3.1)有

$$h(z)\bar{\tilde{h}}(z)+h(-z)\bar{\tilde{h}}(-z)=2 \tag{8.3.5}$$

用滤波器系数表示这一切,即为

$$\sum_{n}h_{n}\bar{\tilde{h}}_{n+2k}=\delta_{k,0} \tag{8.3.6}$$

$$g_{n}=(-1)^{n+1}\bar{\tilde{h}}_{-n+1} \quad \tilde{g}_{n}=(-1)^{n+1}h_{-n+1} \tag{8.3.7}$$

以上我们假定所有的系数都是实的,显然,这些方程是方程(5.1.39)与方程(5.1.34)的推广。

8.3.2 尺度函数和小波

因为有两对滤波器,因此相应的也有两对尺度函数与小波 ϕ,ψ 及 $\tilde{\phi},\tilde{\psi}$ 它们由下式分别定义

$$\hat{\phi}(\xi)=m_{0}(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \quad \hat{\tilde{\phi}}(\xi)=\tilde{m}_{0}(\xi/2)\hat{\tilde{\phi}}(\xi/2) \tag{8.3.8}$$

$$\hat{\psi}(\xi)=m_{1}(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2) \quad \hat{\tilde{\psi}}(\xi)=\tilde{m}_{1}(\xi/2)\hat{\tilde{\phi}}(\xi/2) \tag{8.3.9}$$

其中 $m_{0}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n}h_{n}e^{-in\xi}, m_{1}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n}g_{n}e^{-in\xi}, \tilde{m}_{0}, \tilde{m}_{1}$ 也有类似的定义。由式(8.3.7)知

$$m_{1}(\xi)=e^{-i\xi}\overline{\tilde{m}_{0}(\xi+\pi)} \quad \tilde{m}_{1}(\xi)=e^{-i\xi}\overline{m_{0}(\xi+\pi)} \tag{8.3.10}$$

由第 3 章知道为了生成 Riesz 小波基,ψ 和 $\tilde{\psi}$ 必须满足条件 $\hat{\psi}(0)=0=\hat{\tilde{\psi}}(0)$,因此也必有 $m_{1}(0)=0=\tilde{m}_{1}(0)$。用多项式 $h(z)$、$\tilde{h}(z)$表示,它等价于条件 $h(-1)=0=\tilde{h}(-1)$。将它们代入到式(8.3.5)得到 $h(1)\overline{\tilde{h}(1)}=2$ 或 $(\sum_{n}h_{n})(\sum_{n}\bar{\tilde{h}}_{n})=2$。该式意味着我们能够对 h 和 $\tilde{h}$ 进行归一化处理,使得 $\sum_{n}h_{n}=\sqrt{2}=\sum_{n}\tilde{h}_{n}$, ,从而 $m_{0}(0)=1=\tilde{m}_{1}(0)$。并且可以通过定义函数

$$\hat{\phi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}m_{0}(2^{-j}\xi)$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}\tilde{m}_{0}(2^{-j}\xi)$$

以求解方程(8.3.8)。用第6章相同的讨论可知上述无穷乘积在紧集合上一致收敛,而且 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 具有紧支集,其支集宽度由滤波器长度决定。作为 ϕ 与 $\tilde{\phi}$ 的线性组合,小波函数 ψ 与 $\tilde{\psi}$ 也具有紧支集。但是,这一点还不能作为保证 $\psi_{j,k}=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$ 和 $\tilde{\psi}_{j,k}=2^{-1/2}\tilde{\psi}(2^{-j}x-k)$ 是对偶小波基的充分条件。事实上,即使在正交情况(重建滤波器等于分解滤波器)下,ψ 也有可能无法生成一个标准正交基(见6.2节,6.3节)。对此非正交情形自然更应格外小心。下面,简短介绍一下保证生成对偶小波基(在一定限制之下)的不同步骤。

首先,若 ϕ 及 $\tilde{\phi}\in L(\mathbb{R})$(这一点也需证明,见下面),则可按如下方式定义有界算子 T_j

$$\langle T_j f,g\rangle = \sum_k \langle f,\phi_{j,k}\rangle\langle\tilde{\phi}_{j,k},g\rangle$$

其中

$$\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^{-j}x-k), \qquad \tilde{\phi}_{j,k} = 2^{-j/2}\tilde{\phi}(2^{-j}x-k)$$

亦为通常之定义①。定义式(8.3.8)与式(8.3.9)的一个推论是

$$\phi_{1,n}(x) = \sum_k h_{k-2n}\phi_{0,k}, \qquad \tilde{\phi}_{1,n}(x) = \sum_k \tilde{h}_{k-2n}\tilde{\phi}_{0,k}$$

$$\psi_{1,n}(x) = \sum_k g_{k-2n}\phi_{0,k}, \qquad \tilde{\psi}_{1,n}(x) = \sum_k \tilde{h}_{k-2n}\tilde{\phi}_{0,k}$$

结合8.1节中提出的滤波器系数的性质,上式意味着(代入其中很易验证)

$$\sum_k \langle f,\phi_{0,k}\rangle\langle\tilde{\phi}_{0,k},g\rangle = \sum_n [\langle f,\phi_{1,n}\rangle\langle\tilde{\phi}_{1,n},g\rangle + \langle f,\psi_{1,n}\rangle\langle\tilde{\psi}_{1,n},g\rangle]$$

对其他的 j 值运用同样的策略,并将所有的恒等式合并后得

$$\sum_{j=-J}^{J}\sum_l \langle f,\psi_{j,l}\rangle\langle\tilde{\psi}_{j,l},g\rangle = \langle T_{-J-1}f,g\rangle - \langle T_J f,g\rangle$$

$$= \sum_k \langle f,\varphi_{-J-1,k}\rangle\langle\tilde{\phi}_{-J-1,k},g\rangle - \sum_k \langle f,\varphi_{J,k}\rangle\langle\tilde{\phi}_{J,k},g\rangle$$

恰如第5章的对式(5.3.9)、式(5.3.13)中相同的讨论,当 $J\to\infty$, $\langle T_J f,g\rangle\to 0$, $\langle T_{-J}f,g\rangle\to\langle f,g\rangle$。因此有

$$\lim_{J\to\infty}\sum_{j=-J}^{J}\sum_l \langle f,\psi_{j,l}\rangle\langle\tilde{\psi}_{j,l},g\rangle = \langle f,g\rangle \tag{8.3.11}$$

或者在较弱的意义上有

$$f = \lim_{J\to\infty}\sum_{j=-J}^{J}\sum_l \langle f,\psi_{j,l}\rangle\tilde{\psi}_{j,l}$$

上式不足以保证 $\psi_{j,l}$,$\tilde{\psi}_{j,l}$ 构成对偶 Riesz 基。因为 $\psi_{j,l}$ 或 $\tilde{\psi}_{j,l}$ 可能不构成框架,在此情况下,式(8.3.11)的收敛性关键取决于求和的次数。为了避免这个问题,要求

① 见本章末注5。

$$\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 \text{和} \sum_{j,k}|\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^2$$

对所有 $f\in L^2(\mathbb{R})$收敛,或者等价地

$$\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2\leqslant A\|f\|^2,\sum_{j,k}|\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^2\leqslant\tilde{A}\|f\|^2 \quad (8.3.12)$$

若该上界存在,根据式(8.3.11)有[①]

$$\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2\geqslant\tilde{A}^{-1}\|f\|^2,\sum_{j,k}|\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle|^2\geqslant\tilde{A}^{-1}\|f\|^2$$

如此自然就框架了。而且即使 $\psi_{j,k}$、$\tilde{\psi}_{j,k}$仅是(冗余的)对偶框架而不是对偶 Riesz 基的情况下,通过要求

$$\langle\psi_{j,k},\tilde{\psi}_{j,k}\rangle=\delta_{j,j'}\delta_{k,k'} \quad (8.3.13)$$

这种冗余可以被消除。恰如标准正交情形下(见 6.2 节)。上式等价于

$$\langle\phi_{0,k},\tilde{\phi}_{0,k'}\rangle=\delta_{k,k'} \quad (8.3.14)$$

如果式(8.3.12)、式(8.3.14)满足(我们简要回顾这点),那么实际上有两个多分辨分析塔

$$\cdots V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots$$
$$\cdots \tilde{V}_2\subset \tilde{V}_1\subset \tilde{V}_0\subset \tilde{V}_{-1}\subset \tilde{V}_{-2}\subset\cdots$$

且$\overline{V_0=\text{span}\{\phi_{0,k};k\in\mathbf{Z}\}}$, $V_0=\overline{\text{span}\{\tilde{\phi}_{0,k};k\in\mathbf{Z}\}}$,空间 $W_j=\overline{\text{span}\{\psi_{j,k};k\in\mathbf{Z}\}}$, $\tilde{W}_j=\overline{\text{span}\{\tilde{\psi}_{j,k};k\in\mathbf{Z}\}}$分别是 V_j, $\tilde{V}_j$ 在 V_{j-1}, $\tilde{V}_{j-1}$中的补空间。但它们不是正交补,V_j, W_j 或 $\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j$ 之间的夹角[②] 典型值小于 90°,这就是为何在此情况下要证明式(8.3.12)成立的原因,而在正交情况下,式(8.3.12)是自然成立的。分析此问题的另法如下,由于其非正交性,有

$$\alpha\sum_k[|\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2+|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2]$$
$$\leqslant\sum_k|\langle f,\phi_{j-1,k}\rangle|^2$$
$$\leqslant\beta\sum_k[|\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2+|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2]$$

其中 $\alpha<1,\beta>1$(正交情况下等式成立且 $\alpha=\beta=1$)。与正交情况不同的是,无法套迭这些不等式以证明 $\psi_{j,k}$构成 Riesz 基:套迭将导致常数放大。为此须采用其他措施。注意到式(8.3.13)蕴含着 $W_j\perp\tilde{V}_j$, $\tilde{W}_j\perp V_j$,两个多分辨分析阶梯连起来就像一个巨大的拉链,因而可用类似于 $\sum_{j,k}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|$ 的表达式表述。

---

① 见本章末注 6。

② 见本章末注 7。

现在回到式(8.3.12)和式(8.3.14),6.4 节已在较简单的正交情况下对式(8.3.14)作过处理。此地也将用与那里相同的方法,今定义算子 P_0 作用于以 2π 为周期的函数上

$$(P_0 f)(\xi) = |m_0(\xi/2)|^2 f(\xi/2) + |m_0(\xi/2+\pi)|^2 f(\xi/2+\pi)$$

类似地定义第二个算子$\tilde{P}_0$,借助于 f 的傅里叶系数,P_0 的作用可表示为

$$(P_0 f)_k = \sum_l \Big(\sum_m h_m \overline{h_{m+l-2k}}\Big) f_l$$

多数时候我们感兴趣于 P_0 的不变三角多项式形式。这意味着可以将注意力集中于其傅里叶系数满足条件:当 $l > N_2 - N_1$,$f_l = 0$ 的 f 所形成的 $2(N_2-N_1)+1$ 维子空间(此地假定当 $n < N_1$ 或 $n > N_2$ 时 $h_n = 0$),在其上 P_0 可以表示成一个矩阵。定理 6.3.1 和与定理 6.3.4 有下面类似的表述。

定理 8.3.1 下列三个论断等价:

1. $\phi, \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$,且$\langle \phi_{0,k}, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle = \delta_{k,l}$;

2. 存在严格正三角多项式 $f_0, \tilde{f}_0$,对 P_0 不变且存在一个紧集 K,mod2π 与$[-\pi,\pi]$同余,使得

$$\inf_{k \geq 1, \xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0, \qquad \inf_{k \geq 1, \xi \in K} |\tilde{m}_0(2^{-k}\xi)| > 0$$

3. 存在严格正三角多项式 $f_0, \tilde{f}_0$ 对 P_0、$\tilde{P}_0$ 不变,而且它们是仅有的对 P_0 $\tilde{P}_0$ 不变的多项式(在规范意义下)。

定理的证明完全类似于第 6 章的证明。只是更复杂些。在 6.3 节中,函数 f_0、$\tilde{f}_0$ 是常数。而此地,$f_0(\xi) = \sum_l |\hat{\phi}(\xi+2\pi l)|^2$,$\tilde{f}_0(\xi) = \sum_l |\hat{\tilde{\phi}}(\xi+2\pi l)|^2$。至于如何用 6.3 节的方法证明这里的结论,详述见 Cohen,Daubechies 和 Feauvean (1992)的著作。

条件式(8.3.14)相当于检验两个矩阵具有非退化的特征值 1 以及其对应的特征向量的元素都是严格的正三角多项式。(注意,若三角多项式取负值,那么 $\phi \notin L^2(\mathbb{R})$,这种情况对某些精确重构的滤波器四元组可能发生。)条件式(8.3.12)是在正交情形未曾遇到过的情况。可以证明当定理 8.3.1 中的三个条件的任何一个成立时,该条件即被满足。对这个令人惊奇的事实的证明分以下几步完成①:

• 首先指出,若 P_0 的特征值 λ 存在且$|\lambda| \geq 1, \lambda \neq 1$,将与 ϕ 的平方可积性相矛盾,由定理 8.3.1 可知,若特征值 1 是非退化的且对应的特征向量对应于严格正三角多项式,则 P_0 的所有其余特征值严格小于 1,这一步的证明使用引理 7.1.10。

• 因为 $m_0(\pi) = 0 = \tilde{m}_0(\pi)$,故 $M_0(\pi) = |m_0(\pi)|^2 = 0 = |\tilde{m}_0(\pi)|^2 = \overline{M}(\pi)$,

---

① 见本章末注 8。

由第 7 章可知,这意味着 P_0 的矩阵的行元总和都是 1,因而元素为 1 的行向量(有相应的维数)是具有特征值 1 的 P_0 的一个左特征向量。基于第一点,$P_0|_{E_1}$ 的谱半径 ρ 严格小于 1,其中 $E_1 = \{f, \sum_n f_n = 0\}$。在 E_1 中,用 $f(\xi) = 1 - \cos\xi$ 可以证明$\int_{2^{n-1}\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^n\pi} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leqslant C\left(\frac{1+\rho}{2}\right)^n$(这个估计与定理7.1.12证明中估计类似)。

• 由 Hoder 不等式可知,对于充分小 δ 有的 $\int_{2^{n-1}\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^n\pi} |\hat{\phi}(\xi)|^{2(1-\delta)} d\xi < \infty$,用该条件可以证明"离散"形式的不等式 $\sum_{m\in Z} |\hat{\phi}(\xi + \pi m)|^{2(1-\delta')} \leqslant C < \infty$ 对所有的 $\xi \in \mathbb{R}$ 及充分小的 δ' 成立。因为 m_1 有界,$\hat{\psi}$ 也有类似的界

$$\sum_{m\in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\xi + \pi m)|^{2(1-\delta')} < \infty \tag{8.3.15}$$

• 另一方面,还能证明

$$\sup_{\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2\pi} \sum_{j\in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^{2\delta'} < \infty \tag{8.3.16}$$

由于 $\hat{\psi}$ 是整函数且 $\hat{\psi}(0) = 0$,对于充分小的$|\xi|$,$|\hat{\psi}(\xi)| \leqslant c|\xi|$,因而对于$|\xi| \leqslant 2\pi$,$\sum_{j=\infty} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^{2\delta'}$ 是一致有界的,而且只需考虑式(8.3.16)中 $j \geqslant 0$ 的情况。但是

$$\begin{aligned}
\sup_{2^j\pi < |\zeta| \leqslant 2^{j+1}\pi} |\hat{\psi}(\zeta)|^2 &\leqslant \int_{2^j\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\pi} d\xi \frac{d}{d\xi} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \\
&\leqslant 2 \int_{2^j\pi \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\pi} d\xi\, |\hat{\psi}(\xi)|\, \left|\frac{d}{d\xi} \hat{\psi}(\xi)\right| \\
&\leqslant C\left[\int_{2^{j-1}\pi \leqslant |\zeta| \leqslant 2^j\pi} d\zeta\, |\hat{\phi}(\zeta)|^2\right]^{1/2} \left[\int |x\psi(x)|^2 dx\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

由于 ψ 具有紧支集且在 $L^2(R)$ 中,故第二项因子是有限的,第一个因子如上所述当$|\lambda|<1$ 时,有界 $C\lambda^j$。这就证明了式(8.3.16),它也等价于

$$\sup_{|\xi|\neq 0} \sum_{j\in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^{2\delta'} < \infty$$

• 最后,结合 poission 求和公式与 Cauchy－Schwarz 不等式可得

$$\sum_k |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \leqslant 2\pi \int |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(2^j\xi)|^{2\delta'} d\xi \sum_m |\hat{\psi}(2^j\xi + 2\pi m)|^{2(1-\delta')}$$

因而由式(8.3.15),式(8.3.16)有 $\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 \leqslant A\|f\|^2$。关于该问题的详述参见 Cohen 和 Daubechies(1992)的著作。为了保证能得到两个对偶 Riesz 小波基,必须检验 1 是否是 P_0、$\tilde{P}_0$ 的非退化特征值及对应的三角多项式是严格正

的。

8.3.3 正则性与消失矩

假如 $\psi_{j,k}$,$\tilde{\psi}_{j,k}$构成对偶 Riesz 基(因为假设滤波器是 FIR,故它们是紧支的),那么能应用定理 5.5.1 将一个函数的消失矩与另一个函数的正则性联系起来:若 $\psi\in C^m$,则自动地有 $\int x^l\tilde{\psi}(x)\mathrm{d}x = 0, l = 0,\cdots,m$ ①,等效于 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\hat{\tilde{\psi}}\,|_{\xi=0}=0, l=0,\cdots,m$。由于式(8.3.9)及 $\hat{\tilde{\psi}}(0)=1$ 有 $\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\tilde{m}_1\,|_{\xi=0}=0, l=0,\cdots,m$。根据式(8.3.10),这蕴涵 m_0 能被$[(1+\mathrm{e}^{-i\xi})/2]^m$ 整除。为了能产生正则小波 ψ,需要构造滤波器对 $m_0,\tilde{m}_0$ 且 $m_0(\xi)$在 $\xi=\pi$ 处具有多重零点。

注意,正如下面的例子将要描述的那样,ψ 和 $\tilde{\psi}$ 具有不同的正则性这点是无法避免的。若 $\tilde{\psi}$ 比 ψ 正则性高,ψ 将比 $\tilde{\psi}$ 有更多的消失矩,那么

$$f=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}= \tag{8.3.17}$$

$$\sum_{j,k}\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{8.3.18}$$

上述两个等式均合理,但有不同的解释(Tchamitchian,1987)。事实上,式(8.3.17)比(8.3.18)更有用:一方面,在 f 相当光滑的区域,ψ 大数目的消失矩会导致更多的"压缩"(见 7.4 节);另一方面,"基本单元"$\tilde{\psi}_{j,k}$也更为光滑。在 Antonini 等人(1990)的实验中实现了一种典型的双正交小波。同样的滤波器对使用两次,第二次将分解和重构滤波器交换。量化后的结果显示式(8.3.17)比式(8.3.18)好得多。正如 7.4 节所述,无法明确解释是 ψ 的高消失矩还是 $\tilde{\psi}$ 的正则性,谁是更重要的因素。也许二者同等重要。

8.3.4 对称性

双正交基与标准正交基相比的优点是 m_0 和 $\tilde{m}_0$ 都能是对称的。若对应于 m_0 的滤波器具有奇数个孔,且是对称的,即 $m_0(-\xi)=\mathrm{e}^{2ik\xi}m_0(\xi)$,则 m_0 可写成

$$m_0(\xi) = \mathrm{e}^{-2ik\xi}p_0(\cos\xi) \tag{8.3.19}$$

其中 P_0 是一个多项式,$\tilde{m}_0(\xi)$可选择相同的形式

$$\tilde{m}_0(\xi) = \mathrm{e}^{-2ik\xi}\tilde{p}_0(\cos\xi) \tag{8.3.20}$$

其中 $\tilde{p}_0$ 是一个满足下列方程的多项式

$$p_0(x)\overline{\tilde{p}_0(x)}+p_0(-x)\overline{\tilde{p}_0(-x)}=1 \tag{8.3.21}$$

① 见本章末注 9。

于是有

$$m_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi)}+m_0(\xi+\pi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi+\pi)}=1 \qquad (8.3.22)$$

上式与式(8.3.5)相同,式(8.3.21)中的多项式 $\tilde{p}_0$ 仅当 $p_0(x)$与 $p_0(-x)$没有共同零点时才能找到;事实上,一旦条件成立,由 Bezout 定理,其解是一定存在的(见6.1节)。这也意味着双正交基比标准正交基更容易构造。一旦 p_0 固定,求解满足式(8.3.21)的 $\tilde{p}_0$ 的过程仅需求解一个线性方程,而不是像6.1节那样需要求解谱因子。

如果对应于 m_0 的滤波器具有偶数个孔,且是对称的(比如 haar 滤波器),那么 m_0 满足 $m_0(-\xi)=e^{2ik\xi+i\xi}m_0(\xi)$;于是

$$m_0(\xi)=e^{-ik\xi-i\xi/2}\cos\frac{\xi}{2}p_0(\cos\xi) \qquad (8.3.23)$$

也可以选择同样形式的 $\widetilde{m}_0(\xi)$

$$\widetilde{m}_0(\xi)=e^{-ik\xi-i\xi/2}\cos\frac{\xi}{2}\tilde{p}_0(\cos\xi) \qquad (8.3.24)$$

相应于式(8.3.22)的方程为

$$\cos^2\frac{\xi}{2}p_0(\cos\xi)\overline{\tilde{p}_0(\cos\xi)}+\sin^2\frac{\xi}{2}p_0(-\cos\xi)\overline{\widetilde{P}_0(-\cos\xi)}=1$$

从而 $\tilde{p}_0$ 是 Bezont 问题

$$p_0^{\#}(x)\overline{\tilde{p}_0(x)}+p_0^{\#}(-x)\overline{\tilde{p}_0(-x)}=1$$

的解,其中 $$p_0^{\#}(x)=\frac{1+x}{2}p_0(x)$$

例:本节介绍的全部例子均有对称性和一定的正则性,因而 m_0 和 $\widetilde{m}_0$ 的三角多项式均具有式(8.3.19)、式(8.3.20)或式(8.3.23)、式(8.3.24)的形式。且 $p_0(\cos\xi)$及 $\tilde{p}_0(\cos\xi)$都能被某个 $l>0$ 所对应的$(1+e^{-i\xi})^l$ 整除。由于多项式均以 $\cos\xi$ 为变量,l 必然是偶函数;$(1+e^{-i\xi})^2=4e^{-i\xi}\cos^2\frac{\xi}{2}=2e^{-i\xi}(1+\cos\xi)$。因此,如果 m_0、$\widetilde{m}_0$ 有偶数个孔(已假定 $k=0$,即 $h_n,\tilde{h}_n$ 对0对称)时,将有

$$\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2l}q_0(\cos\xi)$$

的形式;或者,当它们有奇数个孔(再次取 $k=0$,对应的 $h_{1-n}=h_n,\tilde{h}_{1-n}=\tilde{h}_n$)时,取

$$e^{-i\xi/2}\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2l+1}q_0(\cos\xi)$$

的形式。在这两个情形下,当代入式(8.3.22)时可得

$$\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2L} q_0(\cos\xi)\,\overline{\tilde{q}_0(\cos\xi)} + \left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2L} q_0(-\cos\xi)\,\overline{\tilde{q}_0(-\cos\xi)} = 1 \tag{8.3.25}$$

对于第一种情况 $L=l+\tilde{l}$,第二种情况 $L=l+\tilde{l}+1$。令

$$q_0(\cos\xi)\,\overline{\tilde{q}_0(\cos\xi)} = P\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)$$

式(8.3.25)可化为

$$(1-x)^L P(x) + x^L P(1-x) \tag{8.3.26}$$

上述方程在 6.1 节中已见过,其解为

$$P(x) = \sum_{m=0}^{L-1} \begin{bmatrix} L-1+m \\ m \end{bmatrix} x^m + x^L R(1-2x)$$

其中 R 为一个奇多项式(见命题 6.1.2),根据 R 的不同形式及 P 分解的不同因子 q_0 和 $\tilde{q}_0$ 可得到三个不同的例子。

样条例子 取,$R\equiv 0$,$\tilde{q}_0\equiv 1$,则 $\tilde{m}_0(\xi)=(\cos\xi/2)^{\tilde{N}}$,$\tilde{N}=2\tilde{l}$ 或者 $\tilde{m}_0(\xi)=e^{-i\xi/2}(\cos\xi/2)^{\tilde{N}}$,$\tilde{N}=2\tilde{l}+1$。因而 $\tilde{\phi}$ 是一个中心分别为 0 和$\frac{1}{2}$的 β 一样条。在第一种情况,$N=2l$,有

$$m_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{m=0}^{l+\tilde{l}-1} \begin{bmatrix} l+\tilde{l}-1+m \\ m \end{bmatrix} \left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^m$$

在第二种情况,$N=2l+1$

$$m_0(\xi) = e^{i\xi/2}\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{m=0}^{l+\tilde{l}} \begin{bmatrix} l+\tilde{l}+m \\ m \end{bmatrix} \left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)^m$$

两种情况下均可任意选择 l,目的都是要保证 P_0 的特征值 1 是非退化的,相应的特征向量对应于严格正的三角多项式(见 8.4.2 节)。结果可得到一族双正交基,其中 $\tilde{\psi}$ 是一个紧支样条函数。对于这种样条函数的每个预先规定的阶数(即固定 $\tilde{l}$),l 有无穷多种选择以适应具有不同支集宽的 ψ 及有不同零矩数目的 $\tilde{\psi}$ 的需要。注意 $\tilde{\phi}$ 仅完全由$\tilde{N}$确定,而 m_0,ϕ 则取决于 N 与$\tilde{N}$二者之值。图 8.5~图 8.7 分别画出了 N、$\tilde{N}$的最初几个取值对应的${}_{\tilde{N}}\tilde{\phi}$,${}_{\tilde{N}},{}_{N}\tilde{\psi}$,${}_{N,\tilde{N}}\phi$ 及${}_{N,\tilde{N}}\psi$ 的图形(图 8.5 对应于$\tilde{N}=1$,图 8.6 对应于$\tilde{N}=2$,图 8.7 对应于$\tilde{N}=3$)。表 8.2 给出了对应的滤波器,在所有这些情况下,8.4.2 节中的条件均满足。观察图 8.5~图 8.7 可知:随着 N 增大($\tilde{N}$固定),${}_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$ 的形状不变,而${}_{N,\tilde{N}}\phi$ 及${}_{N,\tilde{N}}\psi$ 的"褶皱"则逐渐消失。

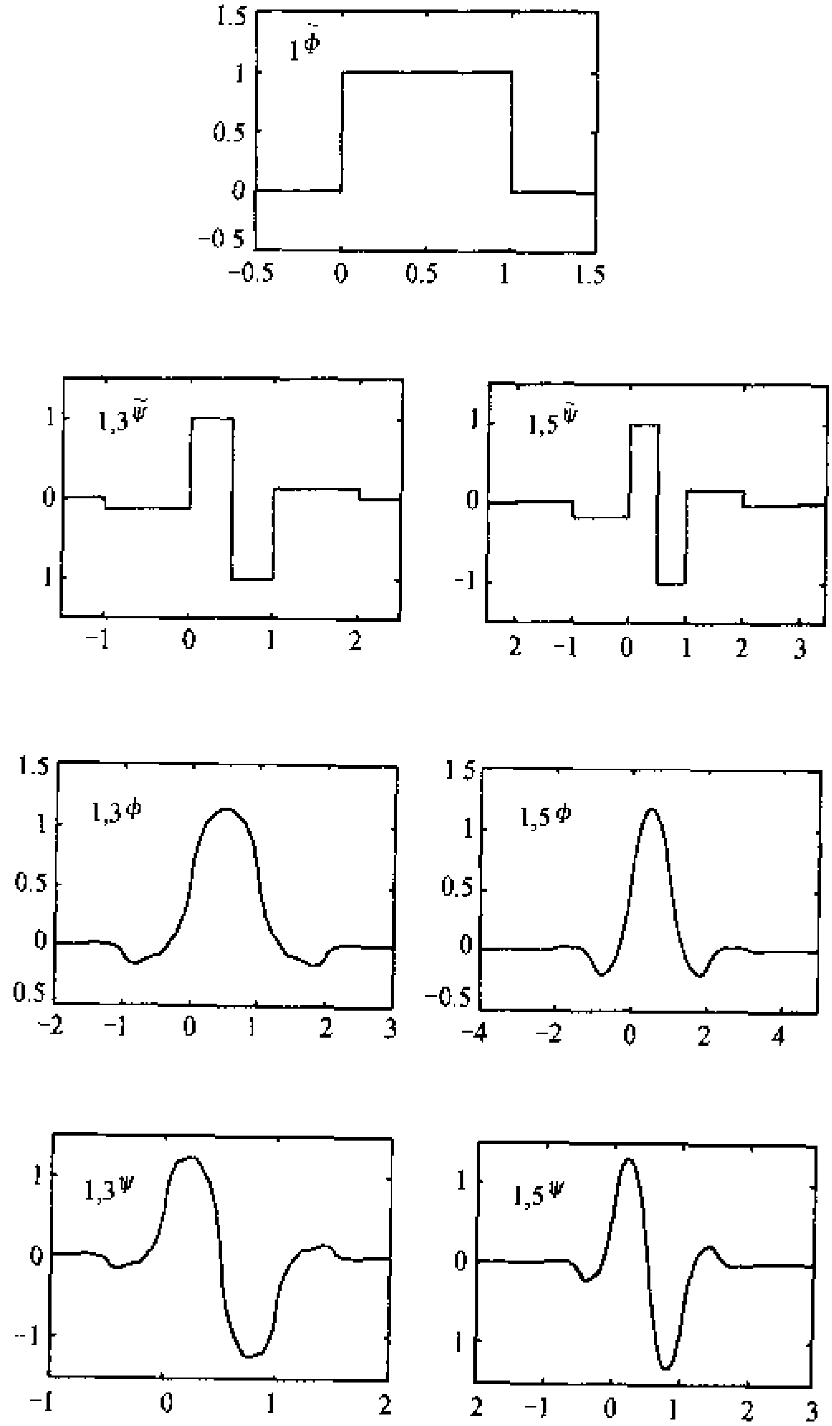


图 8.5 $\widetilde{N}=1, N=3,5$ 的样条例子，$N=1$(无图)是 Hear 基，$\mathrm{Supp}_{1,N}\phi=[-N+1,N]\mathrm{Supp}_{1,N}\psi=\mathrm{Supp}_{2,N}\tilde{\psi}=\left[-\frac{N-1}{2},\frac{N+1}{2}\right]$

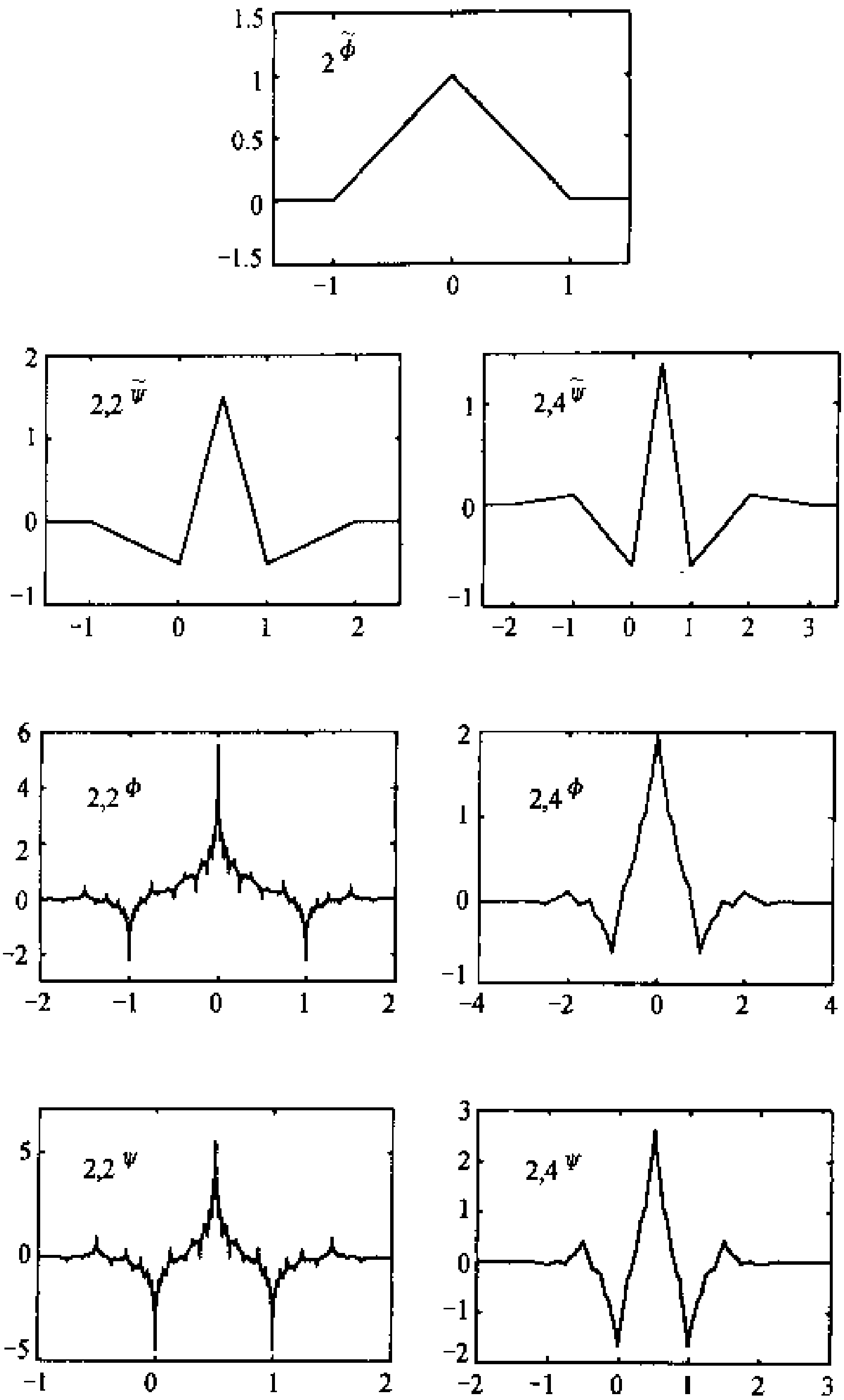


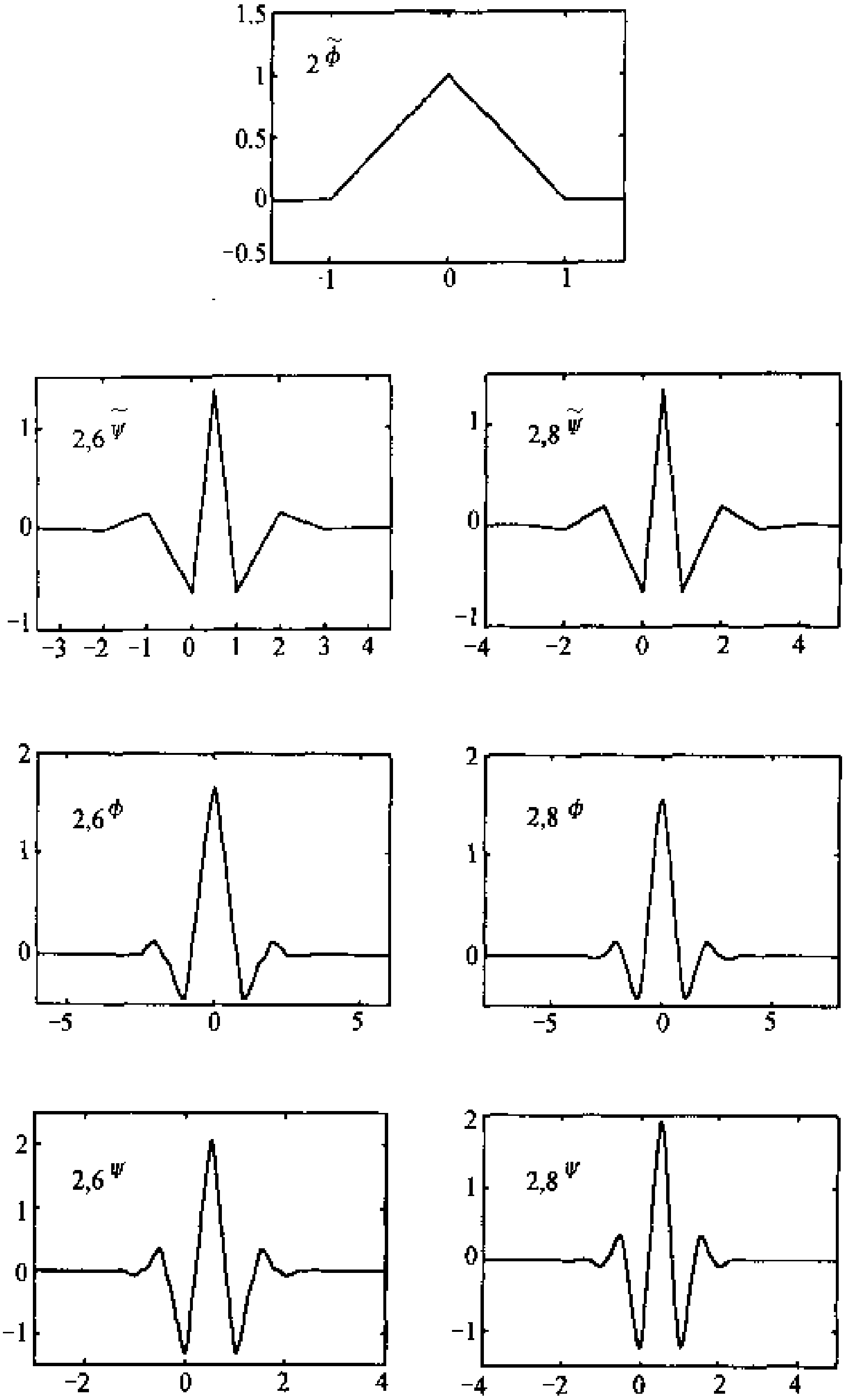
图 8.6 $\tilde{N}=2, N=4,6,8$ 的样条例子，

$= \text{Supp}_{2,N}\tilde{\psi} = \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}+1\right]$。$\phi$ 与 ψ

206)经 8 步～9 步

---

① 见本章末注 10，且为译者注。



$\mathrm{Supp}_{2,N}\phi=[-N,N]$，$\mathrm{Supp}_{2,N}\psi$
的图是由级联算法(见 P.205～
迭代所得的近似图形①

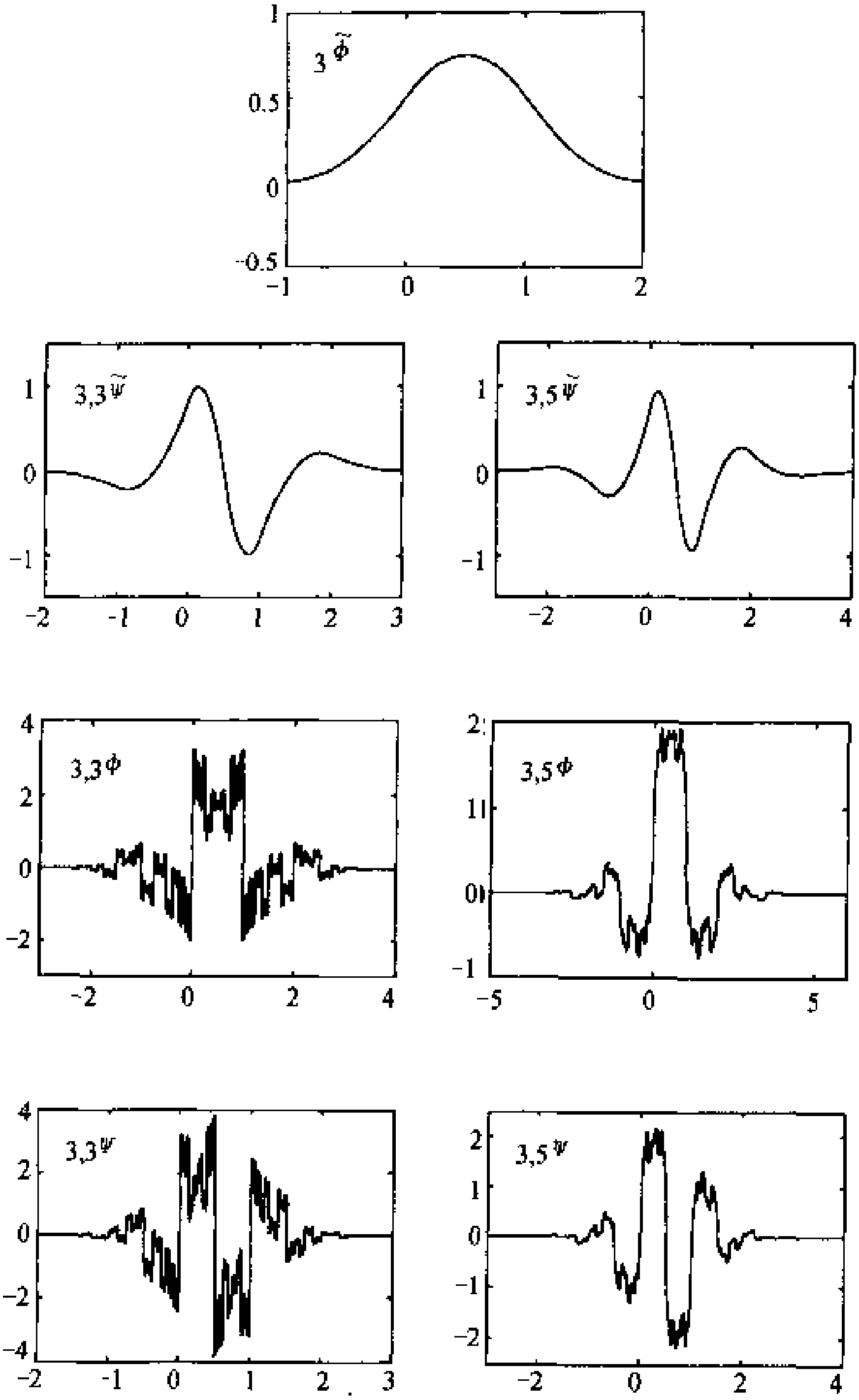
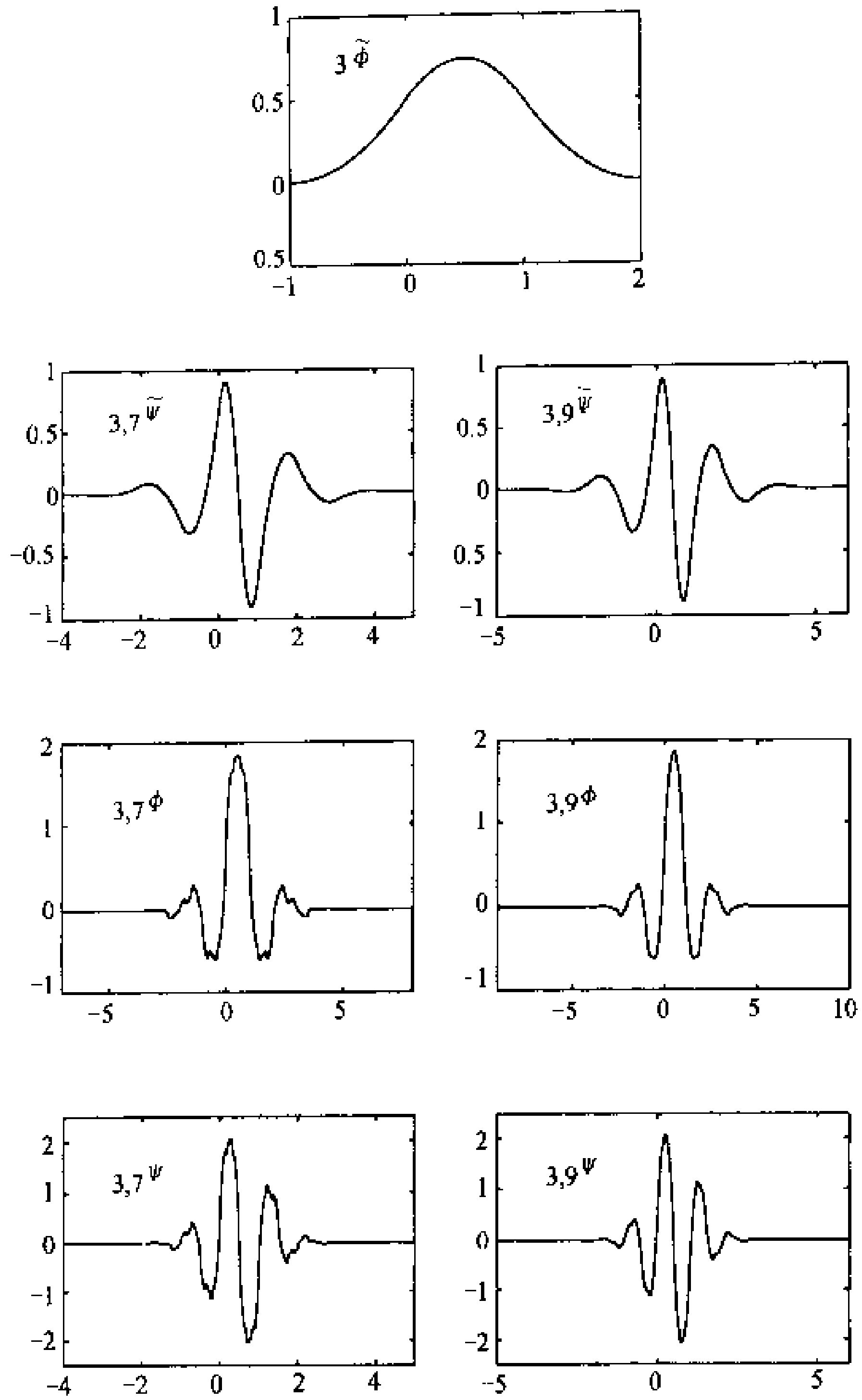


图 8.7 $\widetilde{N}=3, N=5,7,9$ 的样条例子，
积的，$\text{supp}_{3,N}\phi=[-N,N+1]$，
函数$_{3,3}\phi$ 和$_{3,3}\psi$ 是级联发散而直接

---

① 见本章末注 11。



对 $N=1$(无图)$_{3,1}\phi$ 是平方可

$\text{supp}\,{}_{3,N}\phi = \text{supp}\,{}_{3,N}\tilde{\phi} = \left[-\frac{N+1}{2}, \frac{N+3}{2}\right]$

算法仍然收敛的一个例子①

表 8.2

对$\tilde{N}$, N 的开始几个值对应的${}_{\tilde{N}}\tilde{m}_0$, ${}_{\tilde{N}N}m_0$, 的表,其中 $z=e^{-i\xi}$,对应的滤波器系数${}_{\tilde{N}}\tilde{h}_k$, ${}_{\tilde{N}N}h_k$可以分别从${}_{\tilde{N}}$, ${}_{N}\tilde{m}_0$ 中的 z_k 的系数乘以$\sqrt{2}$后得到。注意到${}_{\tilde{N},N}$, m_0 的系数常有对称性,故对很长的${}_{\tilde{N},N}m_0$ 仅列出系数的一半(另一半可由对称性导出)。

$\tilde{N}$	${}_{\tilde{N}}\tilde{m}_0$	N	${}_{\tilde{N},N}m_0$
1	$\frac{1}{2}(1+z)$	1	$\frac{1}{2}(1+z)$
		3	$-\frac{z^{-2}}{16}+\frac{z^{-1}}{16}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{16}-\frac{z^3}{16}$
		5	$-\frac{3}{256}z^{-4}-\frac{3}{256}z^{-3}-\frac{11}{128}z^{-2}+\frac{11}{128}z^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2}+\frac{11}{128}z^2-\frac{11}{128}z^3-\frac{3}{256}z^4+\frac{3}{256}z^5$
2	$\frac{1}{4}(z^{-1}+2+z)$	2	$-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2$
		4	$\frac{3}{128}z^{-4}-\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{1}{8}z^{-2}+\frac{19}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{19}{64}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{3}{64}z^3+\frac{3}{128}z^4$
		6	$-\frac{5}{1024}z^{-6}+\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{17}{512}z^{-4}-\frac{39}{512}z^{-3}-\frac{123}{1024}z^{-2}+\frac{81}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{81}{256}z-\frac{123}{1024}z^2$
		8	$2^{-15}(35z^{-8}-70z^{-7}-300z^{-6}+670z^{-5}+1228z^{-4}-3126z^{-3}-3796z^{-2}+10718z^{-1}+22050+10718z-3796z^2\cdots$
3	$\frac{1}{8}(z^{-1}+3+3z+z^2)$	1	$-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}z^2$
		3	$\frac{3}{64}z^{-3}-\frac{9}{64}z^{-2}-\frac{7}{64}z^{-1}+\frac{45}{64}+\frac{45}{64}z-\frac{7}{64}z^2-\frac{9}{64}z^3+\frac{3}{64}z^4$
		5	$-\frac{5}{512}z^{-5}+\frac{15}{512}z^{-4}+\frac{19}{512}z^{-3}-\frac{97}{512}z^{-2}-\frac{13}{256}z^{-1}+\frac{175}{256}+\frac{175}{256}z-\frac{13}{256}z^2\cdots$
		7	$2^{-14}(-35z^{-7}-105z^{-6}-195z^{-5}+865z^{-4}+336z^{-3}-3489z^{-2}+307z^{-1}+11025+11025z\cdots)$
		9	$2^{-17}(-63z^{-9}+189z^{-8}+469z^{-7}-1911z^{-6}-1308z^{-5}+9188z^{-4}+1140z^{-3}3-29676z^{-2}+190z^{-1}+87318+87318z\cdots)$

函数$_{1,3}\psi$ 和$_{1,3}\tilde{\psi}$ 是 Tchamitchian(1987)首先构造的两个具有不同正则性的对偶小波基例子。它们构成了第一个非标准正交的族(其中$\tilde{N}=1=N$ 时就是 Haar 基)。与标准正交相同,用这些例子可以使 ψ 和$\tilde{\psi}$ 达到任意高的正则性。作为样条函数,$_{\tilde{N},N}\tilde{\psi}$ 是分段的$\tilde{N}-1$ 次多项式且在节点处是 $C^{\tilde{N}-2}$的;$_{N,\tilde{N}}\psi$ 的正则性可以用第 7 章的方法加以估计。人们逐渐发现,对于较大的$\tilde{N}$,当 $N>4.165\tilde{N}+5.165(m+1)$时,有$_{\tilde{N},N}\psi\in C^m$。这些样条例子有几个值得注意的特点,其一,所有的滤波器系数均为二进有理数,由于计算机能很快实现除 2 运算,所以它们非常适用于快速运算;其二,函数$_{\tilde{N},N}\psi(x)$是 x 的显函形式,这是与前面见到过的紧支撑标准正交小波不同的。它们有一个缺点:m_0 与 $\tilde{m}_0$ 是不等长的,如表 8.2 所示。这使得 ϕ 与$\tilde{\phi}$ 有不同的支集宽度,因为它们是由 m_0 与 $\tilde{m}_0$ 两者共同确定的,然而 ψ 与$\tilde{\psi}$ 则有相同的支集宽度,这一宽度由 m_0 与 $\tilde{m}_0$ 的滤波器长度的平均值减 1 而得出。m_0 与 $\tilde{m}_0$ 的滤波器长度不同,在某些应用,如图像处理中是会遇到麻烦的。

滤波器长度相差较小的例子　如们仍取 $R\equiv0$,那么只要适当选取$p\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)$的因子 $q_0(\cos\xi)$和 $\tilde{q}_0(\cos\xi)$可能获得滤波器长度最接近的 m_0 与 $\tilde{m}_0$,对于固定的 $l+\tilde{l}$,存在着有限多项因子数目,找寻它们的方式之一是再一次进行谱因子分解:先定出 p 的所有零点(实零点与共轭复零点),使得我们可以将这个多项式写成出实的一次与二次多项式之积

$$p(x)=A\prod_{j=1}^{J_1}(x-x_j)\prod_{i=1}^{J_2}(x^2-2R_ez_ix+|z_i|^2)$$

这些因子的重组可得出 q_0 与 $\tilde{q}_0$ 的各种可能性。表 8.3 给出了 $l+\tilde{l}=4$ 与 5 时这种类型的三个例子的 m_0 和 $\tilde{m}_0$ 的系数(注意:$l+\tilde{l}=4$ 是保证 q_0 与 $\tilde{q}_0$ 两者均为

表 8.3

经由样条变化所产生的三种情形的滤波器系数,这些滤波器均对应于 $l+\tilde{l}=4$ 或 5 且具有相似长度。对每个滤波器,也给出了因子 $\cos(\xi/2)$的数目(表示为 $N,\tilde{N}$),正如表 8.2 那样,对这些元素乘以$\sqrt{2}$即可得出滤波器系数 h_n 和$\tilde{h}_n$

$N\tilde{N}$	n	在 m_0 中 $e^{-in\xi}$的系数	在 $\tilde{m}_0$ 中 $e^{-in\xi}$的系数
$N=4$	0	0.557543526229	0.602949018236
$\tilde{N}=4$	1, −1	0.295635881557	0.266864118443
	2, −2	−0.028771763114	−0.078223266529
	3, −3	−0.045635881557	−0.016864118443
	4, −4	0	0.026748757411

（续）

N $\tilde{N}$	n	在 m_0 中 $e^{-in\xi}$ 的系数	在 $\tilde{m}_0$ 中 $e^{-in\xi}$ 的系数
$N=5$	0	0.636068699220	0.520897409718
$\tilde{N}=5$	1, −1	0.337150822538	0.244379838485
	2, −2	−0.066117805605	−0.038511714155
	3, −3	−0.096666153049	0.005620161515
	4, −4	−0.001905629356	0.028060092960
	5, −5	0.009515330511	0
$N=5$	0	0.382638624101	0.938348578330
$\tilde{N}=5$	1, −1	0.242786343113	0.333745161515
	2, −2	0.043244142922	−0.257235611210
	3, −3	0.000197904543	−0.083745161515
	4, −4	0.015436545027	0.038061322045
	5, −5	0.007015752324	0

实函数的非平凡因子分解的最小可能值)。对 $l+\tilde{l}=4$,因子分解是惟一的,而对 $l+\tilde{l}=5$,因子分解有两种可能性。对两个情形,都已经选择了 l 与 $\tilde{l}$ 使 m_0 与 $\tilde{m}_0$ 的长度差尽可能小。其对应小波和尺度函数表示在图 8.8 和图 8.9 中,所有这些情况都满足 8.4.2 节中的条件。

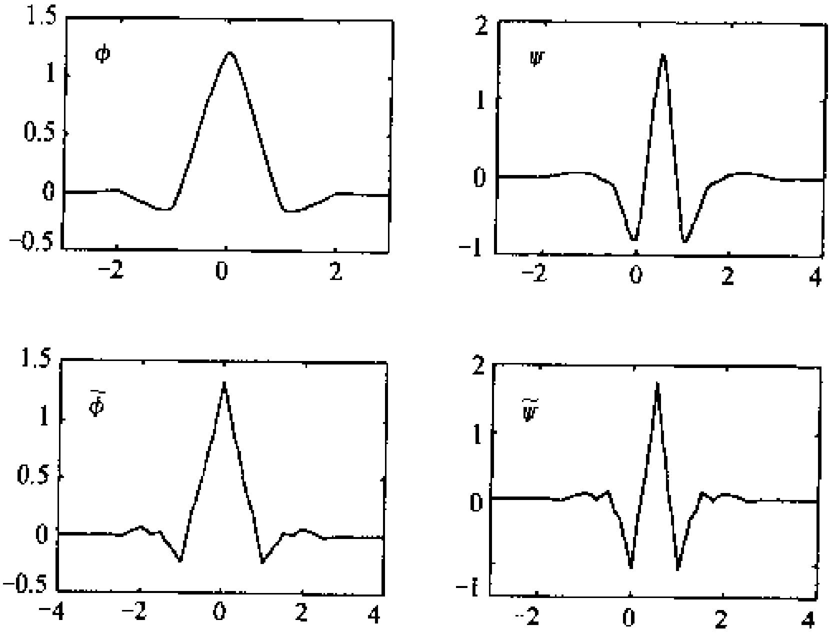


图 8.8 对应于表 8.3 中 $N=4=\tilde{N}$ 的两个情形下的函数 $\phi,\tilde{\phi}$ 及 $\psi,\tilde{\psi}$ 的图形

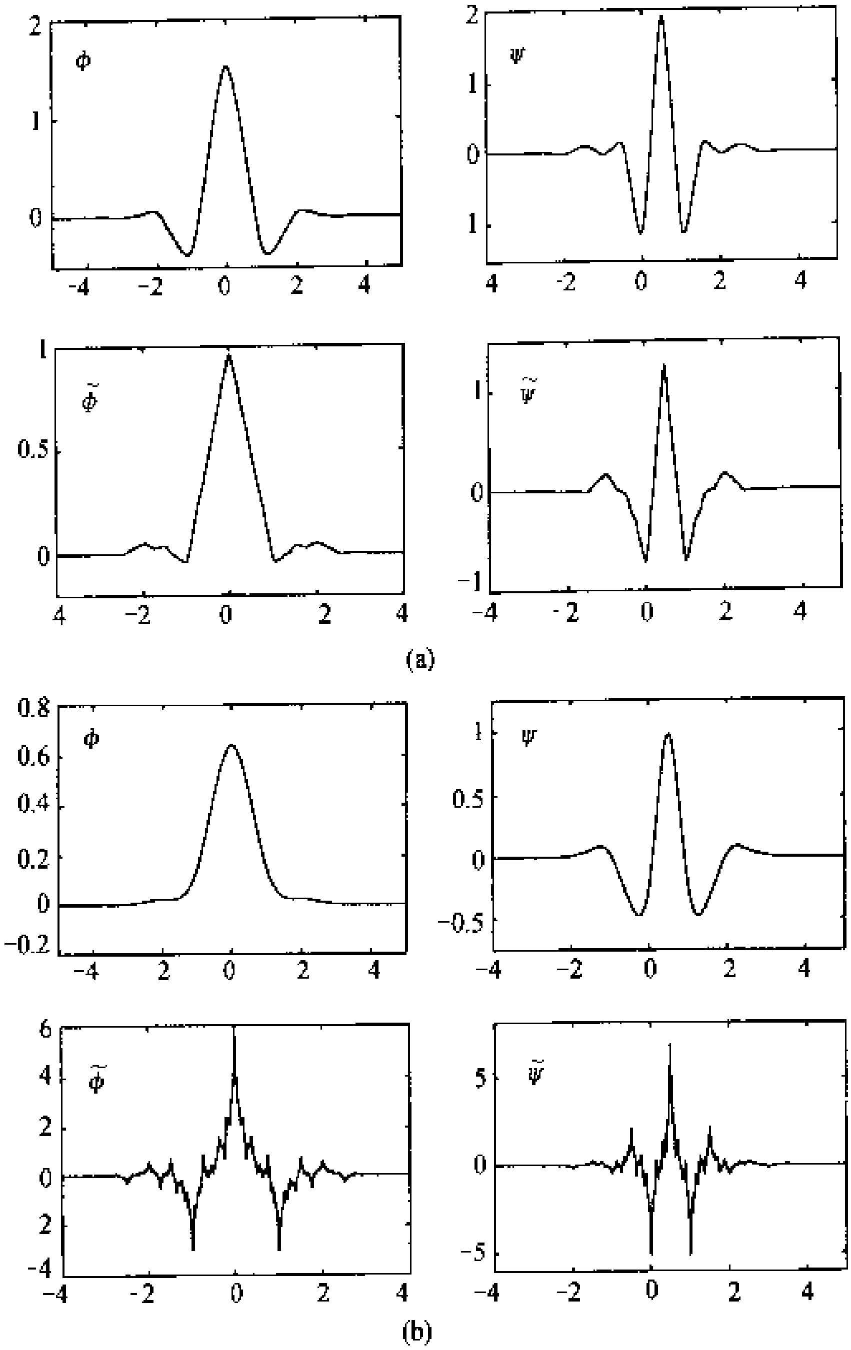


图 8.9　对应于表 8.3 中 $N=5=\tilde{N}$ 的两个情形下的函数 $\phi,\tilde{\phi}$ 及 $\psi,\tilde{\psi}$ 的图形

8.3.5　最接近标准正交基的双正交基

这一族例子中的第一个是由 M. Barlaud 提供的，该研究小组在视觉分析中为图像编码就 6 节 A 和 6 节 B 中的滤波器进行了实验(见 Antonini 等(1990))。由于 Laplace 金字塔格式(Burt 和 Adelson 1983)的盛行。Barlaud 曾怀疑用于 Laplacian 金字塔滤波器作为 m_0 或 $\widetilde{m}_0$ 的对偶小波系统是否能被构造。这些滤波器的显式表达式为：

$$- a\mathrm{e}^{-ai\xi} + 0.25\mathrm{e}^{-i\xi} + (0.5 + 2a) + 0.25\mathrm{e}^{i\xi} - a\mathrm{e}^{2i\xi} \tag{8.3.27}$$

对于 $a = -\frac{1}{16}$，上式将退化为前面在"样条例子"中介绍过的${}_4\widetilde{m}_0$ 滤波器。在视觉应用中，通常情况下取 $a = 0.05$：虽然对应的 $\tilde{\phi}$ 比${}_4\tilde{\phi}$ 有较小的正则性，但从视觉认识的角度看，所得的结果似乎更好一些。根据 Barlaud 的建议，在式(8.3.27)中选择 $a = 0.05$，或者

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= 0.6 + 0.5\cos\xi - 0.1\cos 2\xi \\ &= (\cos\xi/2)^2\left(1 + \frac{4}{5}\sin^2\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.3.28}$$

与 m_0 对偶的 $\widetilde{m}_0$ 必须满足

$$m_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi)} + m_0(\xi + \pi)\overline{\widetilde{m}_0(\xi + \pi)} = 1$$

正如 8.4.4 节所述，$\widetilde{m}_0$ 可选择为对称的(因为 m_0 是对称的)，同时也选择 $\widetilde{m}_0$ 能被$(\cos\xi/2)^2$ 整除(故对应的 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 均有两阶零矩)。换言之

$$\widetilde{m}_0(\xi) = (\cos\xi/2)^2 P(\sin^2\xi/2)$$

其中

$$(1 - x^2)\left(1 + \frac{4}{5}x\right)P(x) + x^2\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5}x\right)P(1 - x) = 1$$

根据定理 6.1.1 结合方程对用 x 代替 $1 - x$ 的对称性，方程有次数为 2 的惟一解 $P(x)$。容易求得 $P(x) = 1 + \frac{6}{5}x - \frac{24}{35}x^2$，于是

$$\widetilde{m}_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^2\left(1 + \frac{6}{5}\sin^2\frac{\xi}{2} - \frac{24}{35}\sin^4\frac{\xi}{2}\right) \tag{8.3.29}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{3}{280}\mathrm{e}^{-3i\xi} - \frac{3}{56}\mathrm{e}^{-2i\xi} + \frac{73}{280}\mathrm{e}^{-i\xi} + \frac{17}{28} \\ &\quad + \frac{73}{280}\mathrm{e}^{3i\xi} - \frac{3}{56}\mathrm{e}^{2i\xi}\,\frac{3}{280}\mathrm{e}^{3i\xi} \end{aligned} \tag{8.3.30}$$

可以验证式(8.3.28)、式(8.3.29)满足 8.4.2 节中提出的所有条件，所得的 m_0 和 $\widetilde{m}_0$ 确实对应于一对双正交小波基。图 8.10 画出了对应的 $\phi, \tilde{\phi}, \psi$ 和 $\tilde{\psi}$ 的图形。四个函数均连续但不可导。$\tilde{\phi}$ 和 ϕ 或 $\tilde{\psi}$ 和 ψ 惊人地相似。据此还能追溯到 m_0 和 $\widetilde{m}_0$ 的相似性。当然这点不能从式(8.3.27)、式(8.3.30)中立即看到，但比较表 8.4中的数值即刻可看出来。事实上，两个滤波器都非常接近于(必然不对称)正交 Coiflets之一的滤波器(见 8.3 节)。为比较方便，表 8.4 的第三栏列出了$(m_0)_{\text{Coiflets}}$的值。m_0 与标准正交小波滤波器的近似性解释了为什么 m_0 与对偶的 m_0 非常接近的原因。与 Laplacian 金字塔相关的双正交基在图像分析中的第一次应用是由 Antonini 等人 1990 年进行的。

表 8.4

在本段中所计算出的滤波器(m_0)Burt 及其对偶滤波器$(\tilde{m}_0)_{\text{Burt}}$的滤波系数以及对应于 Coiflets 的一个正交基的相当近似的滤波器系数(请参看表 8.1 中 $K=1$ 的元素)

n	$(m_0)_{\text{Burt}}$	$(\tilde{m}_0)_{\text{Burt}}$	$(m_0)_{\text{Coiflets}}$
−3	0	−0.010714285714	0
−2	−0.05	−0.053571428571	−0.051429728471
−1	0.25	0.260714285714	0.238929728471
0	0.6	0.607142857143	0.692859456942
1	0.25	0.260714285714	0.272140543058
2	−0.05	−0.053571428571	−0.051429972847
3	0	−0.010714285714	−0.011070271529

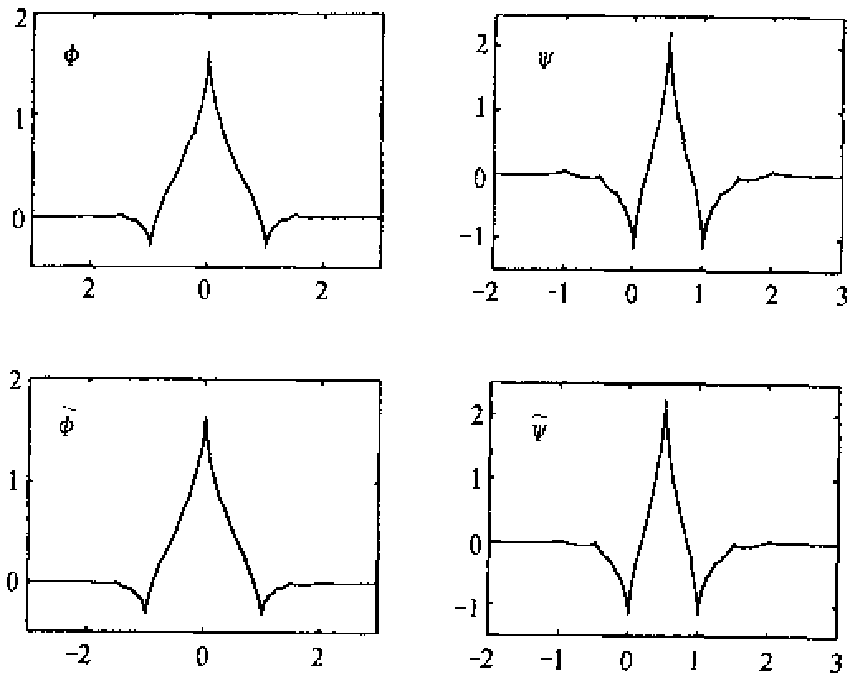


图 8.10　从 Burt－Adelson 低通滤波器构造的双正交对和 $\phi,\psi,\tilde{\phi},\tilde{\psi}$ 的图像

M. Barlaud 的建议导致了 Burt 滤波器非常接近于标准正交小波滤波器的偶然发现(人们怀疑这种接近是否在应用中同样有效?)。该例认为可能存在其他双正交基,这些双正交基具有对称滤波器和有理化滤波系数,并可通过近似化和"对称化"已有的正交小波基并计算对应的对偶滤波器构造出来。在 8.3 节中列出的 Coiflet 系数是通过一种自然导致近似对称滤波器的方法构造出来的。因而,可以预计接近于标准正交基的对称双正交滤波器也事实上是 Coiflet 的一种近似。8.3 节的分析表明

$$m_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K}\left[\sum_{k=1}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2k} + O\left(\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2K}\right)\right]$$

下面的例子特别选择

$$m_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K}\left[\sum_{k=1}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2k} + \alpha\left(\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^{2K}\right)\right]$$

从而有下列步骤：

1. 确定 a 使得 $\left|\int_{-\pi}^{\pi}[1-|m_0(\xi)|^2-|m_0(\xi+\pi)|^2]\right|\mathrm{d}\xi$ 极小(下面的例子中是零)。这种优化准则当然也可用其他准则代替(比如可以用 $1-|m_0(\xi)|^2-|m_0(\xi+\pi)|^2$ 的所有傅里叶级数系数的平方和最小代替仅由 $l=0$ 时 $e^{il\xi}$的系数的平方和达到最小)。对于 $K=1,2,3$ 时,对 a 的最小根分别为 0.861001748086, 3.328450120793,13.113494845221。

2. 用某个简单分数[①] 代替上述 a 的无理的优化值。本例中,$K=1$ 时取 $a=0.8=\frac{4}{5}$,$K=2$ 时取 $a=3.2=\frac{16}{5}$,$K=3$ 时取 $a=13$。对子 $K=1$ 时这种处理可简化本例。

3. 由于 m_0 是面定的,故可以计算出 $\tilde{m}_0$,若还要求 $\tilde{m}_0$ 能被$\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K}$整除。则

$$\tilde{m}_0(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^{2K}P_K\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^2 \tag{8.3.31}$$

其中 P_K 是 $3K-1$ 次多项式。用同于 Daubechies(1990)分析方法，可以得出

$$P_K(x) = \sum_{k=0}^{K-1}\binom{K-1+k}{k}x^k + O(x^K)$$

从而确定了 P_K 的 $3K$ 个系数中的 K 个,其余系数也能容易求出。对于 $K=2$ 和 3,有

$$P_2(x) = 1 + 2x + \frac{14}{5}x^2 + 8x^3 - \frac{8024}{455}x^4 + \frac{3776}{455}x^5 \tag{8.3.32}$$

$$P_3(x) = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 30x^4 + 42x^5 - \frac{1721516}{6075}x^6 + \frac{1921766}{6075}x^7 - \frac{648908}{6075}x^8 \tag{8.3.33}$$

表 8.5 列出了 $K=2,3$ 时 m_0 和 $\tilde{m}_0$ 最接近 Coiflet 的滤波器系数值,图 8.11 画出了两种情况下 $\phi,\tilde{\phi},\psi$ 和 $\tilde{\psi}$ 的图形。值得注意的是双正交滤波器 $m_0,\tilde{m}_0$ 的计算比 Daubechies 关于正交 Coiflet 滤波器的计算简单得多。这表明双正交小波基的构造比正交小波基的构造具有更大的灵活性。

① 见本章末注 12。

表 8.5

$k=2,3$ 时,最接近于 Coitlets 的双正交基的滤波器 m_0 和 $\widetilde{m}_0$ 的数值。表中第三列为 m_0 与 $\widetilde{m}_0$ 很接近的正交 Coitlets 滤波器的系数,为了更容易比较不同的系数,我们采用十进制表示这些数据,实际上, m_0 与 $\widetilde{m}_0$ 的系数都是有理数。

K	n	m_0 的系数	$\widetilde{m}_0$ 的系数	$(m_0)_{\text{Coiflets}}$的系数 $n\leqslant 0$	$n\geqslant 0$
2	0	0.575	0.575291895604	0.574682393857	
	±1	0.28125	0.286392513736	0.273021046535	0.294867193696
	±2	−0.05	−0.052305116758	−0.047639590310	−0.054085607092
	±3	−0.03125	−0.039723557692	−0.029320137980	−0.042026480461
	±4	0.0125	0.015925480769	0.011587596739	0.016744410163
	±5	0	0.003837568681	0	0.003967883613
	±6	0	−0.001266311813	0	−0.001289203356
	±7	0	−0.000506524725	0	−0.000509505399
3	0	0.5634765625	0.560116167736	0.561285256870	
	±1	0.29296875	0.296144908701	0.286503335274	0.302983571773
	±2	−0.047607421875	−0.047005100329	−0.043220763560	−0.050770140755
	±3	−0.048828125	−0.055220135661	−0.046507764479	−0.058196250762
	±4	0.01904296875	0.021983637555	0.016583560479	0.024434094321
	±5	0.005859375	0.010536373594	0.005503126709	0.011229240962
	±6	−0.0031738281250	−0.005725661541	−0.002682418671	−0.006369601011
	±7	0	−0.001774953991	0	−0.001820458916
	±8	0	0.000736056355	0	0.000790205101
	±9	0	0.000339274308	0	0.000329665174
	±10	0	−0.000047015908	0	−0.000050192775
	±11	0	−0.000025466950	0	−0.000024465734

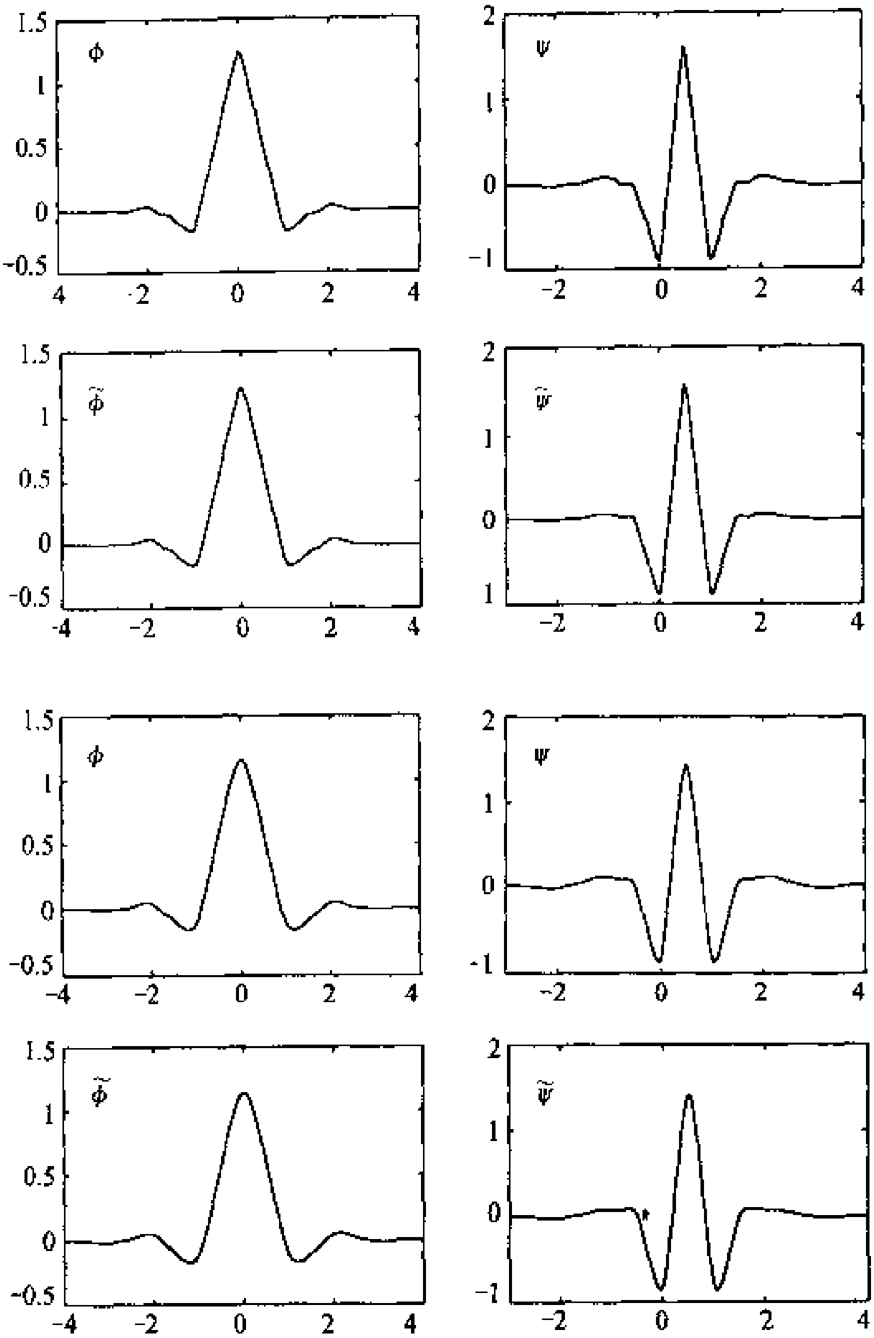


图 8.11 对应于表 8.5 的 $\phi,\psi,\tilde{\phi}$ 与 $\tilde{\psi}$ 的图形

注:

1. 在 $\phi_1(.-n)$正交意义下，$\phi_2(.-n)$ 也是正交的。

2. 严格地讲，引理 6.2.2 仅证明了 supp$\phi\subset[0,N]$，1991 年 Lemarie' 和 Malgouyres 证明了 supϕ 必须是一个区间，且该区间一定是$[0,N]$。

3. 尽管如此，AWARE 公司将 6.4 节中的非对称滤波器应用于图像和视觉编码中取得了很好的效果，同时也应注意到要定量描述感知误差的大小本身就是很困难的。过去常用 l^2 范数来衡量，主要原因是用此法比其他方法方便，但所有专家都认为用 l^2 范数衡量感知误差的大小并非最好选择。然而众所周知，就其他更好的方法又没有达成一致意见。

4. 6.4 节中的$_N\phi$ 不具有这一性质。$|_N\hat{\phi}(\xi)|$的图形在 $\xi=0$ 处非常平坦,它表明当 $l=1,2,\cdots,N$ 时,$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\xi l}|_N\hat{\phi}|_{\xi=0}=0$,但$_N\hat{\phi}(\xi)$的相位并不具有这种性质。

5. 欲证明 T_0 是一个有界算子是很容易的。若 $\mathrm{supp}\phi=[-N_1,N_2]$,则

$$|\langle f,\phi_{0,k}\rangle|^2=|\int \mathrm{d}xf(x)\overline{\phi(x-k)}|^2\leqslant(\int_{-N_1-k}^{N_2-k}\mathrm{d}x|f(x)|^2)^{1/2}\|\phi\|^2$$

因此

$$\sum_k|\langle f,\phi_{0,k}\rangle|^2\leqslant\|\phi\|^2\sum_k\int_{-N_1-k}^{N_2-k}\mathrm{d}x|f(x)|^2\leqslant\|\phi\|^2(N_1+N_2)\|f\|^2$$

类似的可以证明所有 T_j 均是有界算子。

6. 我们有

$$\begin{aligned}\|f\|^2=\inf_{\|g\|\leqslant 1}\langle f,g\rangle|^2&\leqslant\inf_{\|g\|\leqslant 1}[\lim_{J\to\infty}\sum_{j=-J}^{J}\sum_l|\langle f,\psi_{i,l}\rangle||\tilde{\psi}_{j,l},g|]^2\\&\leqslant\inf_{\|g\|\leqslant 1}(\sum_{j,l}|\langle f,\psi_{j,l}\rangle|^2)(\sum_{j,l}|\langle\tilde{\psi}_{j,l},g\rangle|^2)\\&\leqslant\inf_{\|g\|\leqslant 1}(\sum_{j,h}|\langle f,\psi_{j,l}\rangle|^2)\tilde{A}\|g\|^2\\&\leqslant\tilde{A}\sum_{j,l}|\langle f,\psi_{t,l}\rangle|^2\end{aligned}$$

7. 两个子空间之间的夹角定义为下列元素

$$\mathrm{angle}(E,F)=\inf_{e\in E,f\in F}\cos^{-1}\frac{|\langle e,f\rangle|}{\|e\|\|f\|}$$

8. 在 Cohn,Daubechies 和 Feaureau(1992)的证明中,为了导出式(8.3.15)与式(8.3.16),对$\hat{\phi}$附加了一个较强的衰减条件,即,$|\hat{\phi}(\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{-1/2-\varepsilon}$(我们知道这些条件甚至在某些正交情况下也不能满足)。本节中上述简述来自 Cohn 和 Daubechies(1992)的论文。

9. 由子 ψ 具有紧支集,导数 $\psi^{(l)},l=0,\cdots,m$ 是自动有界的。

10. $N=2=\tilde{N}$时发生了奇怪的现象。函数$_{2,2}\phi$,虽然属于 $L^2([-2,2])$(因而也属于 $L^1([-2,2])$),但在每个二进有理点处都有奇异性,故$_{2,2}\phi$(或$_{2,2}\psi$)的真实图由黑矩形组成。图 8.6中的图形虽然不是在 L^∞意义下的近似,但仍然是 L^2 或 L^1 意义下的最好近似。关于这点,作者要感谢 Win Sweldens。

11. Ausher(1989)和 Chui 及 Wang(1991)提出了非正交小波基的另一种构造,其中两个小波之一,比如 ψ 是一个紧支称样条函数,因而可以处处精确地与明显地识别出来,与本节不同,在该构造中 W_j 空间是正交的,而且 $\tilde{W}_j=W_j$。结果其对偶小波 $\tilde{\psi}$ 有无限支集(要使 $\psi,\tilde{\psi}$ 都具有紧支集,必须放弃对 W_j 正交性的要求)及指数衰减性。相应的多分辨分析与 Battle-Lemarie' 小波相同;ψ 的选择应使得它与适当阶数的B 样条及其所有整数平移都正交,而 $\tilde{\psi}$ 由下式确定

$$\hat{\tilde{\psi}}(\xi)=\hat{\psi}(\xi)/[\sum_k|\hat{\psi}(\xi+2\pi k)|^2]$$

12. 选择 a 为有理数以使得 $m_0,\tilde{m}_0$ 具有有理数系数,注意原来的无理数 a 也不是不可侵犯的:改变第 1 点中的判据将导出稍微不同的 a 值。

第 9 章　泛函空间的小波刻划

本章的主要任务依然是在前面四章中所讨论过的正交基，并将对许多不同于 L^2 空间的其他空间给出比傅里叶基函数优越的所谓好的(无条件)基。本章几乎所有材料都来自 Meyer(1990)，但我相信这里的处理方式将更为浅显易懂，使那些数学水平不高的读者也可以接受(Meyer 的书包含有这个专题的更多的内容)。在 9.1 节将从回顾纯调和分析的一个经典定理即 Calderon - Zygmuand 分解定理开始。它可在许多教科书找到(如 Stain(1970))；并用不同的(二进)尺度技巧给出了详细的证明。这种技巧在小波出现以前早就在调和分析中使用了。结合其他一些经典定理，得出了小波为 $L^p(1<p<\infty)$ 的无条件基的证明。在 9.2 节不加证明地列出了用小波表征其他泛函空间的一个表，也作了用正交小波进行奇异性检测的简短讨论。在 9.3 节中讨论了 L^1 函数对小波基的展开问题，由于 L^1 空间没有无条件基，小波也不能作到这一点，尽管如此，它仍然可以做出比傅里叶展开更好的工作。最后，在 9.4 节着重指出了小波与傅里叶展开的差异。

9.1　小波：空间 $L^p(\mathbb{R})$，$1<p<\infty$ 的无条件基

我们从证明 Calderon - Zygmund 分解定理开始。

定理 9.1.1　设 f 是 $L^1(\mathbb{R})$ 的一个正函数，给定 $\alpha>0$，则 $\mathbb{R}$ 可分解如下：

1. $\mathbb{R}=G\cup B, G\cap B=\emptyset$；
2. 在一个“好”集合 G 上，$f(x)\leqslant\alpha$，a.e.
3. “坏”集合 B 可以记为

$$B=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}Q_k$$

其中 Q_k 是互不相交的区间，并且对于所有的 $K\in\mathbb{N}$，有

$$\alpha\leqslant|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}dxf(x)\leqslant2\alpha$$

证明：

1. 选择 $L=2^l$，使得 $2^{-l}\int_{\mathbb{R}}dxf(x)\leqslant\alpha$，则对一切 $k\in\mathbb{Z}$，$L^{-1}\int_{kL}^{(k+1)L}dxf(x)\leqslant\alpha$，这给出了 $\mathbb{R}$ 的第一次分割。

2. 在第一次分割中取一个面定的区间 $[kL,(k+1)L]$，将它分成两半，即

$[kL,(k+\frac{1}{2})L)$和$((k+\frac{1}{2})L,(k+1)L]$。任取其中一半记为$Q'$并计算$I_{Q'}=|Q'|^{-1}\int_{Q'}dxf(x)$。如果$I_{Q'}>\alpha$,则将$Q'$放入到作成$B$的那些区间袋中。事实上我们有

$$\alpha\leqslant I_{Q'}\leqslant|Q'|^{-1}\int_{Q}\mathrm{d}xf(x)=2|Q|^{-1}\int_{Q}\mathrm{d}xf(x)$$

如果$I_{Q'}<\alpha$,则继续下去(分成两半等等)。如果必要可以无限进行下去。对Q的另一半做同样的事情,而且也对所有的其他区间$[kL,(k+1)L]$都如此。最后即得到满足式(9.1.0)的可数个"坏"区间列,记它们的并为B,其补集为G。

3. 通过B的构造,我们发现对任一$x\notin B$存在一个越来越小的区间的无穷序列$Q_1,Q_2,Q_3\cdots$使得对每个n,$x\in Q_n$且$|Q_n|^{-1}\int_{Q_n}\mathrm{d}yf(y)\leqslant\alpha$。事实上,对每个$j$,$|Q_j|=\frac{1}{2}|Q_{j-1}|$,且$Q_j\subset Q_{j-1}$。因为$Q_n$"收缩"到$x$,几乎必然有

$$|Q_n|^{-1}\int_{Q_n}\mathrm{d}yf(y)\rightarrow f(x)$$

由于左边$\leqslant\alpha$。从而在G中,$f(x)\leqslant\alpha$,a.e。 ■

注意若选择$L=2^l$则证明中出现的所有区间都自动地是二进区间,即当$k,j\in\mathbb{Z}$时,区间有形式$[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$。

下面定义Calderon-Zygmund算于并证明它的一个经典性质。

定义1. $\mathbb{R}$上的Calderon-Zygmund算子T是一个积分算于

$$(Tf)(x)=\int\mathrm{d}yK(x,y)f(y)\tag{9.1.1}$$

其积分核满足条件

$$|K(x,y)|\leqslant C/|x-y|\tag{9.1.2}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right|\leqslant C/|x-y|^2\tag{9.1.3}$$

而且它确定了$L^2(\mathbb{R})$上的一个有界算子。

定理9.1.2 Calderon-Zygmund算子也是从$L^1(\mathbb{R})$到$L^1_{\mathrm{weak}}(\mathbb{R})$上的有界算子。

定理中的$L^1_{\mathrm{weak}}(\mathbb{R})$空间定义如下:

定义:函数$f\in L^1_{\mathrm{weak}}(\mathbb{R})$,如果存在$C>0$,使得对所有的$\alpha>0$,有

$$|\{x;|f(x)|\geqslant\alpha\}|\leqslant C/\alpha\tag{9.1.4}$$

使式(9.1.4)(对所有$\alpha>0$)成立的一切C的下界称为$\|f(x)\|_{L^1_{\mathrm{weak}}}$。[①]

---

① 见本章末注2。

例:

1. 如果 $f\in L^1(\mathbb{R})$,则式(9.1.4)自动满足。事实上令 $S_\alpha=\{x;|f(x)|\geqslant\alpha\}$, $\alpha|S_\alpha|\leqslant\int_{S_\alpha}\mathrm{d}x|f(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x|f(x)|=\|f(x)\|_{L^1}$。因此有

$$\|f\|_{L^1_{\text{weak}}}\leqslant\|f\|_{L^1}$$

2. 由于 $|\{x;|x|^{-1}\geqslant\alpha\}|=2/\alpha$,故 $f(x)=|x|^{-1}$ 属于 $L^1_{\text{weak}}(\mathbb{R})$,但 $f(x)=|x|^{-\beta},\beta>1$ 不在 $L^1_{\text{weak}}(\mathbb{R})$ 中。

这些例子表明 $L^1_{\text{weak}}(\mathbb{R})$ 的名称是适当的。$L^1_{\text{weak}}(\mathbb{R})$ 拓展了空间 $L^1(\mathbb{R})$,它包含了那些由于 $|f|$ 的本性对数起奇点而使积分 $\int|f|$ 不为有限值的那些函数 f。

定理 9.1.2 的证明:

1. 估计 $|\{x;|Tf(x)|\geqslant\alpha\}|$。首先按阈值 α 对 $\mathbb{R}$ 作关于函数 $|f|$ 的一个 Calderon - Zygmund 分解。定义

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & \text{当 } x\in G\\ |Q_k|^{-1}\int_{Q_k}\mathrm{d}yf(y) & \text{当 } x\in Q_k \text{ 内部}\end{cases}$$

$$b(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\in G\\ f(x)-|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}\mathrm{d}yf(y) & \text{当 } x\in Q_k \text{ 内部}\end{cases}$$

则 $f(x)=g(x)+b(x)$,a.e.;因此 $Tf=Tg+Tb$,从而只有当 $|Tg(x)|\geqslant\alpha/2$ 或者 $|Tb(x)|\leqslant\alpha/2$(或二者都成立)时,才可能有 $|Tf(x)|\geqslant\alpha$,所以,

$$\begin{aligned}&|\{x;|Tf(x)|\geqslant\alpha\}|\\ &\leqslant|\{x;|Tg(x)|\geqslant\frac{\alpha}{2}\}|+|\{x;|Tb(x)|\geqslant\frac{\alpha}{2}\}|\end{aligned}\tag{9.1.5}$$

因而欲证此定理只需证明式(9.1.5)的右边各项有界 $\frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$。

2. 我们有:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2|\{x;|Tg(x)|\geqslant\frac{\alpha}{2}\}|&\leqslant\int_{\{x;|Tg(x)|\geqslant\frac{\alpha}{2}\}}\mathrm{d}x\ |Tg(x)^2|\\ &\leqslant\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\ |Tg(x)^2|\\ &=\|Tg\|_{L^2}^2\leqslant c\|g\|_{L^2}^2\end{aligned}\tag{9.1.6}$$

上面的最后一个不等式成立是因为 T 是 L^2 上的有界算子。此外,由于

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^2}^2&=\int_G\mathrm{d}x|g(x)|^2+\int_B\mathrm{d}x|g(x)|^2\\ &\leqslant\alpha\int_G\mathrm{d}x|f(x)|+\sum_k|Q_k|\cdot\left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{|Q_k|}\mathrm{d}yf(y)\right|^2\end{aligned}$$

(用 g 的定义以及在 G 上 $|f(x)|\leqslant \alpha$)

$$\leqslant \alpha\int_G \mathrm{d}x|f(x)|+\sum_k 2\alpha\left|\int_{Q_k}\mathrm{d}yf(y)\right|$$

(用 $|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}\mathrm{d}yf(y)\leqslant 2\alpha$)

$$\leqslant 2\alpha\int_R \mathrm{d}x\,|f(x)|=2\alpha\|f\|_{L^1}$$

结合式(9.1.6)得

$$|\{x;\,|Tg(x)|\geqslant \frac{\alpha}{2}\}|\leqslant \frac{8}{\alpha}C\|f\|_{L^1} \tag{9.1.7}$$

3. 现考虑 b。对每个 k,通过拉长 Q_k 以定义新区间 $Q_k{}^*$: $Q_k{}^*$ 与 Q_k 有相同的中心 y_k,但长度是 Q_k 的两倍。再定义 $B^*=\bigcup_k Q_k{}^*$ 及 $G^*=\mathbb{R}\setminus B^*$。这样

$$|B^*|\leqslant \sum_k |Q_k{}^*|=\frac{2}{\alpha}\sum_k\int_{Q_k}\mathrm{d}x\,|f(x)|\,\frac{2}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

(因为 $|Q_k|^{-1}\int_{Q_k}\mathrm{d}x\,|f(x)|\geqslant \alpha$)

所以有

$$|\{x\in B^*;\,|Tb(x)|\geqslant \frac{\alpha}{2}\}|\leqslant |B^*|\leqslant \frac{2}{\alpha}\|f\|_{L^1} \tag{9.1.8}$$

4. 我们估计 $|\{x\in G^*,|Tb(x)|\geqslant \frac{\alpha}{2}\}|$

$$\frac{\alpha}{2}|\{x\in G^*;\,|Tb(x)|\geqslant \frac{\alpha}{2}\}|\leqslant \int_{\{x\in G^*;|Tb(x)|\geqslant \frac{\alpha}{2}\}}\mathrm{d}x\,|Tb(x)|$$

$$\leqslant \int_{G^*}\mathrm{d}x\,|Tb(x)| \tag{9.1.9}$$

5. 为估计最后一个积分,对 b 按不同的贡献予以分离。定义 b_k 如下

$$b_k(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\notin Q_k\\ f(x)-\dfrac{1}{|Q_k|}\displaystyle\int_{Q_k}\mathrm{d}yf(y), & \text{当 } x\in Q_k \text{ 内部}\end{cases}$$

则

$$b(x)=\sum_k(x),\text{a.e.}$$

因为 Q_k 彼此不相交,所以 $Tb=\sum_k Tb_k$; 且

$$\int_{G^*}\mathrm{d}x\,|Tb(x)|\leqslant \sum_k\int_{G^*}\mathrm{d}x\,|Tb_k(x)|$$

$$\leqslant \sum_k\int_{R\setminus Q_k^*}\mathrm{d}x\,|Tb_k(x)|$$

$$= \sum_k \int_{\mathbf{R}\setminus Q^*} \mathrm{d}y \left| \int_{Q_k} \mathrm{d}y K(x,y) b_k(y) \right|$$

$$= \sum_k \int_{\mathbf{R}\setminus Q^*} \mathrm{d}x \left| \int_{Q_k} \mathrm{d}y [K(x,y) - K(x,y_k)] b_k(y) \right|$$

（y_k 是 Q_k 的中心。这个增加项的插入

是因为$\int_{Q_k} \mathrm{d}y b_k(y) = 0$）

$$\leqslant \sum_k \int_{\mathbf{R}\setminus Q^*} \mathrm{d}x \int_{Q_k} \mathrm{d}y \left| K(x,y) - K(x,y_k) \right| b_k(y) \tag{9.1.10}$$

利用 $k(x,y)$对第二变元的偏导数的界可以估计差 $K(x,y) - K(x,y_k)$

$$\int_{\mathbf{R}\setminus Q^*} \mathrm{d}x \left| K(x,y) - K(x,y_k) \right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}\setminus Q^*} \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}t \left| \partial_2 K(x, y_k + (y - y_k)) \right| \cdot \left| y - y_k \right|$$

$$\leqslant \int_{|y-y_k| \geqslant 2R_k} \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}t C \left| y - y_k \right| \left| (x - y_k) - t(y - y_k) \right|^{-2}$$

（这里记 $Q_k = [y_k - R_k, y_k + R_k)$，

$Q_k{}^* = [y_k - 2R_k, y_k + 2R_k)$）

$$= R_k^2 \left| v \right| \int_{|u| \geqslant 2} \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}t C / R_k^2 \left| u - tv \right|^2$$

（将 $x = y_k + R_k u, y = y_k + R_k v$ 代入后得出，

其中 $|u| \geqslant 2$，$|v| \geqslant 1$）

$\leqslant C'$（与 k 无关）。

将此式代入式(9.1.10)得出

$$\int_{G^*} \mathrm{d}x \left| Tb(x) \right| \leqslant C' \sum_k \int_{G_k} \mathrm{d}y \left| b_k(y) \right|$$

$$\leqslant C' \sum_k \int_{Q_k} \mathrm{d}y \left[\left| f(y) \right| + \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} \mathrm{d}x \left| f(x) \right| \right]$$

$$= 2C' \sum_k \int_{Q_k} \mathrm{d}y \left| f(y) \right| \leqslant 2C' \| f \|_{L^1}$$

将式(9.1.7)、式(9.1.8)及式(9.1.9)及现在的结果结合起来，完成了定理的证明。 ■

一旦我们知道了算子 T 将 L^2 映射到 L^2 或将 L^1 映射到 L^1_{weak}，就可以用 Marcinkiewciz 的插值定理将 T 扩张到其他的L^p 空间。

定理 9.1.3 设算子 T 满足

$$\|Tf\|_{L^{q_1}_{\text{weak}}} \leqslant C_1 \|f\|_{L^{p_1}} \tag{9.1.11}$$

$$\|Tf\|_{L^{q_2}_{\text{weak}}} \leqslant C_2 \|f\|_{L^{p_2}} \tag{9.1.12}$$

其中,$q_1 \leqslant p_1, q_2 \leqslant p_2$,则对于满足关系式$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2}, 0<t<1$ 的 p、q,存在依赖于 p_1, q_1, p_2, q_2 和 t 的一个常数k 使得

$$\|Tf\|_{L^q} \leqslant K\|f\|_{L^p}$$

这里 L^q_{weak}是使$\|f\|^q_{\text{weak}} = [\inf\{C; |\{x; |f(x)| \geqslant \alpha\}| \leqslant C\alpha^{-q}, \text{对一切 } \alpha > 0\}]^{1/q}$取有限值的函数$f$ 组成的空间。

这个定理的漂亮之处在于它仅需要在两个极值处的较弱的界却导出了关于参数 q 的L^q 范数(而不是 L^q_{weak}范数)的界。① 此定理的证明已超出本章的范围,读者可在 Stein 和 Weiss(1971)中找到其一般形式的证明。Marcinkiewicz 插值定理蕴涵着定理 9.1.2:从所证明的 $L^1 \to L^1_{\text{weak}}$的有界性可以导出 $L^p \to L^p$,$(1<p<\infty)$的有界性,现叙述如下。

定理 9.1.4 如果 T 是一个积分算子,其积分核 K 满足式(9.1.2)和式(9.1.3)并且如果 T 是从$L^2(\mathbb{R})$到 $L^2(\mathbb{R})$的有界算子,则对一切 $1<p<\infty$,T 可扩张成从$L^p(\mathbb{R})$到 $L^p(\mathbb{R})$的有界算子。

证明:

1. 定理 9.1.2 已证明了 T 是$L^1 \to L^1_{\text{weak}}$有界的,由 Marcinkiewicz 定理,$T$ 可以扩张成对 $1<p\leqslant 2$ 的从 $L^p(\mathbb{R})$到 $L^p(\mathbb{R})$的有界算子。

2. 对 $2\leqslant p<\infty$,利用 T 的伴随算子 $\tilde{T}$,它由下式定义

$$\int dx(\tilde{T}f)(x)\overline{g(x)} = \int dx f(x)\overline{(Tg)(x)}$$

与 $\tilde{T}$ 相应的积分核$\tilde{k}(x,y) = \overline{k(x,y)}$也满足式(9.1.2) 和式(9.1.3) 。在 $L^2(\mathbb{R})$空间 $\tilde{T}$ 正是L^2-意义下的伴随算子 T^*,因此它是有界的。再由定理 9.1.2,$\tilde{T}$是从$L^1 \to L^1_{\text{weak}}$有界的,从而由定理 9.1.3,对 $1<p\leqslant 2$,它是从 L^p 到L^p 有界的。因为对于满足$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的 p、q,$\tilde{T}: L^p \to L^p$ 也是 $T: L^q \to L^q$ 的伴随算子,从而 T 对于 $2\leqslant p<\infty$是有界的。

为了让那些对 Banach 空间上的伴随理论不太熟悉的读者易于理解,更明确地有

$$\|Tf\|_q = \sup_{\substack{g \in L^p \\ \|g\| L^p = 1}} \left|\int dx(Tf)(x)\overline{g(x)}\right| \qquad (\text{如果}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$$

① 见本章末注 3。

$$= \sup_{\substack{g \in L^p \\ \|g\|_{L^p}=1}} \left| \int dx \int dy f(y) K(xy) \overline{g(x)} \right|$$

$$= \sup_{\substack{g \in L^p \\ \|g\|_{L^p}=1}} \left| \int dy f(y) (\widetilde{T}g)(y) \right|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{g \in L^p \\ \|g\|_{L^p}=1}} \|f\|_{L^p} \|\widetilde{T}g\|_{L^p} \leqslant C\|f\|_{L^q}$$

(严格地讲,在第三个不等式中交换积分的次序不是对所有的 f、g 都允许的,但可以把它限制在一个可交换积分次序的稠密子空间上)。 ■

现在应用上面结果去证明,如果 ψ 具有某种衰减性和某种正则性,又 $\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基,则 $\psi_{j,k}$ 也为 $L^p(\mathbb{R})$ $(1<p<\infty)$ 提供了无条件基。对此,需要证明的是(见预备知识),如果

$$f = \sum_{j,k} C_{j,k}\psi_{j,k} \in L^p$$

则对任意选择的 $w_{j,k}=\pm 1$,有

$$\sum_{j,k} w_{j,k}C_{j,k}\psi_{j,k} \in L^p$$

将假定 ψ 是连续可微的且 ψ 和 ψ' 都比 $(1+|x|)^{-1}$ 衰减得更快,即

$$|\psi(x)|, |\psi'(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-1-\epsilon} \tag{9.1.13}$$

则 $\psi \in L^p$,对 $1<p<\infty$ 及 $f=\sum_{j,k} C_{j,k}\psi_{j,k}$ 则由 $\psi_{j,k}$ 的标准正交性可得:$C_{j,k}=\int dx f(x)\psi_{j,k}(x)$,对此,要证明的是,对 $w_{j,k}=\pm 1$ 的任意选择。如下定义的 T_w

$$T_w f = \sum_{j,k} w_{j,k}\langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$$

是从 L^p 到 L^p 的一个有界算子。因为已经知道 T_w 是 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 有界的

$$\|T_w f\|_{L^2}^2 = \sum_{j,k} |w_{j,k}\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 = \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 = \|f\|^2$$

因此,假如能够证明 T_w 是一个其积分核满足式(9.1.2)及式(9.1.3)的积分算子,那么 T_w 的 T^p 有界性即可由定理 9.1.4 导得。这正是下面引理的内容。

引理 9.1.5 选择 $w_{j,k}=\pm 1$ 并定义 $K(x,y)=\sum_{j,k} w_{j,k}\psi_{j,k}\overline{\psi_{j,k}(y)}$,则存在 $C<\infty$,使得

$$|K(x,y)| \leqslant C/|x-y|$$

和

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}K(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y}K(x,y)\right| \leqslant C/|x-y|^2$$

证明：

1. $$|K(x,y)| \leqslant \sum_{j,k} |\psi_{j,k}(x)||\psi_{j,k}(y)|$$
$$\leqslant C\sum_{j,k} 2^{-j}(1+|2^{-j}-k|)^{-1-\epsilon} \quad (由式(9.1.13))$$

取 $j_0 \in \mathbb{Z}$，使得 $2^{j_0} \leqslant |x-y| \leqslant 2^{j_0+1}$。将对 j 的求和分为两部分：$j < j_0$ 和 $j \geqslant j_0$。

2. 因 $\sum_k (1+|a-k|)^{-1-\epsilon}(1+|b-k|)^{-1-\epsilon}$ 对的所有 a,b 是一致有界的①，有

$$\sum_{j=j_0}^{\infty}\sum_k 2^{-j}(1+|2^{-j}x-k|)^{-1-\epsilon}(1+|2^{-j}y-k|)^{-1-\epsilon}$$
$$\leqslant C\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \leqslant C2^{-j_0+1} \leqslant 4C/|x-y|$$

3. 对 $j < j_0$ 的部分的处理不是那么容易。

$$\sum_{j=-\infty}^{j_0-1} 2^{-j}\sum_k [(1+|2^{-j}x-k|)(1+|2^{-j}y-k|)]^{-1-\epsilon}$$
$$=\sum_{j=-j_0+1}^{\infty} 2^{j}\sum_k [(1+|2^{j}x-k|)^{-1-\epsilon}(1+|2^{j}y-k|)]^{-1-\epsilon}$$
$$\leqslant 4^{1+\epsilon}\sum_{j=-j_0+1}^{\infty} 2^{j}\sum_k [(2+|2^{j}x-k|)(2+|2^{j}y-k|)]^{-1-\epsilon} \quad (9.1.14)$$

取 $k_0 \in \mathbb{Z}$ 使得 $k_0 \leqslant 2^j\frac{x+y}{2} \leqslant k_0+1$，并令 $l = k - k_0$，则

$$2+|2^jx-k| = 2+\left|2^j\frac{x-y}{2} - l + \left(2^j\frac{x+y}{2} - k_0\right)\right|$$
$$\geqslant 1+\left|2^j\frac{x-y}{2} - l\right|$$

类似地

$$2+|2^jy-k| \geqslant 1+\left|2^j\frac{y-x}{2} - l\right|$$

因而，对 $a = 2^j\frac{x-y}{2}$

$$\sum_k [(2+|2^jx-k|)(2+|2^jy-k|)]^{-1-\epsilon}$$
$$\leqslant \sum_l [(1+|a-l|)(1+|a+l|)]^{-1-\epsilon}$$

---

① 见本章末注 4。

$$\leqslant C(1+|a|)^{-1-\varepsilon}$$①②

所以

$$(9.1.14)\leqslant C\sum_{j=-j_0+1}^{\infty}2^j\left(1+2^j\left|\frac{x-y}{2}\right|\right)^{-1-\varepsilon}$$③

$$\leqslant C\sum_{j'=1}^{\infty}2^{j'-j_0}\left(1+2^{j'-j_0}\frac{1}{2}2^{j_0+1}\right)^{-1-\varepsilon}\quad(\text{因 } |x-y|\leqslant 2^{j_0+1})$$

$$\leqslant C2^{-j_0}\sum_{j'=1}^{\infty}2^{j'}(1+2^{j'})^{-1-\varepsilon}$$

$$\leqslant C'2^{-j_0}\leqslant 2C'|x-y|^{-1}$$

从而有

$$|K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-1}$$

4. 为了估计$\partial_x K,\partial_y K$,使用与上面相同的技巧有

$$|\partial_y K(x,y)|\leqslant\sum_{j,k}2^{-j}|\psi'(2^{-j}x-k)||\psi(2^{-j}y-k)|$$

$$\leqslant C\sum_{j,k}2^{-2j}[(1+|2^{-j}x-k|)(1+|2^{-j}y-k|)]^{-1-\varepsilon}$$

最后不难得到

$$|\partial_y K(x,y)|,|\partial_y K(x,y)|\leqslant C|x-y|^{-2}\qquad\blacksquare$$

通过上面的引理的讨论可证明如下定理。

定理 9.1.6 如果 ψ 是C^1的,且$|\psi(x)|,|\psi'(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$,又如果 $\psi_{j,k}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$构成 $L^2(\mathbb{R})$的标准正交基,则$\{\psi_{j,k};j,k\in\mathbb{Z}\}$也构成所有 L^p 空间,$1<p<\infty$的一个无条件基。

9.2 泛函空间特征的小波刻划

由于 $\psi_{j,k}$构成$L^p(\mathbb{R})$的一个无条件基,因此对于函数 $f\in L^p(\mathbb{R})$存在着一种仅用 f 的小波系数的绝对值所作出的特征刻划。换句话说,对于 f,仅看$|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|$就可以确定是否有 $f\in L^p$。明确的判据是,对 $1<p<\infty$

---

① 见本章末注 5。

② 译者注:第一个不等式原文为$|a+l|$,事实上应为$|a-l|$

③ 译者注:原文此地有误,应为

$$(9.1.14)\leqslant C\sum_{j=-j_0+1}^{\infty}2^j\left(1+2^j\left|\frac{x-y}{2}\right|\right)^{-1-\varepsilon}\leqslant C\sum_{j'=0}^{\infty}2^{j'-j_0+1}\left(1+2^{j'-j_0+1}\frac{1}{2}2^{j_0}\right)^{-1-\varepsilon}(\text{因 } |x-y|\geqslant 2^{j_0})$$

$$\leqslant C2^{-j_0+1}\sum_{j'=0}^{\infty}2^{j'}(1+2^{j'})^{-1-\varepsilon}\leqslant C'2^{-j_0+1}\leqslant 4C'|x-y|^{-1}$$

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \Big[\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 |\psi_{j,k}(x)|\Big]^{1/2} \in L^p(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \Big[\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 2^{-j}\chi_{[2^j k, 2^j(k+1)]}(x)\Big]^{1/2} \in L^p(\mathbb{R})$$

关于它们确实是 $L^p(\mathbb{R})$的等价特征刻划的证明，请看 Meyer(1990)。

类似地，小波也为很多其他的泛函空间提供无条件基和特征刻划。这里我们不加证明地列出几个：

Sobolev 空间 $W^s(\mathbb{R})$　Sobolev 空间定义为

$$W^s(\mathbb{R}) = \{f; \int d\xi (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 < \infty\}$$

它们借助于小波系数的特征刻划是

$$f \in W^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k}\rangle|^2 (1 + 2^{-2js}) < \infty$$

Hölder 空间 $C^s(\mathbb{R})$，对 $0<s<1$，Hölder 空间定义为

$$C^s(\mathbb{R}) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}); \operatorname{Sup}_{x,h} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^s} < \infty\}$$

对 $s = s' + n, 0 < s' < 1$ 时，定义

$$C^s(\mathbb{R}) = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R}); \frac{d^n}{dx^n} f \in C^{s'}\}$$

当 s 取整数时，上述梯级空间不是传统的 C^n 空间(由所有 n 次连续可微的函数构成)，甚至不是 Lipschitz 空间，而是如下定义的稍大一些的空间，即

$$\Lambda_* = \text{"Zygmund 类"}$$

$$= \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}); \operatorname{Sup}_{x,h} \frac{|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|}{|h|} < \infty\}$$

它取代了 $C^1(\mathbb{R})$，和

$$\Lambda_*^n = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^{n-1}(\mathbb{R}); \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f \in \Lambda_*\}$$

关于这个 Hölder 空间梯级有如下的特征：

一个局部可积函数 f 属于 $C^s(\mathbb{R})$(s 非整数)或 Λ_*^n($s = n$ 为整数)当且仅当存在 $c<\infty$使得

$$|\langle f, \phi_{0,k}\rangle| \leqslant C \qquad \text{对一切 } k \in \mathbb{Z}$$

$$|\langle f, \psi_{-j,k}\rangle| \leqslant C 2^{-j(s+1/2)} \qquad \text{对一切 } j \geqslant 0, k \in \mathbb{Z} \tag{9.2.1}$$

这里隐含了假定 $\psi\in C^r, r>s$。

关于它的证明过程和更多的例子，请看 Meyer（1990）。这里所给出的例子中，Sobolev 空间是惟一能用傅里叶变换完全刻划的（即以“充分必要”条件刻划）空间。

条件式(9.2.1)刻划了整体正则性的特征。局部正则性也可以借助对标准正交小波基的系数来研究。最一般的定理如下，属于 Jaffard(1989b)。为简便起见，假定 ψ 具有紧支集且是 C^1 的(对更一般的 ψ,定理的公式稍微有不同)。

定理 9.2.1 如果 f 关于指数 α, $0<\alpha<1$,在 x_0 是 Hölder 连续的,即

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C|x-x_0|^{\alpha} \tag{9.2.2}$$

则对 $j\to\infty$,有

$$\mathrm{Max}[|\langle f,\psi_{-j,k}\rangle|\,\mathrm{dist}(x_0,\mathrm{supp}(\psi_{-j,k}))^{-\alpha}]=O(2^{-(1/2+\alpha)j}) \tag{9.2.3}$$

其中,dist(x_0,A)表示 x_0 与集合 A 的距离。

相反地,如果式(9.2.3)成立且如果对某个 $\varepsilon>0$, $f\in C^{\varepsilon}$,则

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant C|x-x_0|^{\alpha}\lg 2/|x-x_0| \tag{9.2.4}$$

这里没有式(9.2.3)与式(9.2.2)之间的严格等价关系。估计式(9.2.4)事实上是最优的,条件 $f\in C^{\varepsilon}$ 也一样:如果 f 仅仅是连续的,或者略去式(9.2.4)中的对数项,那么可以找到反例(Jaffard(1989b))。x_0 附近不太正则的点的存在或者 $f(x)$ 在 x_0 附近杂乱无章的振动都可能是式(9.2.2)与式(9.2.3)的不等价性的诱因(例子可见 Mallat 和 Hwang(1991))。如果对条件式(9.2.3)稍作修改,则可避免这些问题的出现。更明确地(仍设紧支集的 $\psi\in C^1$),有如下的定理。

定理 9.2.2 对 $\varepsilon>0$,定义

$$S(x_0,j;\varepsilon)=\{k\in\mathbb{Z};\mathrm{Supp}(\psi_{j,k})\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\neq\phi\}$$

如果对某个 $\varepsilon>0$ 和某个 α, $0<\alpha<1$,有

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{k\in S(x_0,j,\varepsilon)}|\langle f,\psi_{-j,k}\rangle|=O(2^{-j(1/2+\alpha)})$$

则 f 在 x_0 关于指数 α 是 Hölder 连续的。

证明:

1. 在$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$中任选一点 x,因为不论 $\psi_{j,k}(x)=0$ 还是 $\psi_{j,k}(x_0)\neq0$ 都蕴涵着 $k\in S(x_0,j;\varepsilon)$,有

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{j,k}\langle f,\psi_{j,k}\rangle[\psi_{j,k}(x)-\psi_{j,k}(x_0)]$$

$$= \sum_j \sum_{k \in S(x_0, j; \varepsilon)} \langle f, \psi_{j,k} \rangle [\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)]$$

从而

$$|f(x) - f(x_0)| = \sum_j C_1 2^{j(1/2+\alpha)} \sum_{k \in S(x_0, j; \varepsilon)} |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)|$$

2. 因为 ψ 具有紧支集,所以使 $\psi_{j,k}(x) \neq 0$ 或者 $\psi_{j,k}(x_0) \neq 0$ 的 k 的个数对 j 是一致有界的。其界为 2|Support(ψ)|。因此

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in S(x_0, j; \varepsilon)} |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)| \\ &\leqslant C_2 \max |\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}(x_0)| \\ &\leqslant C_2 2^{-j/2} \max_k |\psi(2^{-j}x - k) - \psi(2^{-j}x_0 - k)| \end{aligned}$$

因 ψ 是有界的且是 C^1 的

$$|\psi(2^{-j}x - k) - \psi(2^{-j}x_0 - k)| \leqslant C_3 \min(1, 2^{-j}|x - x_0|)$$

3. 现选 j_0 使得 $2^{j_0} \leqslant |x - x_0| \leqslant 2^{j_0+1}$,则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant C_1 C_2 C_3 \left[\sum_{j=-\infty}^{j_0} 2^{\alpha j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} 2^{\alpha j - j} |x - x_0| \right] \\ &\leqslant C_4 [2^{\alpha j_0} + 2^{(\alpha-1)j_0} |x - x_0|] \\ &\leqslant C_5 |x - x_0|^{\alpha} \end{aligned}$$

注意:

(1) 当然,对空间 $C^{\alpha}, \alpha > 1$ 可以证明相似的定理。

(2) 如果 $\alpha = 1$(或者更一般地,$\alpha \in N$),那么以上证明的最后一步不再起作用,因为第一个序列将不收敛。这就是对整数 α 不得不更加谨慎小心的原因,也是 Zygmund 类加入进来的原因。

(3) 如果 ψ 有无限支撑,且 ψ 与 ψ' 在 ∞ 处有好的衰减性,定理 9.2.1 和定理 9.2.2 也是成立的(请看 Jaffard(1989b))。而 ψ 具有紧支集使得估计更为简单。

因此,可以借助于小波系数研究局部正则性。然而实际上必须小心:可能需要很大的 j 的值才能可靠地确定式(9.2.5)中的 α。如下的例子是一个例证。取

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-|x-a|} & x \leqslant a - 1 \\ e^{-|x-a|} & a - 1 \leqslant x \leqslant a + 1 \\ e^{-|x-a|}[(x - a - 1)^2 + 1] & x > a + 1 \end{cases}$$

图 9.1 给出了这个函数当 $a=0$ 时的图形。此函数分别在 $x=a-1,a,a+1$ 处有 Hölder 指数 0,1,2,在其他地方是 C^∞ 的。那么在 $x_0=a-1,a,a+1$ 这三个点的每一点处,可以计算 $A_j=\max\{|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|;x_0\in\mathrm{supp}(\psi_{j,k})\}$,并作出 $\lg A_j/\lg 2$ 的图形。如果 $a=0$,那么这些图形相当精确地排列在斜率分别为 1/2,3/2 和 5/2

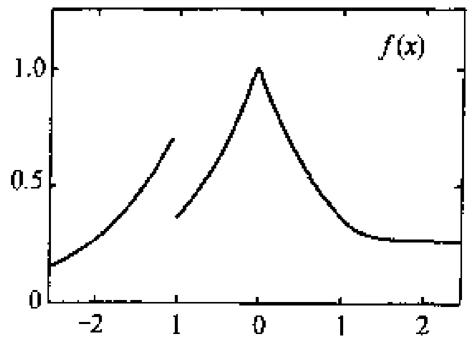


图 9.1 函数 f,除了在 $x=-1,0,1$ 处分别使 f,f',f'' 不连续外,处处是 C^∞

的直线上,可得到关于 α 的好的估计。但是,标准正交小波的分解不是平移不变的,而且对于小波基,二进有理数,尤其是 0,关于局部化中心的二进格点 $\{2^{-j}k,j,k,\in Z\}$ 扮演了一个很特殊的角色。选择不同的 a 值以证实这一点:对 $a=1/128$,我们有很不同的 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$,但 $\lg A_j/\lg 2$ 的图形仍为一个适当的线状排列,对 α 也有好的估计;对无理数 a,线状排列更不显著,相应确定的 α 也更不精确。所有这些在图 9.2 中都给出了图例说明,关于 $x_0=a-1,a,a+1$ 以及三个选择 $a=0,1/128$,和 $\sqrt{2}-11/8$(我们减去 11/8 以得到接近于 0 的 a,是为编制程序的方便)。图 9.2 显示出 $\lg A_j/\lg 2$ 的图形为 j 的一个函数。为作此图,$\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 的值的估算是对于恰当的 k 值及从 3 到 10 的示值进行的(注意:这意味着为了使关于 $j=10$ 积分有合理的精确性,f 本身必须作 2^{-17} 的采样)。对 $a=0$,在 $x_0=-1,0,1$ 这三处,8 个点都呈优美的线状排列,而且对 $\alpha+1/2$ 的估计精确到 1.5% 以下。对 $a=1/128$,在更粗的分解尺度上这些点也不成一线,但是如果仅从最好的四个分解点来估计 $\alpha+1/2$,那么估计仍精确到 2% 以内。当选择无理数 $a=\sqrt{2}-11/8$,从 $a-1$ 处图形的间断性可以看出图形不成一直线;在 a 处(这里 f 是 Lipschitz 的),对 $\alpha+1/2$ 的估计失常到 13%(饶有兴趣的是,如果删除尺度为 10 的点,估计将好得多);在 $a+1$(这里 f' 是 Lipschitz 的),估计精度到 2.5% 以内。此例说明了为确定一个函数的局部正则性,使用非常冗余的小波族更为有利,这里平移的可变性更不显著(离散情形)或没有(连续情形)(请看 Hoschneider 和 Tchamitchian (1990),Mallat 和 Huang(1992))。将非常冗余的小波族用于刻划局部正则性的另一个原因是:仅仅是 ψ 的消失矩的数目限定了能被特征刻划的最大正则性,而 ψ

自身的正则性未起任何作用(见 2.9 节)。反之如果使用标准正交基,通过选择 $f=\psi$ 可以阐明能被刻划的最大局部正则性必定会受到 ψ 自身的正则性的限制。关于这个选择实际上我们有 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle=0$,对一切 $j>0$ 及一切 k 成立,从而使用标准正交小波基时,如 $\psi\in C^r$,只能希望能被刻划的正则性最大到 $C^{r-\varepsilon}$。

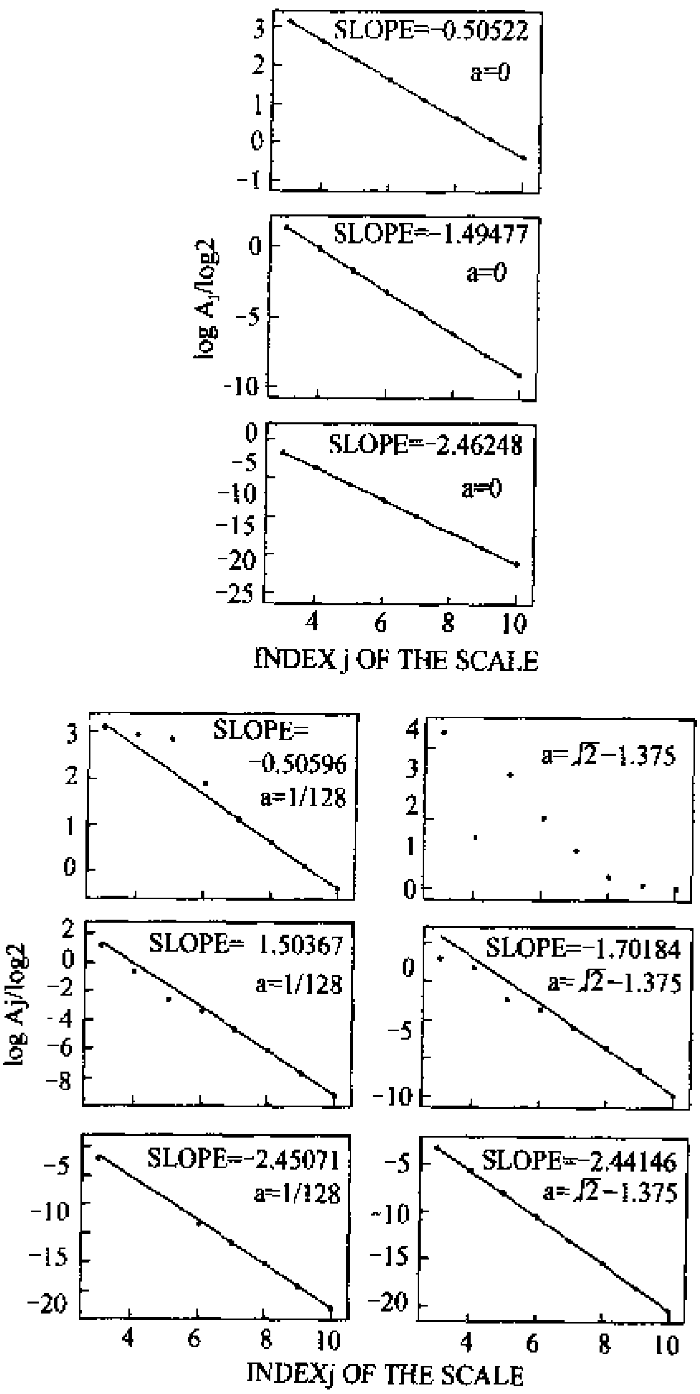


图 9.2 通过对不同的 a 值计算 $\lg A_j/\lg 2$ 得出的函数 $f(x-a)$(见图 9.1)在 $a-1$(顶部),a(中间),$a+1$(底部)处 Hölder 指数的估计值(此图为 M. Nitgsch 所提供,在此向她表示感谢)

9.3 $L^1[(0,1)]$中的小波

由于空间 L^1 没有无条件基,小波也不能提供。但在某种意义上,小波仍然胜过傅里叶分析。我们将通过比较 $L^1[(0,1)]$—函数的小波展开式与傅里叶级数展开式来说明这一点。但是首先必须引进"周期小波"。

给定一个多分辨分析,其尺度函数 ϕ 与小波 ψ 都有恰当的衰减性(即 $|\phi(x)|$, $|\psi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$),定义

$$\phi_{j,k}^{\mathrm{per}}(x)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\phi_{j,k}(x+l),\quad \psi_{j,k}^{\mathrm{per}}(x)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\psi_{j,k}(x+l)$$

和

$$V_j^{\mathrm{per}}=\overline{\mathrm{Span}\{\phi_{j,k}^{\mathrm{per}};k\in\mathbf{Z}\}},\quad W_j^{\mathrm{per}}=\overline{\mathrm{Span}\{\psi_{j,k}^{\mathrm{per}};k\in\mathbf{Z}\}}$$

因为 $\sum_{l\in\mathbf{Z}}\phi(x+l)=1$,① 有:对 $j\geqslant 0$, $\phi_{j,k}^{\mathrm{per}}(x)=2^{-j/2}\sum_l\phi(2^{-j}x-k+2^{-j}l)=2^{j/2}$,这样就使得对所有 $j\geqslant 0$, V_j^{per} 都同于只包含常值函数的一维空间。类似地,因为 $\sum_l\psi(x+l/2)=0$,②所以当 $j\geqslant 1$, $W_j^{\mathrm{per}}=\{0\}$。因此,可以把注意力放到 $j\leqslant 0$ 的 V_j^{per} 和 W_j^{per} 上。显然 $V_j^{\mathrm{per}}, W_j^{\mathrm{per}}\subset V_{j-1}^{\mathrm{per}}$,这是从非周期化空间继承而来的性质。此外 W_j^{per},仍然正交于 V_j^{per},这是因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x\psi_{j,k}^{\mathrm{per}}(x)\phi_{j,k'}^{\mathrm{per}}(x)\\
&=\sum_{l,l'\in\mathbf{Z}}2^{-j}\int_0^1\mathrm{d}x\psi(2^{-j}x+2^{-j}l-k)\,\overline{\phi(2^{-j}x+2^{-j}l'-k')}\\
&=\sum_{l,l'\in\mathbf{Z}}2^{|j|}\int_{l'}^{l'+1}\mathrm{d}y\psi(2^{|j|}y+2^{|j|}(l-l')-k)\,\overline{\phi(2^{|j|}y-k')}\\
&=\sum_{r\in\mathbf{Z}}\langle\psi_{j,k+2^{|j|}r},\phi_{j,k'}\rangle=0
\end{aligned}$$

从而有如在非周期化情形,有 $V_{j-1}^{\mathrm{per}}=V_j^{\mathrm{per}}\oplus W_j^{\mathrm{per}}$。空间 $V_j^{\mathrm{per}}, W_j^{\mathrm{per}}$ 均为有限维的:因为对 $m\in\mathbf{Z}$,有 $\phi_{j,k+m2^{|j|}}=\phi_{j,k}$ 且 ψ 也是相同的结果,所以 V_j^{per} 和 W_j^{per} 都是由 $k=0,1,\cdots,2^{|j|}-1$ 时的 $2^{|j|}$ 个函数张成的空间。而且这 $2^{|j|}$ 个函数是标准正交的,例如在 W_j^{per} 中有,对 $0\leqslant k,k'\leqslant 2^{|j|}-1$

$$\langle\psi_{j,k}^{\mathrm{per}},\psi_{j,k'}^{\mathrm{per}}\rangle=\sum_{r\in\mathbf{Z}}\langle\psi_{j,k+2^{|j|}r},\psi_{j,k'}\rangle=\delta_{k,k'}$$

因之,有多分辨空间的一个梯级

$$V_0^{\mathrm{per}}\subset V_{-1}^{\mathrm{per}}\subset V_{-2}^{\mathrm{per}}\subset\cdots$$

---

① 见本章末注 6。

② 见本章末注 7。

这个梯级依次具有正交补：W_0^{per}（V_{-1}^{per} 中 V_0^{per} 的）W_{-1}^{per}（V_{-2}^{per} 中 V_{-1}^{per} 的），而且 $\{\phi_{j,k};k=0,1,\cdots,2^{|j|}-1\}$ 为 V_j^{per} 中的标准正交基，$\{\psi_{j,k};k=0,1,\cdots,2^{|j|}-1\}$ 为 W_j^{per} 中标准正交基。因为 $\overline{\bigcup_{j\in-\mathbf{Z}}V_j^{per}}=L^2([0,1])$（这又是从相应的非周期化的形式得到的），所以 $\{\psi_{0,0}^{per}\}\cup\{\psi_{j,k}^{per};-j\in\mathbb{N},k=0,\cdots,2^{|j|}-1\}$ 中的函数构成了 $L^2([0,1])$ 的一个标准正交基。我们将给这个基重新作如下的记号：

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= 1 = \phi_{0,0}^{per}(x)\\
g_1(x) &= \psi_{0,0}^{per}(x)\\
g_2(x) &= \psi_{-1,0}^{per}(x)\\
g_3(x) &= \psi_{-1,1}^{per}(x) = \psi_{-1,0}^{per}\left(x-\frac{1}{2}\right) = g_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\\
g_4(x) &= \psi_{-2,0}^{per}(x)\\
&\vdots\\
g_{2^j}(x) &= \psi_{-j,0}^{per}(x)\\
&\vdots\\
g_{2^j+k}(x) &= \psi_{-j,k}^{per}(x) = g_{2^j}(x-k2^{-j}) \qquad \text{对 } 0\leqslant k\leqslant 2^j-1\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

这个基具有如下的性质。

定理 9.3.1 如果 f 是一个连续的周期为的周期函数，那么存在 $\alpha_n\in C$，使得

$$\left\|f-\sum_{n=0}^{N}\alpha_n g_n\right\|\to 0 \qquad \text{当 } N\to\infty \tag{9.3.1}$$

证明：

1. 因 g_n 是标准正交的，必有 $\alpha_n=\langle f,g_n\rangle$。定义 S_N 如下

$$S_N f=\sum_{n=0}^{N}\langle f,g_n\rangle g_n$$

首先，证明 S_N 是一致有界的，即存在与 f 和 N 无关的 C，使得

$$\|S_N f\|_{L^\infty}\leqslant C\|f\|_{L^\infty} \tag{9.3.2}$$

2. 如果 $N=2^j$，则 $S_{2^j}=\mathrm{Proj}\,V_{-j}^{per}$；因此

$$(S_{2^j}f)(x)=\sum_{k=0}^{2^{j}-1}\langle f,\phi_{-j,k}^{per}\rangle\phi_{-j,k}^{per}(x)=\int_0^1 \mathrm{d}yK_j(x,y)f(y)$$

其中

$$K_j(x)=\sum_{k=0}^{2^{|j|}-1}\phi_{-j,k}^{per}(x)\overline{\phi_{-j,k}^{per}(y)}$$

所以

$$\|S_{2^j}f\|_{L^\infty} \leqslant \left[\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 dy\,|K_j(x,y)|\right]\|f\|_{L^\infty}$$

现在

$$\sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 dy\,|K_j(x,y)|$$

$$\leqslant \sup_{x\in[0,1]}\int_0^1 dy \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1}\sum_{l,l'\in\mathbf{Z}}|\phi_{-j,k}(x+l)|\,|\phi_{-j,k}(x+l')|$$

$$\leqslant \sup_x \int_{-\infty}^{\infty} dy \sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}} 2^j\,|\phi(2^j(x+l)-k)|\,|\phi(2^j y+k)|$$

$$\leqslant C\sup_x \sum_{k=0}^{2^{|j|}-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}}|\phi(x'+2^j l-k)|$$

$$\leqslant C\sup_x \sum_{m\in\mathbf{Z}}|\phi(x'+m)|$$

而且如果$|\phi(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$,这是一致有界的,即当 $N=2^j$ 时,式(9.3.2)成立。

3. 如果 $N=2^j+m, 0\leqslant m\leqslant 2^j-1$,则

$$(S_N f)(x) = (S_{2^j}f)(x) + \sum_{k=0}^{m}\langle f,\psi^{\text{per}}_{-j,k}\rangle\psi^{\text{per}}_{-j,k}(x)$$

类似于第 2 点的精确估计可证明第二个和式的 L^∞ – 范数关于 j 也是一致有界的,其界为 $C\|f\|_{L^\infty}$。这样就对一切 N 证明了式(9.3.2)。

4. 现取 $f\in E=\bigcup_{j\in -N}V^{\text{per}}_j$,则对某个 $j>0, f\in V^{\text{per}}_{-j}$,使得对 $j'\geqslant J, \langle f,\psi^{\text{per}}_{-j',k}\rangle=0$,即 $l\geqslant 2^J, \langle f,g_l\rangle=0$,故如果 $N\geqslant 2^J$,则 $f=S_N f$,式(9.3.1)显然成立。因为 E 在 $C(T)$中稠密,$C(T)$为赋$\|\cdot\|_\infty$范数的连续周期函数空间。从而定理得证。 ■

由对偶性得到关于 $L^1[(0,1)]$的一个类似的定理。

定理 9.3.2 如果 $f\in L^1[(0,1)]$,则

$$\left\|f-\sum_{n=0}^{N}\langle f,g_n\rangle g_n\right\|_{L^1}\to 0 \qquad 当 N\to\infty$$

证明:利用 $L^1[(0,1)]$包含 $C(T)$的对偶这一特性,即

$$\|f\|_{L^1} = \text{Sup}\{|\langle f,g\rangle|; g\text{ 连续,周期为 }1, \|g\|_{L^\infty}\leqslant 1\}$$

立即有

$$\begin{aligned}\|S_N f\|_{L^1} &= \text{Sup}\{|\langle S_N f,g\rangle|; g\text{ 连续,周期为 }1, \|g\|_{L^\infty}\leqslant 1\}\\ &= \text{Sup}\{|\langle f,S_N g\rangle|; g\text{ 连续,周期为 }1, \|g\|_{L^\infty}\leqslant 1\}\\ &\leqslant C\|f\|_{L^1} \qquad (9.3.3)\end{aligned}$$

(由一致界式(9.3.2)即 $|\langle f,h\rangle|\leqslant\|f\|_{L^1},\|h\|_{L^\infty}$)

因为 $E=\bigcup_{j\in-N}V_j^{\text{per}}$ 也在 $L^1[(0,1)]$ 中稠密,式(9.3.3)的一致界足以证明本定理。 ■

定理 9.3.1 和定理 9.3.2 的引人人胜之处是傅里叶级数没有这样的性质。例如,为了使得 f 的傅里叶级数一致收敛到 f 本身,需要强加比仅仅连续更多的条件 ($f\in C^1$)。

注意在定理 9.3.1 和定理 9.3.2 中 g_n 的次序是最重要的,因为得到的仅为 Schauder 基,而不是一个无条件基。

9.4 小波展开与傅里叶级数的比较

关于这两种展开方法,傅里叶级数和小波展开的饶有趣味的差异在于它们的"完全"级数与其"缺项"级数的对比之间有不同的行为表现。从一个简单的引理开始,该引理以及本小节整个部分都借助于 Meyer(1990)。

引理 9.4.1 假定 f 是[0,1]上一个函数,在 $x_0\in(0,1)$ 可微。与上述引进的一样,让 $\{g_m\}$ 为 $L^2[(0,1)]$ 的标准正交基且假设相应小波 ψ 满足 $\int dx\,x\psi(x)=0$,则展式 $f=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m g_m$ 中的 α_m 当 m 限制在集 $m=2^j+k$ 且 $|2^{-j}k-x_0|\leqslant 2^{-j}$ 上时,将满足 $\alpha_m=o(m^{-3/2})$,对 $m\to\infty$。

证明:

1. 为简单起见,不妨设 ψ 具有紧支撑,且 $\text{Support}\psi\subset[-L,L]$。这意味着对充分大的 j,当 $|2^{-j}k-x_0|\leqslant 2^{-j}$ 时,$\psi_{-j,k}^{\text{per}}(x)=\psi_{-j,k}(x)$。(又:这不是关键,对非紧支撑的 ψ,只需在下面的估计中仔细一点就可以了)。

2. 对 $m=2^j+k$,$\alpha_m=\int dx f(x)\overline{\psi_{-j,k}(x)}$,这里

$$\begin{aligned}\text{Support}\psi_{-j,k}&\subset[2^{-j}(k-L),2^{-j}(k+L)]\\&\subset[2^{-j}(x_0-L-1),2^{-j}(x_0+L+1)]\\&\quad(\text{因 }|2^{-j}k-x_0|\leqslant 2^{-j})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\alpha_m&=\int_{|x-x_0|\leqslant 2^{-j}(L+1)}dx f(x)\overline{\psi_{-j,k}(x)}\\&=\int_{|x-x_0|\leqslant 2^{-j}(L+1)}dx\,[f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x)]\cdot 2^{j/2}4(2^jx-k)\\&=o(2^{j/2}\cdot 2^{-2j})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(用 } f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x) \\
&= o(x-x_0) \text{ 且作变量替换 } y=2^j(x-x_0)) \\
&= o(2^{-3j/2}) = o(m^{-3/2}) \\
&\qquad (\text{因 } 2^j \leqslant m \leqslant 2^{j+1}) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

此引理有如下的推论。

推论 9.4.2 如果对一切 m, $C_1 m^{-3/2} \leqslant |\alpha_m| \leqslant C_2 m^{-3/2}$，其中 $C_1>0$, $C_2<\infty$，那么对所有的 $\alpha<1$, $\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m g_m$ 均在 C^α 中，但是处处不可微的。

证明：由定理 9.2.2 及引理 9.4.1 立得。 ■

现在来构造一个很特别的函数。令 $\alpha_m=\alpha_{2^j+k}=\beta_j$，与 k 无关，则

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m g_m &= \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\sum_{k=0}^{2^j-1} g_{2^j+k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{l\in\mathbf{Z}} 2^{j/2}\psi(2^j x+2^j l-k) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}2^{j/2}\beta_j\sum_{m}\psi(2^j x-m) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}2^{j/2}\beta_j F(2^j x)
\end{aligned}$$

这里 $F(x)=\sum_m\psi(x-m)$ 是一个周期函数，有

$$F(x) = \sum_n F_n e^{-2\pi i n x}$$

其中

$$F_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx F(x)e^{2\pi i n x} = \sqrt{2\pi}\hat{\psi}(2\pi n)$$

在特殊情形 $\psi=\psi_{\text{Meyer}}$（请参看第 4 章和第 5 章），Support$\hat{\psi}=\{\xi;\frac{2\pi}{3}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{4\pi}{3}\}$，使得仅当 $n=\pm1$ 时，$\hat{\psi}(2\pi n)\neq0$。此外，$\hat{\psi}(-2\pi)=\hat{\psi}(2\pi)$。所以 $F(x)=A\cos(2\pi x)$，而且

$$\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m g_m(x) = A\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j 2^{j/2}\cos(2^j\pi x)$$

可见左边的"完全"的小波级数有一个缺项的傅里叶展开！如果现在选择 β_j 使得 $C_1 2^{-j}\leqslant 2^{j/2}\beta_j\leqslant C_2 2^{-j}$，则可利用推论 9.4.2，得出函数处处不可微的结论。对于这个特殊情形，这个结论其实是有关缺项傅里叶级数的一个众所周知的结果：$\sum_{j=0}^{\infty}r_j\cos(\lambda_j x)$，其中 $\sum_{j=0}^{\infty}|r_j|<\infty$，但 $r_j\lambda_j \not\to 0$/定义了一个连续，但处处不可微的

函数。

另一方面，如果取一个有一个局部奇异性的，但在其他地方是 C^∞ 的函数，例如像 $f(x)=|\sin\pi x|^{-\alpha}$，其中 $0<\alpha<1$。那么它的小波展开将会或多或少地缺项（当 $-j\to\infty$ 时，所有的系数除了 $2^{-|j|}k$ 靠近于奇点的少数系数外衰减得非常快）。然而其傅里叶级数是“完全”的：$f_n=r_\alpha n^{-1+\alpha}+O(n^{-3+\alpha})$，其中 $r_\alpha\neq 0$，奇点的影响渗透到所有的傅里叶系数中。

注：

1. Calderon－Zygmund 算子有很多不同的定义。在 Meyer(1990, Vol2)的开头讨论了这些不同的定义以及它们的发展。注意在对角线 $x=y$ 上算子的界是无限的；因此，一般在对角线上其核 K 将是奇异的。我们应当对对角线上的情况倍加小心。一个方法是要求 T 是从 D 到 D' 有界的（D 是一切有紧支撑的 C^∞ 函数的集合，D' 是其对偶，一种(Non－tempered)广义函数空间)，并且如果 $x\notin \mathrm{support}(f)$，则 $(Tf)(x)=\int dy k(x,y)f(y)$。从而 K 不完全决定 T：算子 $(T_1f)(x)=(Tf)(x)+m(x)f(x)$，其中 $m\in L^\infty(\mathbb{R})$，有相同的积分核。请参看 Meyer(1990, Vol2)所给出的一个更为清楚和广泛的讨论。

2. 注意 $\|\cdot\|_{L^1_{\text{weak}}}$ 是范数记号的滥用，如，由 $\||x-1|^{-1}+|x+1|^{-1}\|_{L^1_{\text{weak}}}\geqslant \||x-1|^{-1}\|_{L^1_{\text{weak}}}+\||x+1|^{-1}\|_{L^1_{\text{weak}}}$，就知道，$\|\cdot\|_{L^1_{\text{weak}}}$ 不满足三角不等式，因此 $\|\cdot\|_{L^1_{\text{weak}}}$ 不是一个“真正”的范数。

3. 如果省略“weak”，那么此定理可以认为是 Riesz－Thorin 定理；此时其对应为 $k=C_1^t C_2^{1-t}$ 且不再需要限制 $q_1\leqslant p_1, q_2\leqslant p_2$。

4. $$\sum_k(1+|a-k|)^{-1-\epsilon}(1+|b-k|)^{-1-\epsilon}\leqslant\sum_k(1+|a-k|)^{-1-\epsilon}$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant a'\leqslant 1}\sum_k(1+|a'-k|)^{-1-\epsilon}\leqslant 2\sum_{l=0}^{\infty}(1+l)^{-1-\epsilon}<\infty$$

5. 不失一般性，可以假定 $a\geqslant 0$，找 k 使得 $k\leqslant a\leqslant k+1$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_l[(1+|a-l|)(1+|a+l|)]^{-1-\epsilon}\\
\leqslant&\sum_{l=-\infty}^{-k-1}[(1+(k+|l|))(1+(|l|-1-k))]^{-1-\epsilon}\\
&+\sum_{l=-k}^{k}[(1+(k-l))(1+(1+(k+l))]^{-1-\epsilon}\\
&+\sum_{l=k+1}^{\infty}[(1+(l-k-1))(1+(k+l))]^{-1-\epsilon}\\
\leqslant&2\sum_{l=0}^{k}(1+(k-l))^{-1-\epsilon}(1+2k)^{-1-\epsilon}\\
&+2\sum_{l=k+1}^{\infty}[1+(l-k-1)]^{-1-\epsilon}(1+2k)^{-1-\epsilon}\\
\leqslant&C(1+|a|)^{-1-\epsilon}
\end{aligned}$$

6. 在第 5 章的注释 9 可以看到 $\sum_l \phi(x+l) =$ 常数，又因为$\int_{-\infty}^{\infty} dx\phi(x) = 1$，这个常数必为 1。

7. $$\begin{aligned}\sum_l \psi(x+l/2) &= \sum_l \sum_n (-1)^n h_{-n+1}\phi(2x+l-n) \\ &= \sum_{k,m} (-1)^{m+1} h_m \phi(2x+k) \qquad (\text{其中 } k = l-n, m = -n+1) \\ &= 0 \qquad (\text{因} \sum h_{2m} = \sum h_{2m+1})\end{aligned}$$

8. 现在，读者已经看到了如此多的这种类型的估计的例子。因此我把引理 9.4.1 对于非紧支撑但有好的衰减的 ψ 的证明留作一个练习。

9. Meyer 的小波是没有紧支撑的，而引理 9.4.1 的证明又用到了 ψ 有紧支撑的条件。此时结论的真实性可以参看上面的注释 8。

第 10 章　正交小波基通论及其技巧

本章包含一些对前几章的概括和推广，本章的讨论不如前几章详细，其中一些问题留在发展中，我相信即使在两年后重写这些内容也将会有很大的改变。这些内容包括：1. 伸缩因子为 2 的多维小波的张量积多分辨分析或不可分算法；2. 伸缩因子为小数或整数，但不是 2 的正交小波基；3. 采用分段方法的频率分析（其实是 Coifman 和 Meyer 的小波包的特例）；4. 在一个区间上的小波基。

10.1　伸缩因子为 2 的多维小波基

为简便起见，这里仅考虑二维的情形，高维的情形类似。通过 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的标准正交小波基 $\psi_{j,k}=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-k)$ 构造 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的标准正交基的一个基本方法是直接取一维情形的两组基的张量积

$$\psi_{j_1,k_1;j_2,k_2}(x_1,x_2)=\psi_{j_1,k_1}(x_1)\psi_{j_2,k_2}(x_2)\{\psi_{j_1,k_1;j_2,k_2};j_1,k_1,j_2,k_2\in\mathbf{Z}\}$$

是小波且是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的标准正交基。在这种基中，变量 x_1 和 x_2 的伸缩是独立的。

存在另一种在 某些应用中很感兴趣的构造方法，其正交小波基中的伸缩系数同时控制着两个变量。这种情形的小波基常被视为两个一维多分辨分析的张量积而不仅是对应一维小波基的张量积。确切地，定义空间 $\{V_j,j\in\mathbf{Z}$ 为

$$\{V=V_0\otimes V_0=\overline{\mathrm{span}\{F(x,y)=f(x)g(x);f,g\in V_0\}}$$

$$F\in V_j\Leftrightarrow F(2^j\cdot,2^j\cdot)\in V_0$$

于是 $\{V_j$ 构成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 的一个多分辨分析的梯形子空间序列，满足

$$\cdots\{V_2\subset\{V_1\subset\{V_0\subset\{V_{-1}\subset\{V_{-2}\cdots$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}\{V_j=\{0\};\ \bigcup_{j\in\mathbf{Z}}\{V_j=L^2(\mathbb{R}^2)$$

由于 $\phi(\cdot-n),n\in\mathbf{Z}$ 构成 V_0 的一组标准正交基，则积函数

$$\Phi_{0;n_1,n_2}(x,y)=\phi(x-n_1)\phi(y-n_2),\quad n_1,n_2\in\mathbf{Z}$$

构成 V_0 的一组标准正交基，它是由单个函数 Φ 经 Z^2 平移得到的。同理

$$\Phi_{j;n_1,n_2}(x,y)=\phi_{j;n_1}(x)\phi_{j;n_2}(y)$$

$$=2^{-j}\phi(2^{-j}x-n_1,2^{-j}y-n_2),\quad n_1,n_2\in\mathbf{Z}$$

构成 V_j 的一组标准正交基。与一维的情形一样，定义 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的补空

间，则

$$\begin{aligned} V_{j-1} &= V_{j-1} \otimes V_{j-1} = (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j) \\ &= V_j \otimes V_j \oplus [(W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j)] \\ &= V_j \oplus W_j \end{aligned}$$

于是 W_j 由三部分构成，各部分的标准正交基分别为 $\psi_{j,n_1}(x)\phi_{j,n_2}(y)$（$W_j \otimes V_j$ 之基），$\phi_{j,n_1}(x)\psi_{j,n_2}(y)$（$V_j \otimes W_j$ 之基）和 $\psi_{j,n_1}(x)\psi_{j,n_2}(y)$（$W_j \otimes W_j$ 之基）。于是可定义三组小波

$$\begin{cases} \Psi^{h}(x,y) = \phi(x)\psi(y) \\ \Psi^{v}(x,y) = \psi(x)\phi(y) \\ \Psi^{d}(x,y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases}$$

（上角 h,v,d 分别代表水平 horizontal；垂直 vertical 和对角 diagonal。）

则

$$\Psi^{\lambda}_{j;n_1,n_2}; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad \lambda = h, v \text{ 或 } d$$

是 W_j 的标准正交基，且

$$\Psi^{\lambda}_{j;n}; \quad j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^2, \quad \lambda = h, v \text{ 或 } d$$

是 $\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j} = L^2(\mathbb{R}^2)$ 的标准正交基。

在这一构造中如果 ϕ 和 ψ 是紧支撑的，则显然 Φ 和 Ψ^{λ} 也是紧支撑的。此外，正如 5.6 节中所说，基于紧支集小波基上分解的带通滤波分解在二维情形也是可以实现的。比如，滤波可根据水平垂直图像分别在行和列上进行。与图 5.7 相似的二维情形示于图 10.1。

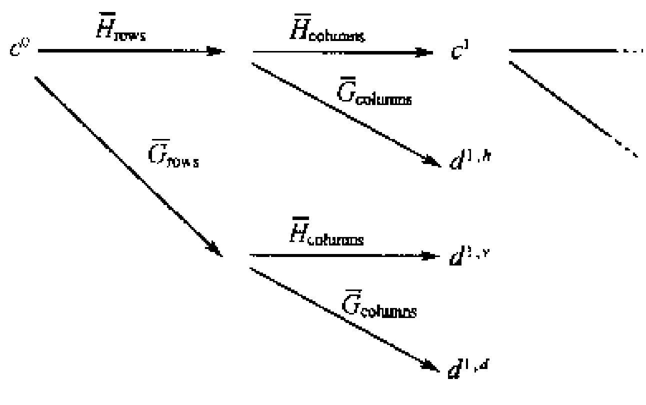


图 10.1　二维小波分解在行和列的反复低、高通滤波

这里 $d^{1,\lambda}$ 对应于小波系数 $\langle F, \Psi^{\lambda}_{1,n}\rangle$，其中 $F = \sum_n C^0_n \Phi_{0,n}$。在一个图像中，水平边体现在 $d^{1,h}$，垂直边体现在 $d^{1,v}$，对角边体现在 $d^{1,d}$，如下图例所示。注意到，当原图 c^0 为 $N \times N$ 阶时，每个 $d^{1,\lambda}$ 含 $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ 个元（不考虑边界影响，见 10.6 节），并可由大小为原图的 1/4 的图像表示。这一方法示于图 10.2 中。当然，如果

需要更多分辨分析层,还可对 C^2 进行分解。图 10.3 将这一方法用于一实际图像,有三层多分辨分析。

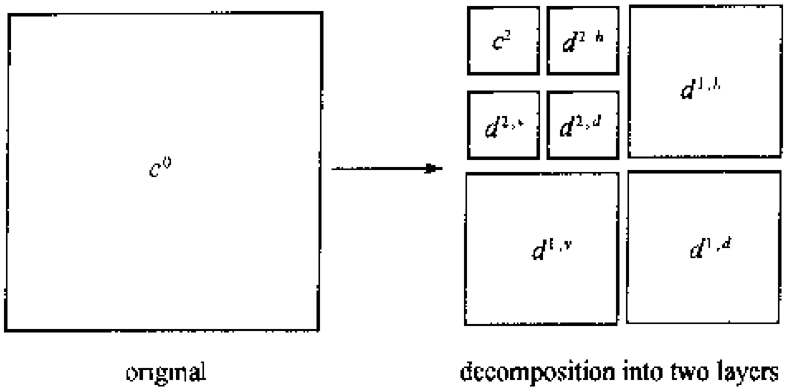


图 10.2　图 10.3 中二维小波分解的图形表示

这是有张量积结构的二维算法,也可以考虑从一般的多分辨分析出发(V_j 要满足式 5.1.1～式 5.1.6),其中 V_0 不是某一个一维的 V_0 空间的张量积[①]。有些(但非全部)在一维情形有效的构造在这里也可用。更确切地说,V_j 的多分辨结构说明相应的尺度函数 Φ 满足

$$\Phi(x,y)=\sum_{n_1,n_2} h_{n_1,n_2}\Phi(2x-n_1,2y-n_2) \tag{10.1.1}$$

其中 $(h_n)_{n\in\mathbf{Z}^2}$ 为某一序列。$\Phi_{0,n}$ 的标准正交性要求三角级数

$$m_0(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{n_1,n_2} h_{n_1,n_2}\mathrm{e}^{-i(n_1\xi+n_2\zeta)} \tag{10.1.2}$$

满足

$$\begin{aligned}&|m_0(\xi,\zeta)|^2+|m_0(\xi+\pi,\zeta)|^2\\&+|m_0(\xi,\zeta+\pi)|^2+|m_0(\xi+\pi,\zeta+\pi)|^2=1\end{aligned} \tag{10.1.3}$$

为了构造与此多分辨分析法相应的标准正交小波基,必须在 V_{-1} 中找到三个垂直于 V_0 的小波函数 Ψ^1、Ψ^2、Ψ^3,它们的整数平移所张成的子空间要相互正交;此外 $\Psi^\lambda(\cdot-n)$,对每个固定的 λ 还需是标准正交的。于是

$$\hat{\Psi}^\lambda(\xi,\zeta)=m_\lambda(\xi/2,\zeta/2)\hat{\Phi}(\xi/2,\zeta/2)$$

其中 m_1、m_2、m_3 应使

$$\begin{bmatrix} m_0(\xi,\zeta) & m_1(\xi,\zeta) & m_2(\xi,\zeta) & m_3(\xi,\zeta)\\ m_0(\xi+\pi,\zeta) & m_1(\xi+\pi,\zeta) & m_2(\xi+\pi,\zeta) & m_3(\xi+\pi,\zeta)\\ m_0(\xi,\zeta+\pi) & m_1(\xi,\zeta+\pi) & m_2(\xi,\zeta+\pi) & m_3(\xi,\zeta+\pi)\\ m_0(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_1(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_2(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_3(\xi+\pi,\zeta+\pi)\end{bmatrix} \tag{10.1.4}$$

① 见本章末注 1。

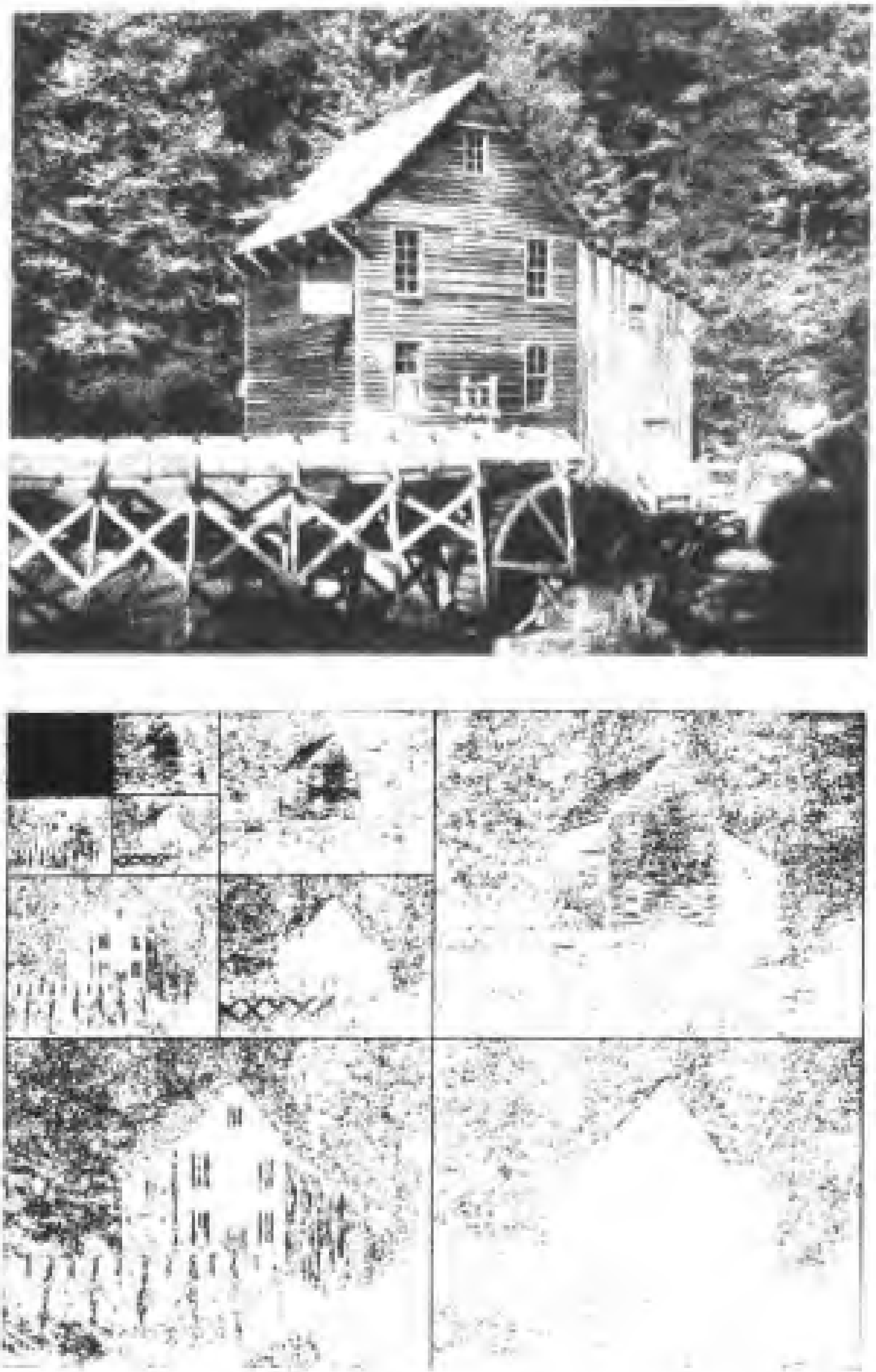


图 10.3　一个实际图像及其在三层多分辨中的小波分解，从小波分量中容易看出 $d^{1,h}$、$d^{1,v}$、$d^{1,d}$分别侧重于垂直、水平和对角边。本图中，经 C^3 处理使其在 $d^{j,\lambda}$细节更加明显(M. Barlaud 提供)

成为酉矩阵。在这一条件下的分析与 5.1 节中一维情形的分析完全类似，见 Meyer(1990, III.4 节)①。

注意：要构造的小波数目可由一个简单方法得出。比如，对二维情形，V_0 是由单个函数 $\Phi(x,y)$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 平移下生成的；V_{-1} 是由 $\Phi(2x,2y)$ 在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$ 平移下生成的，或者等价地，由 $\Phi(2x,2y)$、$\Phi(2x-1,2y)$、$\Phi(2x,2y-1)$、$\Phi(2x-1,2y-1)$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 平移下生成的。于是 V_{-1}"四倍于"V_0。另一方面，每个 W_0^j 是由单个函数 $\Psi^j(x,y)$ 在 $\mathbb{Z}^2$ 平移下生成的，因此与 V_0"大小相等"。因此需要三个子空间 W_0^j（于是需要三个小波 Ψ^j）构成 V_0 在 V_{-1} 中的补。这一法则看起来比较直观，但也可以用数学语言描述（并证明）它：小波函数的数目等于子群 $\mathbb{Z}^2$ 在群 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^2$ 中的不同陪集（不同于 $\mathbb{Z}^2$ 自身）的数目。

对于一般 n 维情形，这一方法需确定 2^n-1 个不同的函数，使得 $2^n\times 2^n$ 矩阵

$$U_{r,s}(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n) = m_{r-1}(\xi_1+s_1\pi,\cdots,\xi_n+s_n\pi) \qquad (10.1.5)$$

成为酉矩阵，$r=1,\cdots,2^n$，$s=(s_1,\cdots,s^n)\in\{0,1\}^n$。②

实际上，式(10.1.4)、式(10.1.5)的酉性条件要求一种微妙的平衡关系：m_1、m_2、m_3 的选取应使式(10.1.4)的第一行模为 1，这看起来不难。但同时要求这四行相互正交，而其他的三行又是第一行的平移。这种相互关系在实际中可能难以实现。通过所谓的多相分解可以首先解决它们。例如，记

$$\begin{aligned}2m_0(\xi,\zeta) &= m_{0,0}(2\xi,2\zeta) + e^{-i\xi}m_{0,1}(2\xi,2\zeta)\\ &\quad + e^{-i\zeta}m_{0,2}(2\xi,2\zeta) + e^{-i(\xi+\zeta)}m_{0,3}(2\xi,2\zeta)\end{aligned}$$

$m_{l,j}$，$j=0,\cdots,3$ 可以类似地从 m_l，$l=1,\cdots,3$ 定义出来。容易验证式(10.1.3)等价于

$$|m_{0,0}(2\xi,2\zeta)|^2 + |m_{0,1}(2\xi,2\zeta)|^2 + |m_{0,2}(2\xi,2\zeta)|^2 + |m_{0,3}(2\xi,2\zeta)|^2 = 1$$

同样地，确保式(10.1.4)酉性的其他条件可以通过 $m_{l,j}$ 表示出来。我们知道式(10.1.4)是酉的当且仅当下面的多相矩阵是酉的

$$\begin{bmatrix} m_{0,0}(\xi,\zeta) & m_{1,0}(\xi,\zeta) & m_{2,0}(\xi,\zeta) & m_{3,0}(\xi,\zeta)\\ m_{0,1}(\xi+\pi,\zeta) & m_{1,1}(\xi+\pi,\zeta) & m_{2,1}(\xi+\pi,\zeta) & m_{3,1}(\xi+\pi,\zeta)\\ m_{0,2}(\xi,\zeta+\pi) & m_{1,2}(\xi,\zeta+\pi) & m_{2,2}(\xi,\zeta+\pi) & m_{3,2}(\xi,\zeta+\pi)\\ m_{0,3}(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_{1,3}(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_{2,3}(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_{3,3}(\xi+\pi,\zeta+\pi)\end{bmatrix} \qquad (10.1.6)$$

---

① 见本章末注 2。

② 见本章末注 3。

对 n 维的情形,可类似地定义

$$2^{n/2}m_r(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\sum_{s\in\{0,1\}^n}e^{-i(s_1\xi_1,\cdots,s_n\xi_n)}m_{r,s}(2\xi_1,\cdots,2\xi_n)$$

U 的酉性等价于如下定义的多相矩阵 $\widetilde{U}$ 的酉性

$$\widetilde{U}_{r,s}(\xi_1,\cdots,\xi_n)=m_{r-1,s}(\xi_1,\cdots,\xi_n) \qquad (10.1.7)$$

这种构造归纳为如下的问题:给定 m_0(从式(10.1.1)、式(10.1.2)),能否找到 $m_1,\cdots,m_{2^n-1}$使式(10.1.6)是酉的? 如果是在二维情形而且 $m_0(\xi,\zeta)$又是实三角多项式,则甚至可以省掉多相矩阵:容易验证当选择 $m_1(\xi,\zeta)=e^{-j\xi}m_0(\xi+\pi,\zeta)$、$m_2(\xi,\zeta)=e^{-j(\xi+\zeta)}m_0(\xi,\zeta+\pi)$、$m_3(\xi,\zeta)=e^{-j\zeta}m_0(\xi+\pi,\zeta+\pi)$即可使式(10.1.4)是酉的。如果 m_0 不是实的,则情况要复杂得多。乍看起来,对一般的 n 维情形几乎是不可能的。因为式(10.1.7)是一个 $2^n\times2^n$ 矩阵:首先,需找到一些对 ξ_i 连续的单位向量(即式(10.1.7)中的第二列到最后一列)使之正交于某个单位向量(式(10.1.7)中的第一列)即与某单位球面相切。但是,众所周知除了实2维、4维、8维情形外,不存在处处非零的连续向量场与单位球面相切。式(10.1.7)的第一列并未描述一个完全的球面;而且,事实上由于它是 2^n 维空间中 n 个变量的连续函数,$2^n>n$,因此它只表达了一个测度为0的紧集。这一事实使得构造 $m_1,\cdots,m_{2^n-1}$成为可能,正如 Gröchenig 指出的那样(亦可参见 Meyer(1990) § III.6)。Grochenig 的证明不是构造性的。Vail(1992)给出了一个构造性的证明。遗憾的是,他们的构造均不能使得 Ψ^j 具有紧支集:即使 m_0 是一个三角多项式(只有有限个 $h_n\neq0$),m_j 也不一定是三角多项式。

10.2 整数伸缩因子大子2的一维标准正交小波基

作为示例,取伸缩因子为3。伸缩因子为3的多分辨分析与伸缩因子为2时同样的定义,即满足式(5.1.1)~式(5.1.6),只是式(5.1.4)改为

$$f\in V_j\Leftrightarrow f(3^j\cdot)\in V_0$$

也可以采用前面的技巧:V_0 由一个函数的平移生成,即由 $\phi(x-n)$生成;V_{-1}由 $\phi(3x-n)$生成,或等价地,由三个函数 $\phi(3x)$、$\phi(3x-1)$、$\phi(3x-2)$的整数平移生成。V_{-1}"三倍于"V_0,另有两个与 V_0"同样大小"的空间作为 V_0 之补并与 V_0 一起构成 V_{-1}:即需要两个空间 W_0^1、W_0^2,或者两个小波 ψ^1、ψ^2。

同样地引入 m_0、m_1、m_2 使

$$\hat{\phi}(\xi)=m_0(\xi/3)\hat{\phi}(\xi/3),\quad \hat{\psi}^l(\xi)=m_1(\xi/3)\hat{\phi}(\xi/3),\quad l=1,2,$$

函数系$\{\phi_{0,n},\psi_{0,n}^1,\psi_{0,n}^2;n\in\mathbf{Z}\}$,其中 $\phi_{j,n}$定义为

$$\phi_{j,n}=3^{-j/2}\phi(3^{-j}x-n)$$

($\psi_{j,n}^l$可类似地定义),它们的标准正交性要求 m_l 满足标准正交性条件,这些条件可以归结为矩阵

$$\begin{bmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & m_2(\xi) \\ m_0(\xi+\frac{2\pi}{3}) & m_1(\xi+\frac{2\pi}{3}) & m_2(\xi+\frac{2\pi}{3}) \\ m_0(\xi+\frac{4\pi}{3}) & m_1(\xi+\frac{4\pi}{3}) & m_2(\xi+\frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{10.2.1}$$

的酉性。

同样地,这个条件在去掉了行间相关性后可以改写成多相矩阵的形式。在 ASSP 文献中构造了一个满足式(10.2.1)的 m_0、m_1、m_2 的显式表示(见 Vaidyanathan(1987))。与第6章一样,问题是:这些滤波器是否对应了真正的 L^2 函数 ϕ、ψ^1、ψ^2? $\psi_{j,k}^l$是否构成标准正交基? 这些函数的正则性是什么? 从第3章我们知道,与 $m_1(0)=0=m_2(0)$相一致,ψ^1、ψ^2 必须是积分为0的。由于式(10.2.1)的第一行对所有的 ξ 其模均为1,因此 $m_0(0)=1$(这也是用以定义$\hat{\phi}(\xi)$的无穷乘积 $\prod_{j=1}^{\infty} m_0(3^{-j}\xi)$ 收敛性的要求)。式(10.2.1)的第一列的模也必须为1,这样由 $m_0(0)=1$ 可以得出 $m_0(2\pi/3)=0=m_0(4\pi/3)$,即 $m_0(\xi)$可由$(1+e^{-i\xi}+e^{-2i\xi})/3$ 整除。此外,如果还要求 ψ^1、ψ^2 光滑,则 ψ^1、ψ^2 还需要有另外一些零点。通过与前面完全类似的讨论,当 ψ^1、$\psi^2\in C^{L-1}$ 时 $m_0(\xi)$ 需能被 $[(1+e^{-i\xi}+e^{-2i\xi}/3]^L$ 整除。于是可寻求满足

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+2\pi/3)|^2+|m_0(\xi+4\pi/3)|^2=1$$

的型为 $m_0(\xi)=[(1+e^{-i\xi}+e^{-2i\xi})/3]^N\mathcal{L}(\xi)$的 $m_0(\xi)$。如果 m_0 是三角多项式,则 $L=|\mathcal{L}|^2$ 也是某一 Bezout 问题的解。最低阶的解使函数 ϕ 有任意高的正则性,但是正则指标仅以 N 的对数增长(L. Villemoes 私人通信)①。一旦 m_0 确定,m_1、m_2 也随即确定。Vaidyanathan et al (1989) 给出了一个方案。这个方案中,矩阵(10.2.1)被表示成 n 个类似矩阵的乘积,这些矩阵的元素由低阶多项式组成,而且这些因子矩阵仅需要几个参数确定②。如果乘积中某个矩阵的第一列由给定的 m_0 生成,则所有参数的值都是确定的,m_1、m_2 可由这个矩阵直接得出③。

如果取消有紧支撑的限制,则有另外的一个构造方法。在 Auscher(1989)中,有些这样的例子,其中的 ϕ 与 ψ^l 都是 C^∞函数并且有很快的衰减型性(支集是无限的)。

关于伸缩因子3的最后一点说明:已经看出 m_0 必须有因子$(1+e^{-i\xi}+e^{-2i\xi})/$

---

① 见本章末注4;

② 见本章末注5;

③ 见本章末注6。

3,这个因子在 $\xi=\pi$ 时不等于 0(这与伸缩因子为 2 时的 $(1+e^{-i\xi})/2$ 不同)。但是,如果要使 m_0 成为低通滤波,选 $m_0(\pi)=0$ 是很好的方法。为了保证这点需使 $\widetilde{L}(\pi)=0$即从 $|\widetilde{L}|^2$ 的方程的最低阶开始。

对于大一些的整数伸缩因子可作出类似的构造。对于非素数的伸缩因子 a,可以由 a 的因子为伸缩因子的构造中得出满意的 m_l,虽然不能由此得出关于伸缩因子 a 的所有解。例如,当 $a=4$ 时,可由伸缩 2 及滤波器 m_0、m_1 定义滤波器 $\widetilde{m}_0$、$\widetilde{m}_1$、$\widetilde{m}_2$、$\widetilde{m}_3$(同样是标准正交的)为

$$\widetilde{m}_0(\xi)=m_0(\xi)m_0(\xi/2),\widetilde{m}_2(\xi)=m_1(\xi)m_1(\xi/2)$$
$$\widetilde{m}_1(\xi)=m_0(\xi)m_1(\xi/2),\widetilde{m}_3(\xi)=m_1(\xi)m_0(\xi/2)$$

(由此将得出一标准正交基,这点由读者作为练习证明。容易验证,与式(10.2.1)类似的 4×4 矩阵是酉的)。由伸缩因子 4 和 2 构造出的函数 ϕ 是相同的,我们将在 10.5 节中讨论这个问题。

10.3 具有矩阵伸缩因子的多维小波基

这是 10.1 节和 10.2 节的推广:多分辨分析空间是 $L^2(\mathbb{R}^n)$的子空间,基本伸缩因子是元素为整数的矩阵 $D(D\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{Z}^n)$并且其特征值的绝对值均大于 1(这样才能向所有方向伸缩)。小波的数量也是由 $D\mathbb{Z}^n$ 的陪集所决定的。引入 $m_0,m_1,\cdots$,则标准正交条件又可以归结为由 $m_0,m_1,\cdots$构成的矩阵的酉性条件。对这种矩阵尺度情形的分析,要比伸缩因子为 2 的一维情形难得多,并且随着矩阵的不同选取会出现令人惊奇的结果。其中一个令人惊奇之处在于对 Haar 基(即选择 m_0 使其非 0 的系数全部相等)的推广在很多情况下会得到一个有分形边界得自相似集合的示性函数 ϕ 覆盖整个平面。对于二维情形,例如取 $D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$,正如 Grocheniny 和 Madych(1992)以及 Lawton 和 Resnikoff(1991)所指出的一样,我们发现 ϕ 是双生龙集(twin dragon set)上的示性函数。注意,在二维情形,如果 m_0 不是标准的(比如 $m_0(\xi,\zeta)=\frac{1}{4}(1+e^{-i\xi}+e^{-i(\xi+\zeta)}+e^{-i(\xi+2\zeta)})$),即使 $D=2Id$ 也可能产生分形块(见 Grocheniny、Madych(1992))。

对于更为复杂的 m_0(系数不全相等),关键问题是正则性。在多维情形中,ψ_j 的零矩不能导出 m_0 的可分性(因为仅知道多元多项式的零点还不能将其分解)。为了得到的$\hat{\phi}$衰减性,必须采用其他的方法。

一个有趣的特例是"五点格",即具有 $DZ^2=\{(m,n);m+n\in 2Z\}$ 的二维情形。这时只有一个另外的陪集,从而只需构造一个小波,因此可像伸缩因子为 2 的一维情形那样直接选取 m_1。于是对 m_0、m_1 的要求可归结为对下面矩阵的酉性

要求

$$\begin{bmatrix} m_0(\xi,\zeta) & m_1(\xi,\zeta) \\ m_0(\xi+\pi,\zeta+\pi) & m_1(\xi+\pi,\zeta+\pi) \end{bmatrix}$$

选

$$m_1(\xi,\zeta) = e^{-i\xi} m_0(\xi+\pi,\zeta+\pi)$$

即可。注意:任何伸缩因子为 2 的一维标准正交基都自动地为五点算法提供。对 m_0、m_1 取 $m_0(\xi,\zeta)=m_0^{\#}(\xi)$即可($m_0^{\#}$ 为一维滤波器)①。不过,也可以选择其他的 D。Cohen、Daubechies(1991)及 Kovacevic、Vetterli(1992)给出了两个选择,即 $D_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$和 $D_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$。对这两个矩阵,选取同样的 m_0 也会得出完全不同的小波基。特别地,如果由 6.4 节的"标准"一维小波滤波器 $_Nm_0$,通过上述方法得到 m_0,则当取 D_2 时 ϕ 有逐渐增大的正则性(正则指标与 N 成正比例)。而当取 D_1 时,不管 N 是多少,ϕ 至多是连续的。当然,也可以如 8.3 节一样构造两个双正交基代替一个标准正交基。Cohen 和 Daubechies(1991)及 Kovacevic 和 Vetterli(1992)讨论了选择 D_1、D_2 的其他可能性。在这种双正交的情况下,也可以从一维构造中得到滤波器。如果有一对一维的对称双正交滤波器对,且这两个滤波器均是 $\cos\xi$ 的函数,则只需将每个滤波器中的 $\cos\xi$ 以$\frac{1}{2}(\cos\xi+\cos\zeta)$代替就得到"五点"的对称双正交滤波器对②。由于这些例子的对称性,其矩阵 D_1 和 D_2 导出的 ϕ 与$\tilde{\phi}$ 是相同的。同样,对称的双正交基也可以达到任意高的正则性(见 Cohen 和 Daubechies(1991))。在图像处理方面有较多的应用,因为它与可分的(张量积)二维算法不同,对各个方向是均匀处理的:它没有特定的方向(水平的和垂直的),其水平、垂直和斜向是地位相同的,并且没有引入冗余来实现这一点。最早的五点子带滤波方法,又称消去法,但没有实际的重构(当时就连一维的重构都没找到),Vetterli(1984)对此作出了介绍。Feauveau(1990)将标准正交算法和双正交算法连接起来得到小波基。Vetterli、Kovacevic 和 Le Gall(1990)讨论了五点滤波器的完全重构在 HDTV 中的应用。Antouini、Barlaud 和 Mathieu(1991)将双正交五点分解与向量子带联系起来,得到了一些可用于图像压缩的非常好的结果。

10.4 具有非整数伸缩因子的一维标准正交小波基

对于一维情形,我们还只讨论大于 2 的整数伸缩因子③。但是,非整数的伸缩

① 见本章末注 7;

② 见本章末注 8;

③ 见本章末注 9。

因子也是可能的。由于多分辨分析框架的限制,伸缩因子必须是有理数[1]（证明见Aucher(1989))。早在1985年G.David就指出Meyer小波可以推广到伸缩因子$a=\frac{k+1}{k}$,$(k\in N,k\geqslant 1)$的情形。Aucher(1989)则包括了与任何有理数a有关的构造(见Aucher在Ruski et al(1992)上的文章)。我们以$a=3/2$来说明对伸缩因子为2的算法该作怎样的修改。仍以式(5.1.1)~式(5.1.6)定义的多分辨分析开始,只是这里的伸缩因子为$a=3/2$而不是2。得到$\phi\in V_0\subset V_{-1}=\overline{\text{span}\{\phi(\frac{3}{2}\cdot-n)\}}$满足

$$\phi(x)=\sqrt{3/2}\sum_n h_n^0\phi(\frac{3}{2}x-n)$$

(以下可以看出为何加上上标0)从而

$$\phi(x-2l)=\sqrt{3/2}\sum_n h_n^0\phi(\frac{3}{2}x-3l-n)$$

$$=\sqrt{3/2}\sum_n h_{n-3l}^0\phi(\frac{3}{2}x-n)\tag{10.4.1}$$

$\phi(\cdot-2l)$的正交性要求

$$\sum_n h_n^0\overline{h_{n-3l}^0}=\delta_{l0}\tag{10.4.2}$$

另一方面,$\phi(\cdot-2l)$属于V_0,从而$\phi(\frac{3}{2}x-n)$可以写为线形组合

$$\phi(x-1)=\sqrt{3/2}\sum_n h_n^1\phi(\frac{3}{2}x-n)\tag{10.4.3}$$

$\phi(x-2l-1)$的标准正交性及$\phi(x-2l-1)$与$\phi(x-2l)$的正交性要求

$$\sum_n h_n^1\overline{h_{n-3l}^1}=\delta_{l0}\tag{10.4.4}$$

$$\sum_n h_n^1\overline{h_{n-3l}^0}=0\tag{10.4.5}$$

这说明我们有两个m_0函数

$$m_0^0(\xi)=\sqrt{\frac{3}{2}}h_n^0\mathrm{e}^{-in\xi},m_0^1(\xi)=\sqrt{3/2}h_n^1\mathrm{e}^{-in\xi}$$

m_1又如何？对$j\in\mathbf{Z}$,定义W_j为V_j在V_{j-1}中的正交补。注意到V_{-1}是以下三个函数的偶数平移生成的:

$$\phi(\frac{3}{2}(x-2l)),\quad\phi(\frac{3}{2}(x-2l)-\frac{1}{2}),\quad\phi(\frac{3}{2}(x-2l)-1),\quad l\in\mathbf{Z}$$

分别对应于:$n=3l$、$n=3l+1$、$n=3l+2$。空间V_0由两个函数的$2\mathbf{Z}$平移生成,

---

① 见本章末注10。

$\phi(x-2l),\phi(x-2l-1)\quad l\in\mathbf{Z}$。因此 V_0 的补空间 W_0 由一个函数的 $2\mathbf{Z}$ 平移生成，$W_0=\overline{\mathrm{span}\{\psi(\cdot-2n);n\in\mathbf{Z}\}}$。我们希望得到形如 $\psi_{j,k}(x)=(\frac{3}{2})^{-j/2}\psi((\frac{3}{2})^jx-2k),j,k\in\mathbf{Z}$ 的标准正交基。ψ 也可表为 $\phi(\frac{3}{2}x-n)$ 的线性组合

$$\psi(x)=\sqrt{3/2}\sum_n g_n\phi(\frac{3}{2}x-n)$$

$\psi(x-2n)$ 的标准正交基以及与 $\phi(x-2n)$ 和 $\phi(x-2n-1)$ 的正交性蕴涵

$$\sum_n g_n\overline{g_{n-3l}}=\delta_{l0} \tag{10.4.6}$$

$$\sum_n g_n\overline{h^0_{n-3l}}=0,\ \sum_n g_n\overline{h^1_{n-3l}}=0 \tag{10.4.7}$$

定义 $m_1(\xi)=\sqrt{2/3}\sum_n g_n e^{-in\xi}$，则式(10.4.2)、式(10.4.4)—式(10.4.7)可归结为如下矩阵的酉性

$$\begin{bmatrix} m_0^0(\xi) & m_0^1(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0^0(\xi+\frac{2\pi}{3}) & m_0^1(\xi+\frac{2\pi}{3}) & m_1(\xi+\frac{2\pi}{3}) \\ m_0^0(\xi+\frac{4\pi}{3}) & m_0^1(\xi+\frac{4\pi}{3}) & m_1(\xi+\frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{10.4.8}$$

这个矩阵看起来像式(10.2.1)，但这种相象很具有欺骗性：式(10.4.8)的前两列与同一尺度函数 ϕ 相关($m_0^0(0)=1=m_0^1(0)$)，因而均由低通滤波器给出，而式(10.2.1)的第二列由高低通滤波器给出。m_0^j 和 m_1 均可构造出来(详情及图例见 Auscher(1989))。注意 m_0^j 和 m_1 是密切相关的。式(10.4.1)、式(10.4.3)的傅里叶变换为

$$\hat\phi(\xi)=m_0^0(\frac{2}{3}\xi)\,\hat\phi(\frac{2}{3}\xi),\quad \hat\phi(\xi)e^{i\xi}=m_0^1(\frac{2}{3}\xi)\,\hat\phi(\frac{2}{3}\xi) \tag{10.4.9}$$

从而

$$m_0^0(\zeta)\hat\phi(\zeta)=e^{i3\zeta/2}m_0^1(\zeta)\,\hat\phi(\zeta)$$

对所有的 ζ 均成立。如果 $\hat\phi$ 连续，则下面的讨论说明 $\hat\phi$ 在某些区间为 0。因为 $\hat\phi(0)=(2\pi)^{-1/2}$，故存在 α 使得 $|\zeta|\leqslant\alpha$ 时，$|\hat\phi(\xi)|\geqslant(2\pi)^{-1/2}/2$。因此，当 $|\zeta|\leqslant\alpha$ 时，

$$m_0^0(\zeta)=e^{i3\zeta/2}m_0^1(\zeta)$$

或

$$m_0^0(\zeta+2\pi)=e^{i3\zeta/2}m_0^1(\zeta+2\pi)$$

由于 m_0^0、m_0^1 都是以 2π 为周期，因此 $m_0^0(\zeta+2\pi)=0=m_0^1(\zeta+2\pi)(|\xi|\leqslant\alpha)$。从而当 $|\zeta|\leqslant\alpha$ 时，$|\hat\phi(\frac{3}{2}\zeta+3\pi)|=0$。特别地，这说明 ϕ 不可能是紧支的(如果 ϕ 是

紧支的则$\hat{\phi}$是整函数，而非平凡的整函数，只可能有孤立的零点)。

具有非整数的有理伸缩因子(特别地，伸缩因子为3/2)的子带滤波方法由Kovacevic和Vetterli(1993)提出并通过FIR滤波器构造出来。基本思想很简单：从c^0开始，采用10.2节的方法分为三条子带，再用伸缩因子为2的合成滤波器将两条低频带重组为c^1，剩下的一条高频带就是d^1。相应的框图见图10.4。如果所有的滤波器都是FIR，则整个算法也是FIR。但我们不是刚刚证明了不存在具有FIR滤波器且伸缩因子为3/2的多分辨分析吗？这看起来好像是矛盾的，其实这个框图与前面的构造并无关系。对图10.4细致地分析可以发现这里用到了两个不同的函数ϕ^1和ϕ^2，V_0是由$\phi^1(x-2n)$，$\phi^2(x-2n)$，$n\in\mathbb{Z}$生成的。对ϕ没有紧支集的证明在这里是不适用的。事实上ϕ^1、ϕ^2可以是紧支的。与式(10.4.9)类似的结论在这里是二维向量$(\hat{\phi}^1(\xi),\hat{\phi}^2(\xi))$和$(\hat{\phi}^1(\frac{2}{3}\xi),\hat{\phi}^2(\frac{2}{3}\xi))$的一个方程。但是，很难看出滤波器应满足的条件以使$\phi^1$、$\phi^2$是正则的。

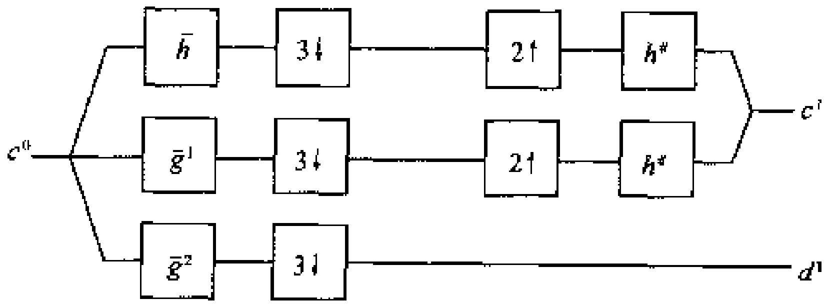


图 10.4　伸缩因子为3/2的子带滤波器框图(由Kovacevic和Vetterli(1993)构造)

读者也许会问，采用分数的尺度因子究竟有何用处？答案是可以提供更精确的频率定位。如果伸缩因子为2，则$\hat{\psi}$主要是定位于π到2π之间，正如图10.5所示，某特定函数的Ψ的傅里叶变换所示的那样。对某些应用而言，使用带宽低于一个频程的小波基是有用的，而分数伸缩小波基满足了这种要求。Cohen和Daubechies(1990)给出了另外一个选择，将在下节讨论。

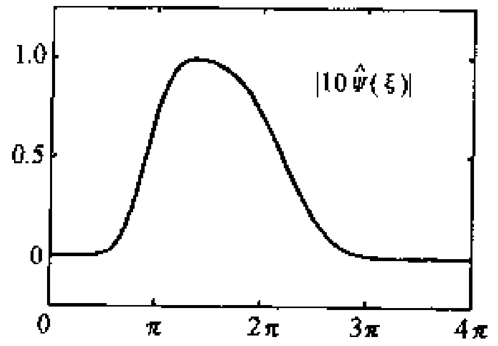


图10.5　$|_{10}\hat{\psi}(\xi)|$的模，$_N\psi$如6.4节中定义

10.5 更好的频率分辨:“分裂”方法

设 h_n、g_n 为一个伸缩因子为 2 的标准正交基相联系的滤波器系数,即

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_n e^{-in\xi}$$

满足

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \tag{10.5.1}$$

和

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1}$$

则有下述引理。

引理 10.5.1 任取函数 f(不一定与小波有任何关系)使 $f(\cdot - n),(n\in\mathbb{Z})$是标准正交的。定义

$$F_1(x) = \sum_n h_n f(x-n)$$
$$F_2(x) = \sum_n g_n f(x-n)$$

则$\{F_1(\cdot-2k),F_2(\cdot-2k);k\in\mathbb{Z}\}$是 $E=\overline{\text{Span}\{f(\cdot-n);n\in\mathbb{Z}\}}$的标准正交基。

证明:

1. 因为$\int dx f(x)\overline{f(x-n)} = \delta_{n,0}$,所以

$$\int d\xi\, |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-in\xi} = \delta_{n,0} \quad 或 \quad \int d\xi\, |\hat{f}(\xi+2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad \text{a.e.} \tag{10.5.2}$$

2. $$\hat{F}_1(\xi) = \sum_n h_n e^{-in\xi}\hat{f}(\xi) = \sqrt{2}m_0(\xi)\hat{f}(\xi) \tag{10.5.3}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_l \hat{F}_1(\xi+\pi l)^2 &= \sum_k [\,|\hat{F}_1(\xi+2\pi k)|^2 + |\hat{F}_1(\xi+\pi+2\pi k)|^2] \\ &= 2(2\pi)^{-1}[\,|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2] \\ &= \pi^{-1} \qquad (由式(10.5.1))\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int d\xi F_1(x)\overline{F_1(x-2k)} &= \int d\xi\, |\hat{F}_1(\xi)|^2 e^{-2ik\xi} \\ &= \sum_l \int d\xi\, |\hat{F}_1(\xi+\pi l)|^2 e^{-2ik\xi} = \delta_{k0}\end{aligned}$$

利用 $\hat{F}_2(\xi)=\sqrt{2}e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}\hat{f}(\xi)$可类似地证明 $F_2(x-2k)$的标准正交性。

3. 同理：

$$\int d\xi F_1(x)\overline{F_2(x-2k)}$$

$$=\int_0^{\pi}d\xi\left[\sum_l \mid \hat{F}_1(\xi+\pi l)\mid \overline{\mid \hat{F}_2(\xi+\pi l)\mid}\right]e^{-2ik\xi} \qquad (10.5.4)$$

且

$$\sum_l \mid \hat{F}_1(\xi+\pi l)\mid \overline{\mid \hat{F}_2(\xi+\pi l)\mid}$$

$$=\sum_k\left[\mid \hat{F}_1(\xi+2\pi k)\mid \overline{\mid \hat{F}_2(\xi+2\pi k)\mid}\right.$$

$$\left.+\mid \hat{F}_1(\xi+\pi+2\pi k)\mid \overline{\mid \hat{F}_2(\xi+\pi+2\pi k)\mid}\right]$$

$$=2(2\pi)^{-1}\left[m_0(\xi)m_0(\xi+\pi)e^{i\xi}+m_0(\xi+\pi)m_0(\xi)e^{i(\xi+\pi)}\right]=0$$

因此，$F_1(x-2k)$和$F_2(x-2k)$是正交的。

4. 最后，$F_1(\cdot-2k)$和$F_2(\cdot-2k)$张成E。这是因为

$$f(x)=\sum_l \mid h_{2l}F_1(x+2l)+g_{2l}F_2(x+2l)\mid \qquad (10.5.5)$$

且

$$f(x-1)=\sum_l \mid h_{2l+1}F_1(x+2l)+g_{2l+1}F_2(x+2l)\mid \qquad (10.5.6)$$

事实上

$$\sum_l h_{2l}e^{2il\xi}\hat{F}_1(\xi)+\sum_l g_{2l}e^{2il\xi}\hat{F}_2(\xi)$$

$$=\left[\overline{m_0(\xi)}+\overline{m_0(\xi+\pi)}\right]m_0(\xi)\hat{f}(\xi)$$

$$+\left[\overline{m_1(\xi)}+\overline{m_1(\xi+\pi)}\right]m_1(\xi)\hat{f}(\xi)$$

$$=\hat{f}(\xi)\left[\mid\overline{m_0(\xi)}\mid^2+\mid\overline{m_1(\xi)}\mid^2\right.$$

$$\left.+\mid m_0(\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)}+m_1(\xi)\overline{m_1(\xi+\pi)}\mid\right]$$

$$=\hat{f}(\xi)$$

式(10.5.5)得证。同理

$$\sum_l h_{2l+1}e^{2il\xi}\hat{F}_1(\xi)+\sum_l g_{2l+1}e^{2il\xi}\hat{F}_2(\xi)$$

$$=e^{-i\xi}\left[\overline{m_0(\xi)}-\overline{m_0(\xi+\pi)}\right]m_0(\xi)\hat{f}(\xi)$$

$$+e^{-i\xi}\left[\overline{m_1(\xi)}-\overline{m_1(\xi+\pi)}\right]m_1(\xi)\hat{f}(\xi)$$

$$=e^{-i\xi}\hat{f}(\xi)$$

因此式(10.5.6)得证。 ■

引理 10.5.1 是一种“分裂”方法：它表明小波滤波器可以用来将任何标准正交

函数 $f(x-n)$张成的空间分成两部分。由于 m_0、m_1 分属不同的频率范围(见图10.6),分裂方法将$\hat{f}$的支集分成小段并将这些小段分归于F_1、F_2。

"分裂"方法可以应用于伸缩因子为2的一维多分辨分析中函数 $\psi(\cdot-k)$张成的具有一个倍频程(大约)带宽的空间 W_0。定义

$$\psi^1(x)=\sum_n h_n\psi(x-n),\quad \psi^2(x)=\sum_n g_n\psi(x-n)$$

其中 h_n、g_n 不一定是同一滤波器的系数,这点与 ψ 的构造不同。于是

$$\begin{aligned} W_0 &= \overline{\text{Span}\{\psi(\cdot-k);k\in\mathbb{Z}\}} \\ &= \overline{\text{Span}\{\psi^1(\cdot-2l);l\in\mathbb{Z}\}}\oplus\overline{\text{Span}\{\psi^2(\cdot-2l);l\in\mathbb{Z}\}} \\ &= W_0^1\oplus W_0^2 \end{aligned}$$

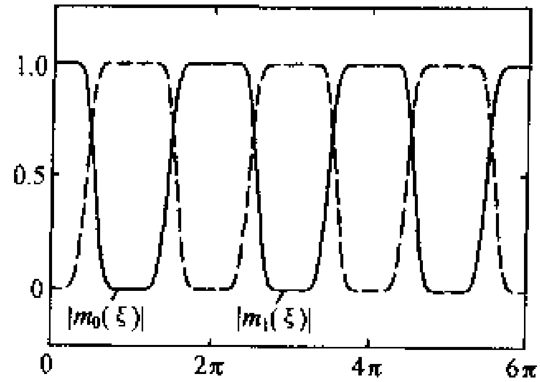


图 10.6 $|_{10}m_0(\xi)|$和$|_{10}m_1(\xi)|$的图形,$_Nm_0$ 如6.4节中定义

由于 W_j 是由 W_0 伸缩得到的,因此可以为 W_j 构造相应的标准正交基,这些基和起来就是 $L^2(\mathbb{R})=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}W_j$ 的基。因此可以定义

$$\psi_{j,l}^1(x)=2^{-j/2}\psi^1(2^{-j}x-2l)$$
$$\psi_{j,l}^2(x)=2^{-j/2}\psi^2(2^{-j}x-2l)$$

$\psi_{j,l}^1,\psi_{j,l}^2;j,l\in\mathbb{Z}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$的一组标准正交基。$\hat{\psi}^1,\hat{\psi}^2$ 是由 $\hat{\psi}$"分裂"得到的,因此 ψ_1,ψ_2 比 ψ 有更好的频率局部化(以时域空间上更大的支集为代价)。图10.7显示了对应于 W_j 的频率空间"的分裂"及对应于 W_j^1,W_j^2 的频率空间的"分裂"。注意,仍是对数地处理,即便对 $\psi_{j,k}^1,\psi_{j,k}^2$也一样。

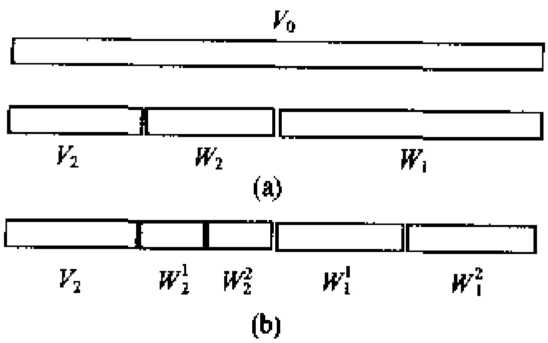


图 10.7 将 V_0"分裂"成(a) W_1,W_2,V_2 或(b) $W_1^1,W_1^2,W_2^2,W_2^2,V_2$ 地图形表示

由构造过程可知，$\hat{\psi}^1(\xi)=\sqrt{2}\,m_0(\xi)\hat{\psi}(\xi)$，$\hat{\psi}^2(\xi)=\sqrt{2}\,m_1(\xi)\hat{\psi}(\xi)$。因此 $|\hat{\psi}^1(\xi)|^2+|\hat{\psi}^2(\xi)|^2=2|\hat{\psi}(\xi)|^2$，如图 10.8 所示。图 10.8 还表示了 $\hat{\psi}^1$ 和 $\hat{\psi}^2$ 确实将 $\hat{\psi}$ 分成两部分，即高频部分和低频部分。

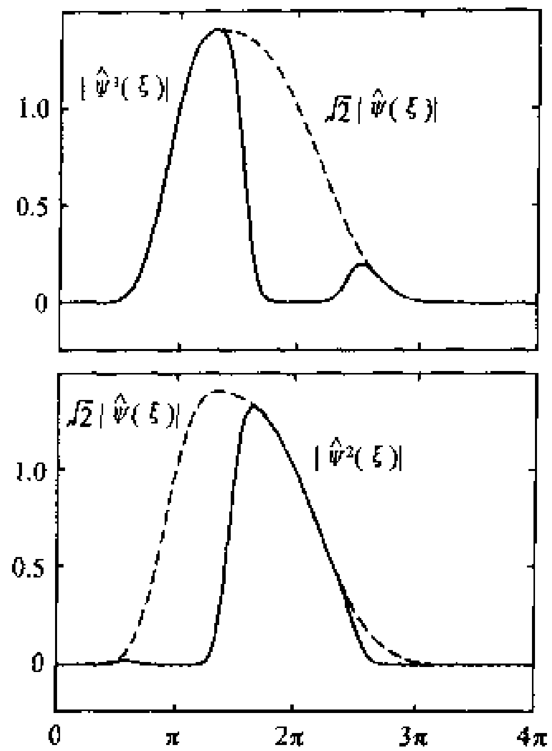


图 10.8 $|\hat{\psi}^1(\xi)|$ 和 $|\hat{\psi}^2(\xi)|$ 的图形，其中低通滤波器为 ${}_{10}m_0(\xi)$（如 6.4 节中定义），虚线为 $\sqrt{2}|\hat{\psi}(\xi)|$ 的图

计算一个函数在下 $\hat{\psi}^1_{j,k}$、$\hat{\psi}^2_{j,k}$ 的系数可以采用子带滤波方法，只是在"标准"高通滤波以后要增加一步高通、低通分裂。如图 10.9 所示。注意，10.2 节的最后提出的伸缩因子为 4 的算法（来源于伸缩因子为 2 的算法）也含有这些函数 ψ^1、ψ^2（在这个算法中，小波主要是 $\psi(x)$，伸缩因子为 2 的原始小波和 $\sqrt{2}\psi^1(2x)$、$\sqrt{2}\psi^2(2x)$。其中 ψ^1、ψ^2 如上面所定义）。

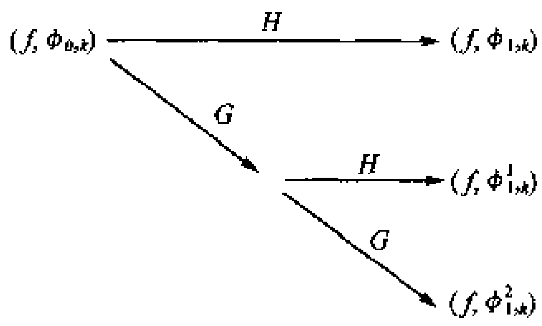


图 10.9 用以"分裂"小波的不同滤波算子的图示

但采用高维张量积多分辨分析时，分裂方法可以选择使用。图 10.10 演示了如何在二维情形用分裂算法得到一个标准正交小波基，这种小波基在频域上的分辨性能比普通小波基好。图 10.10(a)演示了 10.1 节在频域上的构造：中间的方框对应于 V_0，两边竖着的长方形对应于 $W_0^h = W_0 \otimes V_0$，上下平放的长方形对应于 $W_0^v = V_0 \otimes W_0$，四角四个正方形对应于 $W_0^d = W_0 \otimes W_0$，它们共同构成 V_{-1}。重复这个过程，构成 V_{-2}。从图中可以看出，这个方法在傅里叶平面上的角分辨不是很好的。图 10.10(b)演示了当采用 10.2 节中的伸缩因子为 4 的一维多分辨分析来构造二维时是一个什么样子。这里一维算法已经有了三个小波，因此二维的乘积算法就有 $2 \times 3 + 3^2 = 15$ 个小波。图 10.10(a)和图 10.10(b)的中间部分是相同的，惟一的区别在于图 10.10(a)的外圈被"分裂"成图 10.10(b)中的很多片段，而内圈保持原样。这与用分裂算法引理来分裂两层中的一层相对应。这种方法对有些小波(见图 10.10(b)的外圈)有好的角分辨率而对另一些小波(见图 10.10(b)最中间的矩形)则不然。

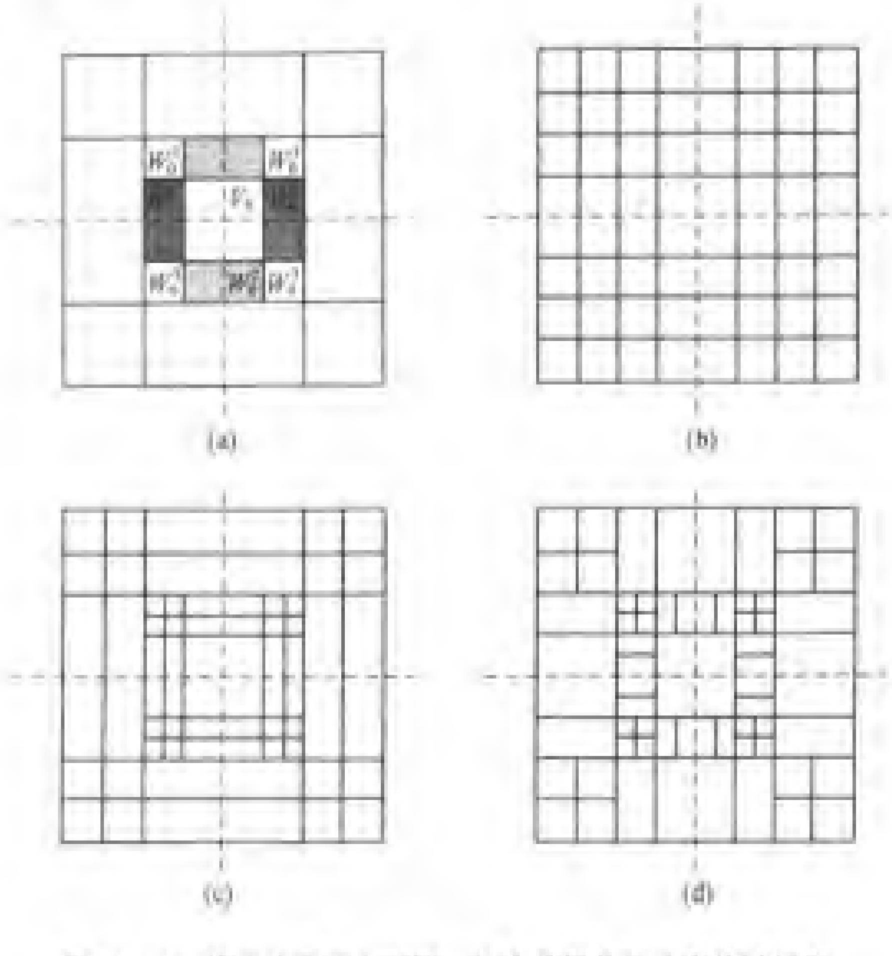


图 10.10　傅里叶平面上不同二维多分辨分析达到的局部化

图 10.10(c)是同一图形的伸缩因子为 2 的两步多分辨分析的图示。不过这里的乘积是由两个 1/2 频程带宽的小波而不是一个单倍频程的小波 ψ 出发的。

尺度方程是相同的，但却有 8 个小波（不同于图 10.10(a)的 3 个，也不同于图 10.10(b)的 15 个）。图 10.10(c)可通过将图 10.10(a)的每个圈（包括内圈和外圈）在水平方向和垂直方向上分成两半得到。这提高了角上正方形（对应于图 10.10(a)的）$|W_j^d|$的角分辨率，却对长方形（对应于图 10.10(a)中的 $|W_j^h$ 或 $|W_j^v$）没有作用，而这些长方形在图 10.10(b)中却有较好的分辨。达到最好的角分辨率的方法是完全放弃乘积结构，通过对 x 和（或）y“分裂”而将图 10.10(a)中的 $|W_j^\lambda$ 垂直地和（或）水平地切开，直到达到要求的分辨为止。图 10.10(d)给出了一个例子。这与一个标准正交基和一个分解和重构函数的算法相对应，虽然这个结构比较复杂。如果还需要更好的角分辨，则可以重复分裂过程，直到满意为止。

10.6 小波包基

上节比较好的小波分辨实际上只是 Coifman 和 Meyer 的绝妙构造的一些特例，这一绝妙构造即通常所说的小波包。本节只是简单介绍这些构造，详细情况可参见 Coifman、Meyer 和 Wickerhauser(1992)，其在语音信号和图像方面的应用可参见 Wickerhauser(1990,1992)。

先从一个伸缩因于为 2 的普通多分辨分析着手。仅考虑 $j\leqslant 0$ 的空间 V_j 和 W_j。分解式

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus (\bigoplus_{j\leqslant 0} W_j)$$

与图 10.7(a)所示的一个频率分段相对应。通俗一点，W_{-1}“二倍于”V_0 和 W_0，W_{-2}“四倍于”V_0 和 W_0，等等。因此可以通过分裂方法将它们分成同样大小的子空间，W_{-1}分裂一次，W_{-2}分裂两次，等等。这与一组函数 $\psi_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}$相联系，其中 l 表示第 l 个空间 W_{-l}（也是这个空间需要分裂的次数），$\epsilon_j=0$ 或 1 表示第 j 次分裂中选择 m_0 或 m_1。即

$$\psi_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}(\xi) = \Big[\prod_{j=1}^{l} m_{\epsilon_j}(2^{-j}\xi)\Big] m_1(2^{-l-1}\xi)\ \hat{\phi}(2^{-l-1}\xi)$$

$$= \Big[\prod_{j=1}^{l} m_{\epsilon_j}(2^{-l-1}\xi)\Big]\hat{\psi}(2^{-l}\xi)$$

显然，$\psi_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}(\xi)$是 $\phi(2^l x - k)$的线性组合，分裂引理（使用 l 次）证明了 $\{\hat{\psi}_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}(\cdot - n);\epsilon_i=0$ 或 $1, n\in\mathbb{Z}\}$ 是$\overline{\mathrm{Span}\{\phi(2^l\cdot - k);k\in\mathbb{Z}\}} = W_{-l}$的标准正交基。从而$\{\psi_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}(\cdot - n);l\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z},\epsilon_i=0$ 或 $l\}\cup\{\phi(\cdot - n);n\in\mathbb{Z}\}$是 $L^2(\mathbb{R})$标准正交基。注意到这个基与一些函数的整数平移相联系，这些函数有大致相同的频率局部化（在宽度接近 π 的频宽中，对 $\phi(\cdot - n)$，由 $|\xi|\leqslant\pi$ 开始，对

$\psi(\cdot-n)$由 $\pi\leqslant|\xi|\leqslant 2\pi$ 开始，$\cdots$)[①] 这与窗口傅里叶变换及 4.2 节 B 中的 Wilson 基相似，而又与小波基一样，通过子带滤波可以容易地计算。

当然，在小波和上述小波包基之间有很多中间结果：可以将某些 W_{-l} 少分裂几次或将其一些子空间多分裂几次而另一些子空间少分裂几次。每种这样的选择都对应一组标准正交基。此外，存在有效的算法(基于对不同分裂的"函数熵"的计算)以确定不同选择中对给定函数而言最有效的一个。参见 Coifman 和 Wickerhauser(1992)。

10.7 区间上的小波基

到目前为止，我们所讨论的一维小波的构造都产生 $L^2(\mathbb{R})$的基。在某些应用中，我们感兴趣的仅仅是实轴的一部分：如数值分析计算往往只在一个区间上有效；图像集中在一个矩形框内；许多分析声音的系统将声音分成块，等等。所有这些都涉及到对支集在一个区间上的函数 f 的分解，比如说支集在[0,1]上。当然，令 f 在[0,1]以外为 0，而用标准的小波基去分析它也是可以的，只是这将人为地在边界上造成"跳跃"，从而反映到小波系数上[②]。此外，这样在计算上的效率不高。因此，研究适用于区间上的函数的小波是有意义的。

第一个方法是采用 9.3 节介绍的周期化小波。这时计算上有效的，但这将用一般(非周期的)小波来分析周期化的函数 $\tilde{f}(x)=f(x-\lfloor x\rfloor)$，$\lfloor x\rfloor$表示不大于 x 的整数。除非 f 本身是周期的，否则我们在边界 0、1 处引入了"跳跃"，这将在很大程度上影响小波系数在 0、1 附近的值。

Meyer(1992)提出了另一个方法可以避免这种麻烦，这个方法基于紧支集上的标准正交小波基。在这一构造中，支集在[0,1]内而未达到 0 或 1 的小波保持不变，而补充从边界上经修改的函数。让我们看看这一方法在半轴上是怎样的(而不是在区间上)。这个简化使我们仅考虑一个边界，不必对[0,1]的两个边界同时处理，即使在最粗尺度下也不必修改。令

$$\phi_{j,k}^{\text{half}}(x)=\begin{cases}\phi_{j,k}(x) & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

$$V_j^{\text{half}}=\overline{\text{Span}\{\phi_{j,k}^{\text{half}};k\in\mathbf{Z}\}}$$

空间 V_j^{half} 也可以看成是将 V_j 中的函数限制在$[0,\infty)$上形成地空间。如果假设初始尺度函数 ϕ 的支集为$[0,2N-1]$，则当 $k\leqslant -2N+1$ 时，$\phi_{j,k}^{\text{half}}(x)=0$。因此仅需

---

① 见本章末注 11。

② 见本章末注 12。

考虑 $k>-2N+1$ 的 $\phi_{j,k}^{\text{half}}(x)$。这些函数中只有 $2N-2$ 个受到影响：$k\geqslant 0$ 时，$\phi_{j,k}^{\text{half}}(x)=\phi_{j,k}(x)$，因此它们仍是标准正交的。这 $2N-2$ 个函数 $\phi_{j,k}^{\text{half}}, k=-1,\cdots,-(2N-2)$ 是相互独立的，且与 $\phi_{j,k}(k\geqslant 0)$ 也相互独立。定义 W_j^{half} 为 V_j^{half} 在 V_{j-1}^{half} 中的正交补。为方便起见，如果将 ψ 平移使其支集在 $[0,2N-1]$ 上，则 $\psi_{j,k}^{\text{half}}$ ($\psi_{j,k}$ 在 $[0,\infty)$ 上的限制，$k\geqslant 0$) 正交于 $\phi_{j,k}^{\text{half}}$ 且属于 V_{j-1}^{half}，因此，它们属于 W_j^{half}。$K=-1,\cdots,-(2N-2)$ 时的 $\psi_{j,k}^{\text{half}}$ 又如何呢？（如果 k 更小些，$k\leqslant -2N+1$，则 $\psi_{j,k}^{\text{half}}\equiv 0$）。当 $k=-N,\cdots,-(2N-2)$ 时 $\psi_{j,k}^{\text{half}}\in V_j^{\text{half}}$（见 Meyer(1992)），即 $\psi_{j,k}^{\text{half}}$ 正交于 W_j^{half}。其余的 $\psi_{j,k}^{\text{half}}, k=-1,\cdots,-(N-1)$ 属于 W_j^{half}。事实上

$$\{\phi_{j,k}^{\text{half}}; k\geqslant -(2N-2)\}\cup\{\psi_{j,k}^{\text{half}}; k\geqslant -(N-1)\}$$

是 V_{j-1}^{half} 的（不正交）基[①]。为了将其标准正交化，可如下进行。

(1) 标准正交化 $\phi_{0,k}^{\text{half}}, K=-1,\cdots,-(2N-2)$ 得 $\tilde{\phi}_k$，则 $\tilde{\phi}_k\ k=-1,\cdots,-(2N-2)$ 与 $\phi_{0,k}(k\geqslant 0)$ 正交，它们合在一起构成 V_0^{half} 得标准正交基。令

$$\tilde{\phi}_{j,k}(x)=2^{-j/2}\tilde{\phi}_k(2^{-j}x),\quad j\in\mathbf{Z}, k=-1,\cdots,-(2N-2)$$

则对任意的 $j\in\mathbf{Z}$，$\{\phi_{j,k}; k\geqslant 0\}\cup\{\tilde{\phi}_{j,k}; k=-1,\cdots,-(2N-2)\}$ 构成 V_j^{half} 的标准正交基。

(2) 通过定义

$$\psi_k^{\#}=\psi_{0,k}^{\text{half}}-\sum_{l=0}^{2N-2}\langle\psi_{0,k}^{\text{half}},\tilde{\phi}_l\rangle\tilde{\phi}_l$$

将 $\psi_{0,k}^{\text{half}}\ k=-1,\cdots,-(N-1)$ 投影到 W_0^{half}。

(3) 标准正交化 $\psi_k^{\#}$ 得到 $\tilde{\psi}_k$，$\tilde{\psi}_k(k=-1,\cdots,-(N-1))$ 与 $\psi_{0,k}^{\text{half}}(k\geqslant 0)$ 一起构成 W_0^{half} 的标准正交基。再令

$$\tilde{\psi}_{j,k}(x)=2^{-j/2}\tilde{\psi}_k(2^{-j}x),\quad j\in\mathbf{Z}, k=-1,\cdots,-(N-1)$$

则 $\{\tilde{\psi}_{j,k}k=-1,\cdots,-(N-1)\}\cup\{\psi_{j,k}; k\geqslant 0\}$ 是 W_j^{half} 的标准正交基。所有这些基（j 遍取 $\mathbf{Z}$）合起来构成 $L^2([0,\infty))$ 的基。

这样得到的不仅是 $L^2([0,\infty))$ 的标准正交基，而且是限制在半轴上的 Hölder 空间的无条件基（即它们在 0 处甚至满足正则性），证明见 Meyer(1992)。在实际应用中，还需计算 $\tilde{\psi}_{0,k}, k=-1,\cdots,-(2N-2)$，和 $\tilde{\phi}_{0,k}, k=-1,\cdots,-(2N-2)$，人们借助于 $\tilde{\phi}_{-1,l}, l=-1,\cdots,-(2N-2)$ 和 $\phi_{-1,l}, l=-1,\cdots,(4N-5)$ 的展开所对应的极大滤波系数。这可从最初的 h_l 计算出。Daubechies、Vail(1992) 给出了一个表，并给出了一个不同于 Meyer 的构造，这一构造用在边界上涉及的函数较少（N 个而不是 $2N-2$ 个），且同样有正则性，甚至在边界上也是如此。

---

① 见本章末注 13。

下面对区间上的小波基作最后一点说明。在图像分析中，常通过扩展图像来处理边界效应。在边界外，通过反射来扩展：这种方法避免了周期化或0扩展带来的不连续(虽然其导数仍是不连续的)。众所周知，这种方法将边界的影响降到最小，只要滤波器是对称的，就不需引入额外的系数(来处理边界)。这种方法也可以生成[0,1]上的双正交小波基，且比Meyer(1992)或Cohen、Daubechies、Vail(1992)方法要省事得多。

如果 f 是 $\mathbb{R}$ 上得函数，则可通过 f 的图形在0和1处的折叠得到一个[0,1]上的函数。最初，在0处折叠，以 $f(x)+f(-x)$ 代替 $f(x)$。然后将 $x>l$ 的两段(原来的 f 及负半轴折起来的部分)折起来，得到 $f(x)+f(-x)+f(2-x)+f(x+2)$。这样不断地折下去，最后得到

$$f^{\text{fold}}(x)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}f(x-2l)+\sum_{l\in\mathbf{Z}}f(2l-x) \tag{10.7.1}$$

为了以后的方便，我们指出①

$$\int_0^1 \mathrm{d}x f^{\text{fold}}(x)\,\overline{g^{\text{fold}}(x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x f(x)\,\overline{g^{\text{fold}}(x)} \tag{10.7.2}$$

取两个小波 ψ、$\tilde{\psi}$，它们能产生之间 $L^2(\mathbb{R})$ 的双正交小波基，ϕ、$\tilde{\phi}$ 为相联系的尺度函数，如8.3节的构造。并假设 ϕ、$\tilde{\phi}$ 以1/2对称：$\phi(1-x)=\phi(x)$、$\tilde{\phi}(1-x)=\tilde{\phi}(x)$，$\psi$、$\tilde{\psi}$ 以1/2反对称：$\psi(1-x)=-\psi(x)$、$\tilde{\psi}(1-x)=-\tilde{\psi}(x)$(8.3节中有例子)。对 $\psi_{j,k}$ 和 $\tilde{\psi}_{j,k}$ 折叠得

$$\begin{aligned}\psi_{j,k}^{\text{fold}}(x)&=2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\psi(2^{-j}x-2^{-j+1}l-k)\\&\quad+2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\psi(2^{-j+1}l-2^{-j}x-k)\\&=2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\psi(2^{-j}x-2^{-j+1}l-k)\\&\quad-2^{-j/2}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\psi(2^{-j}x-2^{-j+1}l+1+k)\end{aligned} \tag{10.7.3}$$

$\tilde{\psi}_{j,k}^{\text{fold}}$ 类似地定义。我们仅考虑 $j\leqslant 0$ 或 $j=-J(J>0)$。对此式(10.7.2)可改写为

$$\psi_{j,k}^{\text{fold}}=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left[\psi_{-J,k+2^{J+1}l}-\psi_{-J,k+2^{J+1}l-k-1}\right]$$

为了方便，也定义 $\phi_{j,k}^{\text{fold}}$ 和 $\tilde{\phi}_{j,k}^{\text{fold}}$。因为 $\phi(1-x)=\phi(x)$、$\tilde{\phi}(1-x)=\tilde{\phi}(x)$ 所以

$$\phi_{j,k}^{\text{fold}}=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left[\phi_{-J,k+2^{J+1}l}+\phi_{-J,k+2^{J+1}l-k-1}\right]$$

显然，$\forall\, m\in\mathbb{Z}$，$\phi^{\text{fold}}_{-J,k+2^{J+1}m}=\phi^{\text{fold}}_{-J,k}$。从而只需考虑 $k=0,\cdots,2^{J+1}-1$。类似地讨论可知，只需考虑 $k=0,\cdots,2^J-1$ 时地 $\psi^{\text{fold}}_{-J,k}$。注意，$\phi^{\text{fold}}_{-J,k}$ 和 $\tilde{\phi}^{\text{fold}}_{-J,k}$ 在[0,1]上也

① 见本章末注14。

是双正交的。这是因为(由式(10.7.1))

$$\int_0^1 dx \phi_{-J,k}^{\text{fold}}(x)\overline{\tilde{\phi}_{-J,k'}^{\text{fold}}(x)}$$

$$= \sum_{l\in\mathbf{Z}}\left[\langle\phi_{-J,k},\tilde{\phi}_{-J,k'+2^{J+1}l}\rangle + \langle\phi_{-J,k},\tilde{\phi}_{-J,2^{J+1}l-k'}\rangle\right]$$

$$= \sum_{l\in\mathbf{Z}}(\delta_{k,k'+2^{J+1}l} + \delta_{k,2^{J+1}l-k'}) = \delta_{k,k'} \quad (\text{因为 } 0\leqslant k,k'\leqslant 2^J-1)$$

双正交性说明 $\phi_{-J,k}^{\text{fold}}, k=0,\cdots,2^J-1$,是相互独立的且构成 $V_{-J}^{\text{fold}} = \{f^{\text{fold}}; f\in V_{-J}\}$ 的基(这点对 $\tilde{\phi}_{-J,k}^{\text{fold}}$ 也成立)。我们也可以通过 $W_{-J}^{\text{fold}} = \{f^{\text{fold}}; f\in W_{-J}\}$ 来定义空间 W_{-J}^{fold} 和 $\widetilde{W}_{-J}^{\text{fold}}$。显然 W_{-J}^{fold} 由 $\psi_{-J,k}^{\text{fold}}, k=0,\cdots,2^J-1$,张成。此外,类似式(10.7.4)的计算可得

$$\int_0^1 dx \psi_{-J,k}^{\text{fold}}(x)\overline{\tilde{\phi}_{-J,k'}^{\text{fold}}(x)} = 0$$

$$\int_0^1 dx \psi_{-J,k}^{\text{fold}}(x)\overline{\tilde{\psi}_{-J,k'}^{\text{fold}}(x)} = \delta_{k,k'}$$

即 $W_{-J}^{\text{fold}} \perp \widetilde{V}_{-J}^{\text{fold}}$ 且 $\psi_{-J,k}^{\text{fold}}(0\leqslant k\leqslant 2^J-1)$ 相互独立。因此"折叠(fold)"结构保证了原来结构得所有性质(空间的渐进性,双正交性,基,…)。滤波器在折叠处的双正交基下的系数也可以通过在边界 $x=0,1$ 处折叠得到。如果 ψ、$\tilde{\psi}$、ϕ、$\tilde{\phi}$ 是紧支集的,则仅仅靠近边缘的滤波器系数受到影响。Cohen、Daubechies 和 Vial(1992)给出了例子。但是,由于通过折叠的双正交小波分析函数 f(在[0,1]上)与通过原始双正交小波分析函数 f 在 R 上的延拓具有同样得效果,因此我们不能期望能用这一方法在超过 Hölder 指数 1 的水平上分析[0,1]上的 Hölder 空间。与周期化小波相比,这是个进步,但不如[0,1]上的标准正交小波基易于操作。详情参见 Cohen、Daubechies 和 Vial(1992)。

注:

1. 例,设 Γ 是一六点格,$\Gamma=\{n_1e_1+n_2e_2; n_1,n_2\in\mathbf{Z}\}$,其中 $e_1=(1,0)$, $e_2=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\Gamma$ 将 $\mathbb{R}^2$ 分解为等边三角形。定义 V_0 为 $L^2(\mathbb{R})$上分段仿射到这些三角形上得连续函数。这一多分辨分析得标准正交基得构造见 Jaffard(1989)。这一六点格对称结构得双正交紧支小波基的构造见 Cohen 和 Schlenker(1991)。

2. 5.2 节中的一维条件也可写成矩阵形式:$\hat{\psi}(\xi)=m_1(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2)$,条件

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$$

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 = 1$$

$$m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0$$

保证了$\{\phi_{0,n}; n\in\mathbf{Z}\}$标准正交性、$\{\psi_{0,n}; n\in\mathbf{Z}\}$的标准正交性以及这两个向量集合的相互正交

性。这些条件由等价于矩阵$\begin{bmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi) \end{bmatrix}$的酉性条件。

3. 如果愿意,也可将 U 的元素下标定为 $1,\cdots,2^n$ 以代替 $\{0,1\}^n$,这只需通过变换 $\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{n} s_j 2^{j-1} \in \{1,\cdots,2^n\}$ 将 $s \in \{0,1\}^n$ 重新编排即可。

4. 到目前为止,我还不知道任何显式得算法可为伸缩因子 3 提供 m_0 的无穷函数族,使其正则性与滤波器支集宽度成比例。

5. 对于伸缩因子 2 可同样处理,其因子矩阵更简单。基本思想是,只要

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$$

则

$$\forall r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, m_0^{\#} = (1+r^2)^{-1/2}\left[m_0(\xi) + r e^{-i(2n+1)\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}\right]$$

总满足:$|m_0^{\#}(\xi)|^2 + |m_0^{\#}(\xi+\pi)|^2 = 1$。如果 $m_0(\xi) = \sum_{n=0}^{2N+1} \alpha_n e^{-in\xi}$,则可取 $n = N+1$,于是 $m_0^{\#}(\xi) = \sum_{n=0}^{2N+3} \alpha_n^{\#} e^{-in\xi}$,写成矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix} m_0^{\#}(\xi) \\ e^{-i(2N+3)\xi}\overline{m_0^{\#}(\xi+\pi)} \end{pmatrix} = (1+r^2)^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & re^{-2i\xi} \\ -r & e^{-2i\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0(\xi) \\ e^{-i(2N+1)\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)} \end{pmatrix}$$

整个算子将 m_0 的阶提高了 2。此外,还可证明(Vaidyanathan 和 Hoang(1988))任何满足 $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1$ 的三角多项式 m_0 均可通过这种 r 矩阵作用于双通滤波器而得到。在 6.4 节的构造中没有采用这种方法,因为它不能保证 m_0 被$(1+e^{-i\xi})$整除:为了使 m_0 能被$(1+e^{-i\xi})$整除,必须对 r_j 附加很强的非线性限制。但是,这种方法有个优点,它使滤波器容易实现(直接采用 r_j),并且 r_j 的误差不会影响到准确重构。

类似的矩阵方法也可用于多个频段,见 Doganata、Vaidanathan、Meyer(1988),并且可用于更实际的矩阵因子,见 Vaidanathan et al.(1989)。这些矩阵分解方法又回到 Belevitch 关于电路理论的研究中(1968)。

6. 这种确定 m_1、m_2 的方法是 W. Lawton 和 R. Gopinath 告诉我的(私人通信 1990)。

7. 但是,这种一维滤波器在实际上没什么用处!

8. 很多作者都谈到过这点,最早的一个可能是 McClellan(1973)。我们可以用$(\alpha\cos\xi + (1-\alpha)\cos\zeta)/2(\forall \alpha \in \mathbb{R})$,代替一维的 $\cos\xi$,但要使对称轴不同于 $\alpha = 1/2$ 似乎不太可能。

9. 10.3 节中的一些高维算法相应于非整数伸缩因子。例如,在二维情形,矩阵 $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$和 $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$均满足 $D^8 = 16\mathrm{Id}$,因此其中一个伸缩可看成因子为$\sqrt{2}$的伸缩(与旋转和/或反射相结合)。

10. 对于不由多分辨分析产生的标准正交小波基,伸缩因子可否是无理数,关于这点目前还不清楚。

11. 但是,对于很大的 l,$\hat{\psi}_{l;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_l}$并不如这里所得的那样集中,见 Coifman、Meyer 和 Wickerhauser(1992)。从图 10.8 也可看出这一点,其中 $\hat{\psi}^1$、$\hat{\psi}^2$ 有“边垂 (sidelobs)”效应。

12. 在图像分析中常将 f 通过反射延拓到边界外，这种延拓是连续的，但其导数仍有“跳跃”。我们将于 10.7 节末尾讨论这个问题。

13. 这些结论中有些具有很高的非平凡性。Meyer(1992)花了很大篇幅证明它们。最近，Lemarie 和 Malgouyres(1991)找到了一些较为简单的证明。

14. $\int_0^1 \mathrm{d}x f^{\mathrm{fold}}(x)\, \overline{g^{\mathrm{fold}}(x)}$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l,l'} \int_0^1 \mathrm{d}x \,[\, f(x+2l)\, \overline{g(x+2l')} + f(x+2l)\, \overline{g(2l'-x)} \\
&\quad + f(2l-x)\, \overline{g(x+2l')} + f(2l-x)\, \overline{g(2l'-x)}\,] \\
&= \sum_{l,m} \int_{2l}^{2l+1} \mathrm{d}x f(x)\, \overline{g(x+2m)} + \sum_{l,n} \int_{2l}^{2l+1} \mathrm{d}x f(x)\, \overline{g(2n-x)} \\
&\quad + \sum_{l,m'} \int_{2l-1}^{2l} \mathrm{d}y f(y)\, \overline{g(2m'-y)} + \sum_{l,n'} \int_{2l-1}^{2l} \mathrm{d}y f(y)\, \overline{g(y+2n')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \sum_m \overline{g(x+2m)} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \sum_m \overline{g(2m-x)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \sum_m \overline{g^{\mathrm{fold}}(x)}
\end{aligned}
$$

参考文献

本书正式发表的文献是按发表的时间排序的，预印文献（即没有正式发表的文献）是按作者写作的时间排序的。由于不同的期刊出版的周期和速度不尽相同，本书中是以期刊出版的官方时间为准，因此可能导致文献引用上的误差。

1 M. ANTONINI, M. BARLAUD, AND P. MATHIEU(1991), Image coding using lattice vector quantization of wavelet coefficients, Proc. IEEE Internat. Conf. Acoust. Signal speech Process., pp. 2273—2276.

2 M. ANTONINI, M.. BARLAUD, P. MATHIEU, AND I. DAUBECHIES(1991), Image coding using wavelet transforms, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., to appear.

3 F. ARGOU, A. ARNEODO, J. ELEZGARAY, G. GRASSEAU, ANDR. MURENZI(1989), Wavelet transform of two-dimensional fractal aggregates, Phys. Lett. A, 135, pp. 327—336.

4 F. ARGOUL, A. ARNEODO, G. GRASSEAU, Y. GAGNE, E. J. HOPPINGER, AND U. FRISCH(1989), Wavelet analysis if turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade, Nature, 338, pp. 51—53.

5 A. ARNEODO, F. ARGOUL, J. ELEZGARAY, AND G. GRASSEAU(1988), Wavelet, transform analysis of fractals: Application to nonequilibrium phase transitions, in Nonlinear Dynamics, G. Turchetti, ed., world scientific, Singapore, p. 130.

6 E. W. ASLAKSEN AND J. R. KLAUDER(1986), Unitary representations of the affine group, J. Math. Phys., 9, pp. 206—211; see also Continuous represent ation theory using the affine group, J. Math. Phys., 10(1969), pp. 2267—2275.

7 P. AUSCHER(1989), Ondelettes fractales et applications, Ph.. D. Thesis, Univers ite Paris, Dauphine, Paris, France.

________(1990), Symmetry properties for Wilson bases and new examples with compact support, preprint, Universite de Rennes, France, in Wavelets: Mathematics and Applications, J. Benedetto and M. Frazier, eds., CRC Press, to appear.

________(1992), Wavelet bases for L(R), with rational dilation factor, in Ruskai et al. (1992) pp. 439—452.

8 P. AUSCHER, G. WEISS, AND M.. V. WICKERHAUSER (1992), Lacal sine and cosine bases of Coifman and Meyer and the construction of smooth wavelets, in Chui(1992b).

9 H. BACRY, A. GROSSMANN, AND J. ZAK(1975), Proof of the completeness of lattice states in the kq-representation, Phys. Rev., B12, PP. 1118-1120

10 R. BALIAN(1981), Un principe d'incertitude fort en theorie du signal ou en mecanique quantique, C. R.. Acad. Sci. paris, 292, Serie 2.

11 V. BARGMANN(1961), On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I, Comm. Pure Appl. Math, 14, pp. 187—214.

12 V. BARGMANN, P. BUTERA, L. GIRARDELLO, AND J. R.. KLAUDER(1971), On the completeness of coherent states, 2, pp. 221—228.

13 M. J. BASTIAANS(1980), Gabor's signal expansion and degrees of freedom of a signal, Proc, IEEE, 68, pp. 538—539.

_______(1981), A sampling theorem for the complex spectrogram and Gabor's expansion of a signal in Gaussian elementary signals, Optical Engrg., 20, pp. 594—598.

14 G. BATTLE(1987), A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarie functions, comm. Math.. Phys., 110, pp. 601—615.

_______(1988), Heisenberg proof of the Balian—Low theorem, Lett. Math.. Phys., 15, pp. 175—177.

_______(1989), Phase space localization theorem for ondelettes, J. Math. Phys., 30, pp. 2195—2196

_______(1992), Wavelets, a renormalization group point if view, in Ruskai et al. (1992), pp. 323—350

15 V. BELEVITCH(1968), Classical Network synthesis, Holden Day, San Francisco.

16 J. BERTRAND AND P. BERTRAND(1989), Time – frequency representation of broad – band signals, pp. 164 – 171 in Combes, Grossmann, and Tchamitchian(1989)

17 G. BEYLKIN, R. COIFMAN, AND V. ROKHLIN(1991), Fast wavelet transforms and numerical algorithms, Comm.. Pure Appl, Math., 44, pp. 141—183

18 B. BOASHASH(1990), Time – frequency signal analysis, in Advances in Spectrum Analysis and Array Processing, S. Haykin, ed., Prentice – Hall, Englewood Cliffs, NJ, pp. 418—517.

19 J. BOURGAIN(1988), A remark on the uncertainty principle for Hilbertion basis, J. Funct. Anal., 79, pp. 136—143.

20 P. BURT AND E. ADELSON(1983), The Laplacian pyramid as a compact image code, IEEE Trans, Comm., 31, pp. 482—540.

21 A. P. CALDERON(1964), Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Stud. Math., 24, pp. 113—190.

22 A. S. CAVARETTA, W. DAHMEN, AND C. MICCHELLI(1991), Stationary subdivision, Mem. Amer. Math. Soc., 93, pp. 1—186.

23 C. K. CHUI(1992), On cardinal spline wavelets, in Ruskai et al. (1992), pp. 419—438.

_______(1992b), An Introduction to Wavelets, Academic Press, New York.

_______(1992c), (ed.), Wavelets: A Tutorial in theory and applications, academic Press, New York.

24 C. K. CHUI AND X. SHI(1991), Inequalities of Littlewood – Paley type for frames and wavelets, submitted to SIAM J. Math. Anal.

25 C. K. CHUI AND J. Z.. WANG(1991), A cardinal spline approach to wavelets, Proc. Amer. Amer. Math. Soc., 113, pp. 785—793, and On compactly supported wavelets and a duality principle, Trans, Amer. Math. Soc., to appear.

26 A. COHEN(1990), Ondelettes, analyses multiresolutions et filters miroir en quadrature, Ann Inst. H. Poincare, Anal. non lineaire, 7, pp. 439—459.

_______(1990b), Ondelettes, analyses multiresolutions et traitement numerique dusignal, Ph. D. Thesis, Universite Paris, Darphine.

27 A. COHEN AND JP. CONZE(1992), Regularite des bases d'ondelettes et measures ergodiques, Rev. Math. Iberoamer, to appear.

28 A. COHEN AND I. DAUBECHIES(1990), Orthonormal bases of compactly supported wavelets Ⅲ: Better frequency localization, AT&T bell Laboratories preprint, submitted to SIAM J. MATH. Anal.

_______(1991), Non – separable bidimensional wavelet bases, AT&T Bell Laboratories preprint, submitted

to Rev. Math. Iberoamer.

________(1992), A stability criterion for boirthogonal wavelet bases and their related subband coding schees, preprint, AT&T Bell Laboratories.

29 A. COHEN, I. DAUBECHIES, AND J. C. FEAUVEAU (1990), Biothogonal bases of compactly supported wavelets, AT&T Bell Laboratories preprint, Comm. Pure Appl. Math., to appear.

30 A. COHEN, I. DAUBECHIES, AD P. VIAL(1992), Wavelets and fast wavelet transform on the interval, AT&T Bell Laboratories, preprint.

31 A. COHEN, AND J. JOHNSTON(1992), Joint optimization of wavelet and impulse response constraints for biorthogonal filter pairs with exact reconstruction, AT&T Bell Laboratories, in preparation.

32 A COHEN, AND J. M. SCHLENKER(1991), Compactly supported wavelets with hexagonal symmetry, AT&T Bell Laboratories, preprint.

33 R. R. COIFMAN AND Y. MEYER(1991), Remarques sur l'analyse de Fourier a fenetre, C. R. Acad. Sci. Paris I, 312, pp. 259—261.

34 R. COIFMAN, Y. MEYER, AND M. V. WICKERHAUSER(1992), Wavelet analysis and signal processing, in Ruskai et al. (1992), pp. 153—178; and Size properties of wavelet packets, in Ruskai er al. (1992), pp. 453—470.

35 R. R. COIFMAN AND R. ROCHBERG(1980), Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in Lp, Asterisque, 77, pp. 11—66.

36 R. C. COIFMAN AND M. V. WICKERHAUSER(1992), Entropy－based algorithms for best basis selection, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 713—718.

37 J. M. COMBES, A. GROSSMANN, AND PH. TCHAMrrCHIAN(1989), eds., Wavelets－timeFrequency Methods and Phase Space, Proceedings of the Int. Conf., Marseille, Dec. 1987, Springer－Verlage, Berlin.

38 J. P. CONZE(1991), Sur le calcul de la norm ed Sobolev des functions d'cehelles, preprnt, Dept. of Math., Universite de Rennes, France.

39 J. P. CONZE AND A. RAUGI(1990), Fonction harminique pour un operateur de transition et application, preprint, Dept. of Math., Universite de Rennes, France.

40 I. DAUBECHIES(1988), Time－frequency localization operators: a geometric phase approach, IEEE Trans. Inform. Theory, 34, pp. 605—612.

________(1988b), Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. Pure Appl. Math., 41, pp. 909—996.

________(1990), The wavelet transform, time－frequency localization and signal analysis, IEEE Trans. Inform. Theory, 36, pp. 961—1005.

________(1990b), Orthonormal bases of compactly supported wavelets Ⅱ. Variations on a theme, preprint, AT&T Bell Laboratories, submitted to SIAM J. Math. Anal.

41 I. DABECHIES AND AGROSSMANN(1988), Frames of entire functions in the Bargmann space, Comm. Pure Appl. Math., 41, pp. 151—164.

42 I. DAUBECHIES AND A. J. E. M. JANSSEN(1988), Two theorems on lattice expansions, IEEE Trans. Inform. Theory, to appear.

43 I. DAUBECHIES AND J. KLAUDER(1985), Quantum mechanical path integrals with Wiener measures for all polynomial Hamiltonians Ⅱ, J. Math. Phys., 26, PP. 2239—2256.

44 I. DAUVECHIES AND J. LAGARIAS(1991), Two－scale difference equations I. Existence and global reg-

ularity of solutions, SIMA J. Math.. Anal., 22, pp. 1388—1410.

______(1992), Two-scale difference equations Ⅱ. Local regularity, infinite products of matrices and fractals, SIAM J. Math. Anal, 24.

45 I. DAUBECHIES AND T. PAUL(1987), Wavelets---some applications, in *Proceedings of the International Conference on Mathematical Physics*, M.. Mebkkout and R. Seneor, eds., World Scientific, Singapore, pp. 675—686.

______(1998), *Time-frequency localization operators: A geometric phase space approach* Ⅱ. The use of dilations and translations, Inverse Prob., 4, pp. 661—680.

46 I. DAUBECHIES A. GROSSMANN, AND Y. MEYER(1986), Painless nonorthogonal expansions, J. Math. Phys., 27, pp. 1271—1283.

47 I. DAUBECHIES, S. JAFFARD, AND J. L. JOURNE(1991), A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay, SIAM J. Math. Anal., 22, pp. 554—572.

48 I. DAUBECHIES, J. KLAUDER, AND T. PAUL(1987), Wiener measures for path integrals with affine kinematic variables, J. Math.. Phys., 28, pp. 85—102.

49 N. DELPAT, B. ESCUDIE, P. GUILLEMAIN, R. LRONLAND-MARTINET, PH. TCHAMITCHIAN, AND B. TORRESANI(1992), Asymptotic wavelet and Gabor analysis: extraction of instantaneous frequencies, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 644—664.

50 G. DESLAURIERS AND S. DUBUC(1987), Interpolation dyadique, in Fractals, dimensions non entieres et applications, G.. Cherbit, ed., Masson, Paris, pp. 44—55.

______(1989), Symmetric iterative interpolation, Constr. Approx., 5, pp. 49—68.

51 Z. DOGANATA, P. P. VAIDYANATHAN, AND T. Q. NGUYEN(1988)*General synthesis procedures for FIR lossless transfer matrices, for perfect reconstruction multirate filter bank applications* IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., 36, pp. 1561—1574.

52 S. DUBUC(1986), Interpolation through a iterative scheme, J. Math. Anal. Appl., 114, pp. 185—204.

53 R. J. DUFFIN AND A. C. XCHAEFFER(1952), A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc., 72, pp. 341—366.

54 P. DUTILLEUX(1989), An implementation of the 'algorithme a trous' to compute the wavelet transform, pp. 298—304 in Comber, Grossmann, and Tchamitchian(1989).

55 N. DYN AND D. LEVIN(1989) Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces, preprint, Math. Dept., Tel Aviv University, Israel.

56 N. DYN, A. GREGORY, AND D. LEVIN(1987), A 4-point interpolatory subdivision scheme for surve design, Comput. Aided Geom. Des., 4, pp. 257—268.

57 T. EIROLA(1991), Sobolev characterization of solutions of dilation equations, preprint, Institute of Math., Helsinki University of Technology, Finland.

58 D. ESTEBEN AND C. GALAND(1977), *Application of quadrature mirror filters to split-band voice coding schemes*, Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Signsl Speech Process., Hartford, Connecticut, pp. 191—195.

59 G. EVANGELISTA(1989), in Meyer(1992b).

60 J. C. FEAUVEAU(1990), Analyse multiresolution par ondelettes non orthogonales et bancs de filters numeriques, Ph. D. Thesis, Universite de Paris Sud, Paris, France.

61 C. FEFFERMAN AND R. DE LA LLAVE(1986), Relativistic stability of matter, Rev. Math. Iberoamer., 2, pp. 119—213.

62 G. FIX AND G. STRANG(1969), Fourier analysis of the finite element method in Ritz - Galerkin theory, stud. Appl. Math., 48, pp. 265—273.

63 P. FLANDRIN(1989), Some aspects of non - stationary signal processing with emphasis on timefrequency and time - scale methods, in Wavelets, J. M.. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian. eds., Springer - Verlag, Berlin, 68—98.

64 M. FRAZIER AND B. JAWERTH(1988), The - transform and applications to distribution spaces, in Function Spaces and Application, M. Cwikel et al., des., Lecture Notes in Mathematics 1302, Springer - Verlag. Berlin, pp. 233 - 246; see also A discrete transform and decompositions of distribution spaces, J. Funct. Anal., to appear.

65 M. FRAZIER, B. JAWERTH, AND G. WEISS(1991), Littlewood - Paley theory and the study of function spaces, CBMS - Conference Lecture Notes 79, American Mathematical Society, Providence, RI.

66 D. GABOR(1946), Theory of communication, J. Inst. Electr. Engrg., London, 93(Ⅲ), pp. 429—457.

67 F. GORI AND G. GUATTARI(1985), Signal restoration for linear systems with weighted inputs. Singular value analysis for two cases of low - pass filtering, Inverse Probl., 1, pp. 67—85.

68 G. K. GROCHENIG(1991), Describing functions: atomic decompositions versus frames, Monatsh, Math., 112, pp. 1 - 42.

69 K. GROCHENIG(1987), Analyse multi - echelle et bases d'ondelettes, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 305, Serie I, pp. 13 - 17.

70 K. GROCHENIG AND W. R. MADYCH(1992), Multiresolution analysis, Haar bases and selfsimilar tilings of Rn, IEEE Trans Inform. Theory, 38, pp. 556—568.

71 A GROSSMANN AND J. MORLET (1984), Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, SIAM J. Math. Anal., 15, pp. 723—736.

72 A. GROSSMANN, J. MORLET, AND T. PAUL(1985), Transforms associated to square integrable group representations, I. General result, J. Math. Phys., 27, pp. 2473—2479.

_______(1986), Transforms associated to square integrable group representations, Ⅱ. Examples, Ann. Inst. H. Poincare, 45, pp 293—309.

73 A. GROSSMANN, M.. HOLSCHNEIDER, R. KRONLAND - MARTINET, AND J. MORLET(1987), Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms, in Inverse Problems: An Interdisciplinary Study; Advances in Electronics and Electron Physics, supplement 19, Academic Press, New York, pp. 298—306.

74 A. GROSSMANN, R. KRONLAND - MARTINET, AND J. MORLET(1989), Reading and understanding continuous wavelet transforms, in Wavelets, J. M.. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, eds., Springer - Verlag, Berlin, pp. 2—20.

75 A. HAAR(1910), Zur Theorie der orthogonalen Funktionen - Systeme, Math. Ann., 69, pp. 331—371.

76 C. HEIL AND D. WALNUL(1989), Continuous and discrete wavelet transforms, SIAM Rev., 31, pp. 628—666.

77 O. HERRMANN(1971), On the approximation problem in nonrecursive digital filter design, IEEE Trans. Circuit Theory, CT - 18, PP. 411—413.

78 M. HOLSCHNEIDER AND PG. TCHAMITCHIAN(1990), Regularite locale de la function 'nondifferentiable' de Riemann, pp. 102—124 in Lemarie(1990).

79 M. HOLSCHNEIDER, R. KRONLAND - MARTINET, J. MORLET, AND PH. TCHAMITCHIAN

(1989), A real - time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform, pp. 286—297 in Combes, Grossmann, and Tchamitchian(1989).

80 S. JAFFARD(1989), Construction et proprietes des bases d'ondelettes. Remarques surla controlabilite exacte, Ph. D. Thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

________(1989b), Exposants de Holder en des points donnes et coefficients d'ondelettes, C. R. Acad. Sci. Pairs, 308, serie 1, pp. 79—81.

81 I. M. JAMES(1991), Organizing a conference, Math. Intelligencer, 13, pp. 49—51.

82 C. P. JANSE AND A. KAISER(1983), Time - frequency distributions of loud - speakers: the application of the Wigner distribution, J. Audio Engrg. Soc., 37, pp. 198—223

83 A. J. E. M. JANSSEN(1981), Gabor representation of generalized functions, J. Math. Appl., 80, pp. 377 - 394.

________(1984), Gabor representation and Wigner distribution of signals, Proc. IEEE, pp. 41. B. 2. 1—41. B. 2. 4.

________(1988), The Zak tranaform; a signal tranaform for sampled time - continuous signals, Phillips J. Res., 43, pp. 23—69.

________(1992), The Smith - Barnwell condition and non - negative scaling functions, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 884 - 885.

84 H. E. JENSEN, T. HOHOLDT, AND J. JUSTESEN(1988), Double series representation of bounded signals, IEEE Trans. Inform. Theory, 34, pp. 613—624.

85 M. KAC(1959), Statistical independence in probability, analysis and number theory, no. 12 in the Carus mathematical monographs, Mathematical Association of America.

86 G. KAISER(1990), Quantum Physics, Relativity and Complex Spacetime: Towards a New Synthesis, North - Holland, Amsterdam.

87 J. R.. KLAUDER(1966), Improved version of the optical equivalence theorem, Phys. Rev. Lett., 16, pp. 534—536; this topic is also discussed in Chapter 8 of J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan(1968).

88 J. R.. KLAUDER AND B. - S. SKAGERSTAM(1985), Coherent States, World Scientific, Singapore.

89 J. R.. KLAUDER AND E. C. G.. SUNDARSHAN(1968), Fundamentals of Quantum Optics, W. A. Benjamin, New York.

90 J. KOVAGEVIC AND M. VETTERLI(1991), Perfect reconstruction filter banks with arbitrary rational sampling rate, Center for Telecommunications Research, Columbia University, preprint, submitted to IEEE Trans. Signal Process.

________(1992), Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for Rn, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 533—555.

91 R. KRONLAND - MARTINET, J. MORLET, AND A. GROSSMANN(1987), Analysis of sound patterns through wavelet transforms, Internat. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1, pp. 273—301.

92 E. LAENG(1990), Nouvelles bases orthonormees de L2, C. R. Acad. Sci. Paris, 311, Serie 1, pp. 677—680.

93 H. LANDAU(1967), Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, Acta Math., 117, pp. 37—52.

________(1989), On the density of phase space functions, AT&T Bell Laboratories, preprint.

94 H. J. LANDAU AND H. O. POLLAK(1961), Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncer-

tainty, Ⅱ. Bell Systems Tech. J. ,40, pp. 65—84

_______(1962), Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, Ⅲ, Bell Systems Tech. J., 41, pp. 1295—1336.

95 W. LAWTON(1990), Tight frames of compactly supported wavelets, J Math. Phys., 31, pp. 1898—1901.

_______(1991), Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet basses, J. Math. Phys., 32, pp. 57—61.

96 W. M. LAWTON AND H. L. RESNIKOFF(1991), Multidimensional wavelet bases, submitted to SIAM J. Math. Anal.

97 P. G. LEMARIE(1988), Une nouvelle base d'ondelettes de L2(R2), J. de Math. Pures et Appl., 67, pp. 227—236.

_______(1990), ed., Les ondelettes en 1989, Lecture Notes in Mathematics no. 1438; Springer－Verlag, Berlin.

_______(1991), La propriete de support minimal dans les analyses multiresolutionm Comptes Rendus de I' Acad. Sci. Paris, 312, pp. 773—776.

98 P. G. LEMARIE AND G. MALGOUYRES(1989), in Meyer(1992b).

99 P. G. LEMARIE AND G. MALGOUYRES(1991), Support des fonctions de baes dans une analyse multiresolution, preprint, Dept. de Math , Universite Paris－Sud, France; Comptes Rendus de I'Acad. Sci. Paris, to appear.

100 E. LIEB(1981), Thomas－Fermi theory and related theories of atoms and molecules, Rev. Mod. Phys., 53, pp. 603—641.

101 F. LOW(1985), Complete sets of wave packets, in A Passion for Physics－Essays in Honor of Geoffrey Chew, World Scientific, Singapore, pp. 17—22.

102 YU. LYUBARSKII, Frames in the Bargmann space of entire functions, to appear in Entire and subharmonic functions, Vol. 11 of the series Advances in Soviet Mathematics, B. Ya. Levin, ed., Springer－Verlag, Berlin.

103 S. MAKKAT(1989), Multiresolution approximation and wavelets, Trans. Amer. Math. Soc., 315, pp. 69—88.

_______(1989b), A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, IEEE Trans. PAMI, 11, pp. 674—693.

_______(1989c), Multifrequency channel decompositions of images end wavelet models, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., 37, pp. 2091—2110.

_______(1991), Zero－crossings of a wavelet transform, IEEE Trans, Inform. Theory, 37, pp. 1019—1033.

104 S. MALLAT AND S. HONG(1992), Characterization of signals from multiscale edges, Computer Science Tech. Report, New York University, IEEE Trans. PAMI, to appear.

105 S. MALLAT AND W. L. HWANG(1991), Singularity detection and processing with wavelets, IEEE Trans. Inform. Theory, 38, pp. 969—978.

106 J. MCCLELLAN(1973), The design of two－dimensional filters by transformations, in Seventh Annual Princeton Conference on ISS, Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. 247—251.

107 Y. MEYER(1985), Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebras d'operateurs, Seminaire Bourba-

ki, 1985—1986, no. 662.

_______(1986), Ondelettes, fonctions splines et analyses graduees, Lectures given at the University of Torino, Italy.

_______(1990), Ondelettes et operateurs, I: Ondelettes, Ⅱ: Operateurs de Calderon－Zygmund, Ⅲ: Operateurs multilineaires, Hermann, Paris. An English translation will be published by the Cambridge University Press in 1992.

_______(1992), Ondelettes sur 1'intervalle, Rev. Math. Iberoamer., to appear.

_______(1992b)(ed.), Wavelets and applications, in Proceedings of the International Conference on Wavelets, May 1989, Marseille, France; to be published by Masson, Paris.

108 C. A. MICCHELLI(1990), Using the refinement equation for the construction of pre－wavelets, preprint, IBM T. J. Watson Research Center, Numer. Algorithms, to appear.

109 C. A. MICCHELLI AND H. PRAUTZSCH(1989), Uniform refinement of curves, Linear Algebra Appl., 114/115, pp. 841—870.

110 F. MINTZER(1985), Filters for distortion－free two－band multirate filter banks, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., 33, pp. 626－630.

111 J. MORLET(1983), Sampling theory and wave propagation, in NATO ASI Series, Vol. 1, Issues in Acoustic signal/Image processing and recognition, C. H. Chen, ed., Springer－Verlag, Berlin, pp. 223—261.

112 J. MORLET, G.. ARENS, I. FOURGEAU, AND D. GIARD(1982), Wave propagation and sampling theory, Geophysics, 47, p. 203—236.

113 J. MUNCH(1992), Noise reduction in tight Weyl－Heisenberg frames, IEEE Trans. Inform.. Theory, 38, pp. 608—616.

114 R. MURENZI(1989), Wavelet transforms associate to the n－dimensional Euclidean group with dilations: signals in more than one dimension, in Wavelets, J. M. Combes, A. Grossmann, and Ph. Tchamitchian, eds., Springer－Verlag, Berlin, pp. 239—246; see also Ondelettes multidimensionelles et application a l'analyse d'images, Ph. D. Thesis(1990), Universite Catholique de Louvain, Belgium.

115 T. PAUL(1985), Ondelettes et mecanique quantique, Ph. D. Thesis, Universite de Marseille, France; see also Paul and Seip (1991).

116 T. PAUL AND K. SEIP(1992), Wavelets and quantum mechanics, in Ruskai et al. (1992), pp. 303—322.

117 A. M. PERELOMOV(1971), On the completeness of a system of coherent states, Teor. Mat. Fiz., 6, pp. 213—224.

118 G. POLYA AND G. SZEGO(1971), Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis, Vol. Ⅱ, Springer－Verlag, Berlin.

119 M. PORAT AND Y. Y. ZEEVI(1988), The generalized Gabor scheme of image representation in biological and machine vision, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 10, pp. 452—468.

120 M. RIEFFEL(1981), Von Neumann algebras associated with pairs of lattices in Lie groups, Math. Ann., 257, pp. 403—413.

121 O. RIOUL (1991), Dyadic up－scaling schemes: simple criteria for regularity, preprint, Centre National d'Etudes des Telecommunications.

122 M. B. RUSKAI, G. BEYLKIN, R. COIFMAN, I. DAUBEDHIES, S. MALLAT, Y. MEYER, AND L.

RAPHAEL(1992), eds., Wavelets and their Applications, Jones and Bartlett, Boston.

123 K. SEIP(1991), Reproducing formulas and double orthogonality in Bargmann and Bergman spaces, SIAM J. Math. Anal., 22, pp. 856—876.

124 K. SEIP AND R. WALLSTEN(1990), Sampling and interpolation in the Bargmann - Fock space, preprint, Mittag - Leffler Institute.

125 M. J. SHENSA(1991), The discrete wavelet transform: wedding the a trous and Mallat's algorithms, preprint, Naval Ocean Systems Center, San Diego, IEEE Trans. Signal Process., to appear.

126 D. SLEPIAN(1976), On bandwidth, Proc. IEEE, 64,. pp. 292—300.

_______(1983), Some comments on Fourier analysis uncertainty and modeling, SIAM Rev., 25, pp. 379—393.

127 D. SLEPIAN AND H. O. POLLAK(1961), Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, I, Bell Systems Tech. J., 40, pp. 43—64.

128 M. J. T. SMITH AND T. P. BARNWELL Ⅲ (1986), Exact reconstruction techniques for treestructured subband coders, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., 34, pp. 434—441; the basic results were already presented at the IEEE Internat. Conf. Acoust. Signal Speech Process., March 1984, San Diegn.

129 E. STEIN AND G. WEISS(1971), Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton.

130 J. O. STROMBERG(1982), A modified Franklin system and higher order spline systems on Rn as unconditional vases for Hardy spaces, Conf. in honor of A. Zygmund, Vol. Ⅱ, W. Beckner et al., ed., Wadsworth math. Series, pp. 475—493.

131 D. J. SULLIVAN, J. J. REHR, J, W. WILKINS, AND K. G. WILSON(1987), Phase space wannier funcrions in electronic strucrure calculations preprint, Cornell Uuiversity.

132 PH. TCHAMICHIAN (1987), Biothogonalire et theorie des operateurs, Rev. Math, Iberoamer., 3, pp. 163—189

133 B. TORRESANI (1991), Wavelet analysis of asymptotic signals: Ridge and skeleton of the transform, in Meyer (1992b), see also Tchamitchian and Torresani's paper in Ruskai et al (1992), pp. 123—152.

134 P. P. VAIDYANATHAN (1987), Theory and design of M - channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having the perfect reconstruction property, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., 35, pp. 476—492.

________(1992), Multirate Systems and Filter Banks, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, NJ.

135 P. P. VAIDYANATHAN AND P . Q. HONANG (1988), ;Lattice structure for optimal design and robust implementation of two - channel perfect - reconstruction QMF banks, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process,. 36, pp. 81—94.

136 P. P. VAIDYANATHAN, T. Q. NGUYEN, Z. DOGANATA, AND T. SARAMAKI (1989), Improved technique for design of perfect reconstruction FIR OMF banks with lossless polyphase matrices, IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process., 37, pp. 1024—1056.

137 M. VETTERLI (1984), Multidimensional subband coding: some theory and algorithms, Signal Process., 6, pp. 97—112.

_______(1986), Filter banks allowing perfect reconstruction, Signal Process., 10, pp. 219—244; these results were already presented as splitting a signal into subsampled channels allowing perfect reconstruction, IASTED Conf. on Applied Signal Processing and Digital Filters, June 1985, Paris.

138 M. VETERLI AND K. HERLEY (1990), Linear phase wavelets, preprint, Dept. of Electrical Engineering, Columbia University (New York); IEEE Trans. Signal Process., to appear.

139 M. VETERLI, J, KOVACEVIC, AND D LEGALL (1990), Perfect reconstruction filter banks for HDTV representation and coding, Image Comm., 2, pp. 349—364.

140 P. VIAL (1992), Construction de vases orthonormales de Rn, preprint, Centre de Physique Theorique, CNRS, Luminy—Marseille, France.

141 L. F. VILLEMOES (1992), Energy moments in time and frequency for two-scale difference equation solutions and wavelets. SIAM J. Math. Anal. 23, to appear.

142 H. VOLKNER (1991), On the regularity of warelets, preprint, Dept. of Math., University of Wisconsin - Milwaukee, to be published in special wavelet issue of IEEE Trans. Inform.. Theory, (1992).

143 M. V. WICKERHAUSER (1990), Picture compression by best - basis sub - band coding, preprint, Yale University.

________(1992), Acoustic signal processing with wavelet packets, in Chui (1992c), pp. 679—700.

144 K. G. WILSON (1987), Generalized Wannier Functions, preprint, Cornell University.

145 A. WITKIN (1983), Scale space filtering, in Proc. Internat. Joint Conf. Artificial Intelligence.

146 R. M. YOUNG (1980), An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York.

147 A. ZYGMUND (1986), Trigonometric Series. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.